Michael Ruhrländer

Aufstieg zu den Einstein-gleichungen

Raumzeit, Gravitationswellen, Schwarze Löcher und mehr

SACHBUCH

Springer

Aufstieg zu den Einsteingleichungen

Michael Ruhrländer

Aufstieg zu den Einsteingleichungen

Raumzeit, Gravitationswellen, Schwarze Löcher und mehr

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer

Michael Ruhrländer
Mainz, Deutschland

ISBN 978-3-662-62545-3 ISBN 978-3-662-62546-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62546-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Ursprünglich erschienen bei Pro BUSINESS GmbH, Berlin, 2014

Planung/Lektorat: Lisa Edelhäuser
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur zweiten Auflage

Inhaltliche Neuerungen

Die vorliegende zweite Auflage ist eine überarbeitete, verbesserte und erweiterte Ausgabe der ersten Auflage, die Ende 2014 im Pro Business Verlag Berlin erschienen ist. Der Wechsel zum Springer Verlag wurde notwendig, da der Pro Business Verlag im Februar 2020 Insolvenz angemeldet hat.

Der Aufbau des Buches ist im Wesentlichen gleich geblieben. Erweitert wurde der Inhalt um drei Kapitel. In Kap. 10 wird als Abschluss des Teils über die Tensorrechnung im euklidischen Raum der allgemeine Trägheitstensor im Dreidimensionalen besprochen. In den Kap. 25 und 26 werden weitere Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie auf Objekte außerhalb unseres Sonnensystems vorgestellt. In Kap. 25 behandeln wir das Thema „Gravitationswellen”, das durch die erstmalig erfolgreiche Messung von Gravitationswellen auf der Erde im Jahr 2015 (bekannt gegeben im Februar 2016, geehrt durch den Physik-Nobelpreis 2017) in den letzten Jahren große Aufmerksamkeit erlangt hat. In Kap. 26 begeben wir uns in das Innere eines Sterns, untersuchen das Gleichgewicht zwischen Druck und Gravitation und leiten die sogenannte „innere” Schwarzschild-Lösung her. Diese beiden Kapitel haben wir gemeinsam mit Kap. 27 über statische kugelsymmetrische Schwarze Löcher in einem neuen Teil V zusammengefasst.

Danksagung

Herzlich bedanken möchte ich mich bei allen Lesern der ersten Auflage, die Kontakt mit mir aufgenommen und mich auf Verbesserungen und Ungereimtheiten aufmerksam gemacht haben. Durch ihre Beiträge und Hinweise wurde die vorliegende zweite Auflage ausführlicher, verständlicher sowie fehlerbereinigt, und die auf meiner Homepage veröffentlichte Errata-Liste der ersten Auflage ist obsolet geworden. Mein Dank geht auch an den Springer-Verlag, hier insbesondere an Dr. Lisa Edelhäuser und Stella Schmoll für die wiederum hervorragende Zusammenarbeit.

Obwohl ich mich sehr darum bemüht habe, das Buch fehlerfrei zu gestalten, wird es vermutlich einige (hoffentlich wenige) fehlerhafte Stellen im Text geben.

Die möglichen Fehlerstellen und die dazugehörigen Richtigstellungen sind in einer Errataliste auf meiner Homepage `http://www.michael-ruhrlaender.de` einsehbar. Dort werde ich auch etwaige Zusatzmaterialien zum Buch veröffentlichen.

Über dieses Buch

Albert Einstein hat die **Allgemeine Relativitätstheorie** (**ART**), seine Theorie der Schwerkraft, 1915 erstmals veröffentlicht. Zu seiner Zeit und auch heute noch gilt die ART insbesondere wegen der mathematisch anspruchsvollen Darstellungen als schwer verstehbar. Zwar ist es schon lange nicht mehr so, wie man es anekdotisch dem britischen Astronomen Sir Arthur Stanley Eddington zuschreibt, der in den 1920-er Jahren auf die Frage eines Journalisten, ob es richtig sei, dass es nur drei Menschen auf der Welt gäbe, die die Allgemeine Relativitätstheorie verstanden hätten, mit der Gegenfrage: „Wer ist der dritte?" geantwortet haben soll. Heute ist die ART eine Standardvorlesung in einem Physikstudium, allerdings wird sie üblicherweise erst im Haupt- bzw. Masterstudium angeboten. Das heißt, diejenigen, die sich erstmals mit der ART auseinandersetzen, sind im Regelfall fortgeschrittene Physikstudenten, die schon fünf bis sechs Semester lang studiert haben und dabei die Grundgebiete der Physik (Mechanik, Elektrodynamik, Spezielle Relativitätstheorie, Quantenmechanik und Statistische Physik) gelernt sowie die dafür benötigten mathematischen Kenntnisse aufgebaut haben. Und das ist auch der Grund dafür, dass die allermeisten Lehrbücher über die Allgemeine Relativitätstheorie nur für Leser verstehbar sind, die dieses Vorwissen in Physik und Mathematik bereits erworben haben.

Hier wird ein komplett anderer Ansatz gewählt. An physikalischen und mathematischen Vorkenntnissen wird als Minimum nur das vorausgesetzt, was man in der Oberstufe von Gymnasien bzw. in Fachoberschulen lernt. Alles, was zum Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie an weiterem Wissen erforderlich ist, wird behutsam und detailliert eingeführt. Mit genügend Lernwillen und Durchhaltevermögen können auch diejenigen naturwissenschaftlich Interessierten die Inhalte des Buches verstehen, die keinen Leistungskurs in Physik oder Mathematik absolviert haben bzw. deren Schulzeit schon weiter zurückliegt. Auch Physikstudenten, die sich erstmals mit der ART beschäftigen, finden hier einen leichten und ausführlich beschriebenen Zugang in die Thematik.

Das Buch bietet den einfachsten möglichen Einstieg in die *quantitative* ART, d.h., es beschreibt die Theorie auch in ihrer mathematischen Formulierung, also in einer Form ähnlich der, in der Einstein sie veröffentlicht hat. Der Leser muss sich daher mit einer ganzen Reihe von physikalischen Phänomenen und mathematischen Techniken auseinandersetzen, um dahin zu gelangen, dass er die Inhalte von Einsteins Gravitationstheorie auch formelmäßig versteht.

Entstehung

Der Autor ist kein ausgewiesener Experte der ART, also keiner, der - wie die meisten Autoren von Büchern über die Relativitätstheorie - damit aufwarten kann, dass er die Inhalte der Theorie in einer Reihe von Jahren in Vorlesungen an Universitäten vermittelt hat. Ich bin zwar studierter Mathematiker, habe mich aber nach Studium und Promotion für einen beruflichen Weg außerhalb von Universitäten entschieden und dann knapp 30 Jahre lang „in der Industrie" gearbeitet, und zwar in Arbeitsgebieten, die nichts mit Physik oder höherer Mathematik zu tun hatten. Was mich allerdings mein ganzes berufliches Leben begleitet, ist das Interesse an naturwissenschaftlichen, speziell physikalischen Fragestellungen.

Und so ist dieses Werk entstanden, weil ich mich im fortgeschrittenen Alter noch einmal intensiv mit der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigen wollte. Ich wollte diese Theorie in einer Tiefe verstehen, die über einen populärwissenschaftlichen Rahmen hinausgeht. Also habe ich mich auf die Suche nach für mich geeigneter Literatur begeben, musste aber schnell feststellen, dass es bislang zwei völlig verschiedene Ansätze zur Vermittlung der Inhalte der Theorie gibt. Zum einen existiert eine Vielzahl von Büchern und Artikeln, die in Alltagssprache versuchen, die grundlegenden Ideen und Konzepte sowie mögliche Folgen der Theorie darzustellen. Diese Erklärungsansätze kommen in der Regel ohne Formeln aus, bleiben also qualitativ beschreibend, sind aber zum Teil sehr gut darin, die physikalischen Hintergründe und möglichen Anwendungsbereiche zu vermitteln. Die andere Kategorie bilden jene Lehrbücher und Fachaufsätze, die man als fortgeschrittener Physikstudent parallel zu den Vorlesungen zur Hand nimmt und durcharbeitet. Diese Lehrbücher sind oftmals in einer „modernen", sehr abstrakten Formelsprache formuliert und waren für mich anfangs überwiegend unverständlich. Mit anderen Worten: Es gab für mich kein geeignetes Buch, das ich hernehmen konnte, um im Selbststudium die Allgemeine Relativitätstheorie auch quantitativ zu durchdringen. Ich war darauf angewiesen, aus einer Vielzahl unterschiedlicher Lektüren, die aus populärwissenschaftlichen Darstellungen, aus meist englischsprachigen physikalischen Lehrbüchern sowie aus im Internet verfügbaren Vorlesungsskripten und Lehrmaterialien bestanden, die für mich passenden Passagen herauszusuchen und durchzuarbeiten. Daneben habe ich als Gasthörer Vorlesungen zur Relativitätstheorie besucht und dadurch mein angelesenes Wissen weiter ausgebaut.

Das vorliegende Buch soll den von mir beschrittenen Weg zur Aneignung der grundlegenden Inhalte der Allgemeinen Relativitätstheorie deutlich abkürzen und die bestehende Lücke zwischen den populärwissenschaftlichen und den „hochwissenschaftlichen" Darstellungen schließen.

Da ich seit einigen Jahren an einer Fachhochschule Mathematik für angehende Ingenieure lehre, weiß ich ziemlich genau, welche physikalischen und mathematischen Vorkenntnisse jemand mitbringt, der ein solches Studium anfängt. Und daher war es mein Bestreben, das Niveau so zu wählen, dass Menschen mit ähnlichem Wissensstand dort andocken können, wo das Buch anfängt. Trotzdem sei darauf hingewiesen, dass das Durchlesen/Durcharbeiten für die allermeisten Leser sehr anstrengend sein wird, auch wenn die Anfangsvoraussetzungen eher gering sind. Denn das Buch nimmt zügig Fahrt auf und dringt schnell in Bereiche ein, die normalerweise in der Schule nicht mehr behandelt werden.

Gegenstand

Dieses Buch beschäftigt sich mit der Schwerkraft, auch **Gravitationskraft** genannt. Die Schwerkraft ist eine der vier sogenannten **physikalischen Fundamentalkräfte** (neben der Schwerkraft sind das die **elektromagnetische Kraft** sowie die **schwache** und **starke Kernkraft**) und zeichnet sich dadurch aus, dass sie überall gegenwärtig ist, d.h., man kann die Schwerkraft nicht ausschalten. Sie sorgt dafür, dass sich Galaxienhaufen bilden, dass die Sterne in unserer Milchstraße nicht auseinanderfliegen, dass die Planeten um die Sonne und der Mond um die Erde kreisen, dass der Apfel vom Baum fällt usw.

Was hat die Schwerkraft mit der Relativitätstheorie zu tun? Sie wissen vielleicht schon, dass es zwei grundverschiedene Relativitätstheorien gibt, die beide von Einstein entwickelt wurden. Die sogenannte **Spezielle Relativitätstheorie** (**SRT**), die Einstein 1905 veröffentlichte, räumt auf mit unserem intuitiven, dem gesunden Menschenverstand folgenden Verständnis von Raum und Zeit. Sie ist - wie wir in Teil III darstellen werden - in der mathematischen Formulierung in ihren grundlegenden Konzepten auf Mittelstufenniveau verständlich. Trotzdem erfordert sie ein komplettes, der normalen Anschauung entgegen gerichtetes Umdenken über die Zeit und den Raum und ist wahrscheinlich eher aus diesem Grunde vielen Menschen bis heute unverständlich geblieben.

Die Allgemeine Relativitätstheorie baut auf zwei Fundamenten auf. Zum einen ist das die sogenannte **Newton'sche Gravitationstheorie**, die schon im 17. Jahrhundert von Isaac Newton entwickelt wurde und in den darauf folgenden Jahrhunderten die Grundlage für alle himmelsmechanischen Berechnungen (z.B. Umlaufbahnen der Planeten, Entdeckung neuer Planeten) und für erdbezogene Phänomene (z.B. Sonnen- und Mondfinsternisse, Entstehung der Gezeiten, Jahreszeitenwechsel) darstellte. Zum anderen baut die ART auf der Speziellen Relativitätstheorie auf, ist aber in einer mathematischen Sprache formuliert, die es bislang verhinderte, dass sie einem größeren Interessentenkreis zugänglich gemacht werden konnte.

Das Buch folgt in seiner Diktion dem Ansatz eines Lehrbuches, da es den Anspruch hat, quantitative Aussagen zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu machen. Deswegen finden sich auch viele mathematische Ausdrücke in den einzelnen Kapiteln, was bestimmt den einen oder anderen Leser zunächst abschrecken mag. Aber, und das sei betont, in diesem Buch wird immer der leichteste, damit oftmals längere Weg gewählt, der langsam und gemächlich in die trotzdem nicht zu unterschätzenden Höhen führt. Steilere Passagen und sonstige mögliche Abkürzungen, die in der Regel eine weiter ausgebildete Klettertechnik (sprich höhere Mathematik) erfordern, werden immer dort vermieden, wo es einen leichter gängigen Umweg gibt.

Grundsätzlich lassen wir uns in diesem Buch von den physikalischen Phänomenen leiten, versuchen also immer zunächst den physikalischen Inhalt zu verstehen, um dann im nächsten Schritt die entsprechenden mathematischen Darstellungen herauszuarbeiten. Bei der Herleitung der Formeln verfolgen wir den Anspruch, dass *jeder* Schritt verständlich ist, d.h., es wird ausführlich und detailliert dargestellt, wie sich Schlussfolgerungen und Umformungen ergeben. Schließlich interpretieren wir die in den abgeleiteten Formeln steckenden Informationen nochmals physikalisch, sodass sich ein weiter vertieftes Verständnis für den Zusammenhang von physikalischen Inhalten und mathematischen Darstellungen aufbauen kann.

Adressaten

Für welchen Leserkreis ist dieses Buch geschrieben? Nun, das sind Menschen, die ein grundsätzliches Interesse an naturwissenschaftlichen, speziell physikalischen Fragen haben und die sich „in eine Sache verbeißen" können, die also eine große Leistungsbereitschaft und ein beträchtliches Durchhaltevermögen besitzen. Also z.B. Schüler, die beabsichtigen, ein naturwissenschaftliches oder technisches Studium aufzunehmen, oder Studenten mit anderen Fachrichtungen als Physik. Insbesondere aber auch Physikstudenten, die sich erstmals mit der Allgemeinen Relativitätstheorie auseinandersetzen und einen einfachen Einstieg dafür suchen. Oder, wie ich selbst, Menschen, die in ihrer Jugend vielleicht Ingenieurwissenschaft, Chemie, Mathematik o.Ä. studiert haben und die Beschäftigung mit der Physik als ihr Hobby ansehen.

Voraussetzungen

Kommen wir nun zur Frage, was denn einer mitbringen muss, um unserem Ansatz, der natürlich auch nicht „bei Adam und Eva" anfangen kann, folgen zu können. Von der Relativitätstheorie, auch von der Speziellen, muss man nichts wissen. Alles, was zum Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Speziellen notwendig ist, wird in diesem Buch ausführlich dargestellt. Da die Allgemeine Relativitätstheorie eine Erweiterung der Newton'schen Theorie über die Schwerkraft ist, ist es sehr hilfreich, wenn Grundkenntnisse aus der klassischen Newton'schen Mechanik (z.B. Energie, Gravitationsgesetz, Planetenbahnen) vorhanden sind bzw. schnell wieder reaktiviert werden können. Sollten Sie über die klassische Mechanik keinerlei Kenntnisse haben, so müssen Sie nicht unbedingt auf andere Bücher zurückgreifen. Denn in den Anfangskapiteln dieses Buches werden die grundlegenden Begriffe und Konzepte aus der Newton'schen Theorie, sofern sie für das weitere Verständnis notwendig sind, dargestellt. Mit anderen Worten: Physikalische Grundkenntnisse sind hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich.

Etwas anders verhält es sich mit den Vorkenntnissen in der Mathematik. Notwendig ist ein Wissensstand, der etwa dem mittleren Oberstufenniveau eines Gymnasiums bzw. einer Fachoberschule entspricht. Es wird vorausgesetzt, dass Sie Kenntnisse über Bruchrechnung, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Lösen von Gleichungen sowie einfache Geometrie und trigonometrische Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens usw.) haben. Darüber hinaus wäre es sehr hilfreich, wenn Sie wissen oder sich parallel schnell aneignen, wie man Grenzwerte von Funktionen berechnet, Funktionen in einer Variablen differenziert und integriert und welche Gesetze zur Differenzial- und Integralrechnung es gibt. Aus der Geometrie bzw. Linearen Algebra sollten Kenntnisse vorhanden sein, etwa wie man mit Vektoren im Raum rechnet, was Skalar- und Vektorprodukte, Matrizen sowie Determinanten sind und wie man damit rechnet. Aber auch für die mathematischen Voraussetzungen gilt das oben Gesagte: Alle mathematischen Grundlagen, die über das gerade als notwendig Bezeichnete hinausgehen, werden in diesem Buch, wenn auch kurz, dargestellt, sodass Sie grundsätzlich kein anderes Mathematikbuch zur Hand nehmen müssen. Darüber hinaus finden Sie im Anhang (Kap. 29) diejenigen mathematischen Formeln und physikalischen Gesetze, die in diesem Buch zwar benutzt, aber nicht ausführlich hergeleitet oder erklärt werden, d.h., in diesem Anhang stehen die Dinge, die Sie „eigentlich" schon mitbringen sollten. Natürlich bleibt es Ihnen unbenommen, sich sowohl in die Physik wie auch in die Mathematik tiefer einzuarbeiten. Dazu gibt es jeweils am Ende der einzelnen Teile des Buches zu den angesprochenen Themen dedizierte Literaturempfehlungen, die auch alle im **Literaturverzeichnis** am Ende des Buches zu finden sind.

Titel

Der Titel des Buches „Aufstieg zu den Einsteingleichungen" ist bewusst gewählt. Wir haben einen anstrengenden und langen Weg vor uns, der in Etappen aufgeteilt ist, die man erreichen muss, um dem jeweils nächsten Abschnitt folgen zu können. Man kann das Buch also nicht punktuell oder abschnittsweise lesen (es sei denn, man hat schon gute Kenntnisse über unseren Gegenstand). Es ist also so wie bei einer Bergbesteigung: Zunächst muss das Basislager (Newton'sche Mechanik) erreicht werden. Im Basislager werden neue Klettertechniken (Vektor- und Tensorrechnung) gelernt und eingeübt, die dann zum Aufstieg ins Zwischenlager (Spezielle Relativitätstheorie) benötigt werden. Im Zwischenlager werden die Techniken perfektioniert (Ausbau der Vektor- und Tensorrechnung), und anschließend wird der Gipfel (Einsteingleichungen) ins Visier genommen und erstiegen. Den Gipfel unserer Unternehmung bilden also die Einsteingleichungen, in denen die Allgemeine Relativitätstheorie höchst komprimiert zusammengefasst ist. Um im Vorhinein schon einmal einen kurzen Blick darauf zu werfen, sie lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, R = 8\pi\, G\, T_{\mu\nu},$$

bestehen also aus nur wenigen Ausdrücken, und trotzdem kann man ein ganzes Buch darüber schreiben, um mitzuteilen, was sie letztendlich bedeuten. Wieso eigentlich Einsteingleichungen, wo doch nur eine Gleichung da steht? Das liegt an der komprimierten Schreibweise: Die (tiefer gestellten) Indizes μ (griechischer Buchstabe My) und ν (griechischer Buchstabe Ny) können *jeweils* die vier Werte $\mu, \nu = t, x, y, z$ (was das genau bedeutet, wird später klar werden) annehmen. Das heißt, der Ausdruck $\mu\nu$ steht für alle möglichen Kombinationen der t, x, y, z, also $\mu\nu = tt$ oder $\mu\nu = tx$ oder $\mu\nu = ty$ oder auch $\mu\nu = zz$ usw. Ausführlicher geschrieben lauten die Gleichungen damit

$$\begin{aligned}
R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt}\, R &= 8\pi\, G\, T_{tt} \\
R_{tx} - \frac{1}{2} g_{tx}\, R &= 8\pi\, G\, T_{tx} \\
R_{ty} - \frac{1}{2} g_{ty}\, R &= 8\pi\, G\, T_{ty} \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
R_{zz} - \frac{1}{2} g_{zz}\, R &= 8\pi\, G\, T_{zz}.
\end{aligned}$$

Es gibt also zunächst $4 \cdot 4 = 16$ einzelne Gleichungen, die aber teilweise das Gleiche aussagen, letztlich bleiben *zehn* unabhängige Gleichungen übrig.

Wenn wir den Gipfel erreicht haben, bleibt noch etwas Zeit, uns insbesondere anzuschauen, welche quantitativen Konsequenzen die Allgemeine Relativitätstheorie hat, d.h., wo sie sich von ihrer Vorgängerin (der Newton'schen Gravitationstheorie) so sehr unterscheidet, dass sie beobachtete Phänomene erklären kann, für die die Newton'sche Theorie keine Antworten hat. Das ist ein sehr weites Feld, man denke etwa an die verschiedenen kosmologischen Modelle, mit denen man unser gesamtes Universum beschreiben kann, oder an die Darstellung Schwarzer Löcher oder an den Nachweis von Gravitationswellen. Alles Themen, über die man wiederum ganze Bücher schreiben kann. In diesem Buch beschränken wir uns im Wesentlichen auf die „klassischen" Themen, d.h. auf physikalische Phänomene in unserem Sonnensystem. Wir diskutieren die historisch früheste Lösung der Einsteingleichungen, die sogenannte **(äußere) Schwarzschild-Lösung**, und beschreiben damit z.B. die Periheldrehung des Merkurs, die Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne sowie als moderne Anwendung die GPS-Navigation. Danach untersuchen wir einige Phänomene rund um die Gravitationswellen, die in den letzten Jahren stärkere Beachtung gefunden haben, nachdem im Jahr 2016 die Ergebnisse der erstmaligen Messung von Gravitationswellen auf der Erde veröffentlicht wurden. Anschließend schauen wir uns an, aufgrund welcher Mechanismen Sterne kollabieren und wie man mithilfe der **(inneren) Schwarzschild-Lösung** das Innere eines Sterns beschreiben kann. In den letzten Abschnitten untersuchen wir einige Eigenschaften von statischen Schwarzen Löchern und gehen damit zu den wohl rätselhaftesten Objekten im Universum.

Aufbau

Dieses Buch besteht aus sechs Teilen.

- In Teil I werden zunächst die Grundelemente der Newton'schen Mechanik (u.a. Fallgesetze, Impuls, Kraft, Arbeit und Energie, Drehbewegungen) eingeführt. Es folgt eine ausführliche Darstellung des Newton'schen Gravitationsgesetzes inklusive der Herleitung der möglichen Bahnen von Planeten und Kometen im Sonnensystem. Damit wird die Grundlage für ein vertieftes Verständnis der wichtigsten mit der Newton'schen Schwerkraft verbundenen physikalischen Phänomene gelegt.

- In Teil II wird die für das Verständnis der Relativitätstheorie zwingend notwendige **Vektor- und Tensorrechnung** eingeführt, allerdings für den einfachsten Fall der zweidimensionalen flachen Ebene. Dieser Teil ist überwiegend mathematisch geprägt.

- In Teil III werden drei Themenbereiche behandelt. Als Erstes werden die Phänomene der Speziellen Relativitätstheorie mit möglichst einfachen mathematischen Mitteln vorgestellt, danach erfolgt eine weitere Vertiefung der Tensorrechnung, und abschließend wird die neu gelernte, erweiterte Tensorrechnung auf die bereits erzielten Ergebnisse der SRT angewendet, was zu einer neuen Formulierung der physikalischen Gesetze in der SRT führt.

- Teil IV beginnt mit einer Beschreibung physikalischer Phänomene unter dem Einfluss einer Gravitationswirkung, wodurch die Notwendigkeit einer Erweiterung sowohl der Newton'schen Gravitationstheorie als auch der Speziellen Relativitätstheorie erkennbar wird. Danach wird die Tensorrechnung so weiterentwickelt und verallgemeinert, dass die neuen Gesetze der Allgemeinen Relativitätstheorie, d.h. insbesondere die Einsteingleichungen, formuliert werden können. Abschließend werden einige Konsequenzen der Einstein'schen Theorie in unserem Sonnensystem behandelt.

- In Teil V werden einige ausgewählte Phänomene von kosmologischen Objekten diskutiert. Wir untersuchen, wie Gravitationswellen entstehen und wie sie auf der Erde gemessen werden können. Danach beschreiben wir den Kollaps eines Sternes und berechnen sein inneres Gleichgewicht. Zum Abschluss beschäftigen wir uns mit statischen Schwarzen Löchern und zeigen, wie man mit geschickt gewählten Koordinaten Aussagen über das Innere eines Schwarzes Loches machen kann.

- Teil VI besteht aus einem Anhang, in dem physikalische Gesetze, mathematische Formeln und Tabellen mit physikalischen Einheiten und Größenangaben von kosmologischen Objekten zum Nachschlagen aufgelistet sind.

Ein wichtiger Aspekt bei der Aneignung der quantitativen Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht darin, die notwendigen (mathematischen) Techniken und Darstellungsweisen zu lernen, mit deren Hilfe die physikalischen Gesetze der ART formuliert sind. Wie gerade schon ausgeführt, spielt dabei die Tensorrechnung eine entscheidende Rolle. Es gibt aber darüber hinaus auch (meist vorgelagerte) weitere Themen aus der Mathematik, die schon für die Formulierung der Newton'schen Mechanik bzw. der Speziellen Relativitätstheorie erforderlich sind. Wir unterscheiden bei den mathematischen Werkzeugen und Fertigkeiten zwei Kategorien:

1. Werkzeuge und Fertigkeiten, deren Kenntnisse der Leser (eigentlich) mitbringen sollte, werden relativ kurz dargestellt und jeweils als nummerierte **Bemerkung** mit der Überschrift „**Mathematische Grundlagen** (kurz **MG:**)" eingeleitet sowie durch das Zeichen □ beendet.

2. Werkzeuge und Fertigkeiten, die neu zu erlernen und einzuüben sind, sind integrale Bestandteile des Buches und werden ebenfalls als nummerierte Bemerkung mit der Überschrift „**Mathematische Werkzeuge** (kurz **MW:**)" gekennzeichnet. Sie werden detailliert hergeleitet sowie ausführlich beschrieben und eingeübt. Auch diese Abschnitte werden durch das Symbol □ beendet.

Werden im Text nichthergeleitete Formeln benutzt, so wird unterstellt, dass diese dem Leser bekannt sind. Er kann sie aber im Anhang (Kap. 29) nochmals nachschlagen. Auch die in diesem Buch benutzten physikalischen Konstanten (z.B die Lichtgeschwindigkeit c) bzw. realen physikalischen Größen (z.B. die Masse der Sonne in kg) sind in einem Anhang (Kap. 30) nachlesbar.

Alle mathematischen Hilfsmittel werden immer dort definiert, wo sie aus physikalischer Sicht zum ersten Mal zum Einsatz kommen. Das hat den Vorteil, dass die Mathematik eng bei der Physik bleibt und damit klar wird, aus welchen physikalischen Gründen man diese oder jene Mathematik braucht. Der Nachteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass dadurch die Mathematik nicht kompakt, nicht aus einem Guss vermittelt, sondern in kleinen Häppchen serviert wird.

Pädagogische Hinweise

Ich habe in diesem Buch darauf verzichtet, Detailberechnungen in Anhänge oder separate „Boxen" zu verschieben, da ich den Lesefluss nicht durch Hin- und Herblättern stören wollte. Die Detailberechnungen sind also im Text integriert und können unmittelbar nachvollzogen werden, wenn der Leser das möchte. Es besteht natürlich auch immer die Möglichkeit, die Details zu überspringen und mit den nächsten Schritten fortzufahren, auch wenn nach Ansicht des Autors eine solche Vorgehensweise kein tiefes Verständnis der Gedankengänge und entstehenden Strukturen erzeugt. Die ausführlichen Darstellungen jeder einzelnen Berechnung sollten dem Leser, wenn er diese nachvollziehen kann, ausreichende Sicherheit geben, dass er tiefer in den Stoff eingedrungen ist. Auch ist es ratsam zu versuchen, die ein oder andere Herleitung von Formeln und Gesetzen selbstständig vorzunehmen und anschließend mit denen im Buch zu vergleichen. Dieses Buch enthält deswegen auch keine Übungsaufgaben, an denen der Leser überprüfen kann, ob er die durchgearbeiteten Teile wirklich verstanden hat.

Beim Lesen von physikalischer Literatur habe ich es immer als lästig empfunden, zurückblättern zu müssen, wenn im Text auf ein sehr viel früheres Ergebnis, das ich nicht mehr vollständig parat hatte, verwiesen wurde. Deshalb sind in diesem Buch die Verweise auf lang zurückliegende Ergebnisse zwar angegeben, die entsprechenden Formeln werden überwiegend aber auch noch einmal an den Verweisstellen wiederholt, sodass ein Zurückblättern zumindest in den Fällen vermieden werden kann, wo eine Wiedererkennung des Früheren vorhanden ist. Wird auf einen Sachverhalt verwiesen, der im gleichen Kapitel hergeleitet wurde, dann findet in der Regel keine Wiederholung statt, da ich davon ausgehe, dass die Erinnerung daran noch frisch ist.

Um noch einmal auf die Analogie Bergsteigen zurückzukommen: Auch das Tempo spielt bei einer Bergbesteigung eine Rolle. Ein berühmter Bergsteiger hat einmal auf die Frage eines Journalisten, wie er denn Berge besteige, schlicht mit „langsam" geantwortet. Und das sollten Sie auch beherzigen. Rechnen Sie damit, dass Sie im Schnitt etwa zwei Seiten pro Tag lesen bzw. durcharbeiten können, d.h., dass Sie ein knappes Jahr Zeit brauchen werden, um die Expedition erfolgreich abzuschließen.

Physikalische Gesetze

Wenn wir im Folgenden über Gesetze sprechen, so ist damit, wie in den Naturwissenschaften üblich, immer eine Modellaussage gemeint. Ein **physikalisches Gesetz** ist eine Hypothese darüber, wie sich beobachtete oder auch noch nicht beobachtbare Phänomene im Rahmen einer physikalischen Theorie erklären lassen. Physikalische Gesetze können also *niemals* den Anspruch erheben, wahr zu sein. Man kann die Richtigkeit physikalischer Modelle nicht beweisen, man kann die Modelle nur falsifizieren, was in der Regel durch widersprüchliche experimentelle Befunde geschieht. Der wissenschaftliche Fortschritt besteht dann darin, eine Erweiterung der bisherigen Gesetze zu finden und diese dann wiederum durch Experimente oder richtige Vorhersagen zu plausibilisieren.

Anmerkungen zur Notation

Textliche Hervorhebungen

Im Text werden neu eingeführte Begriffe mit **fetten** Buchstaben hervorgehoben. Soll eine Passage besonders betont werden, so schreiben wir die relevanten Wörter mit *schräggestellten* Buchstaben. Wichtige physikalische Aussagen werden mit einer $\boxed{\text{Box}}$ umrandet.

Koordinaten und Indizierung

Die in diesem Abschnitt benutzten Begriffe und Festlegungen werden alle im Verlauf des Buches ausführlich besprochen und erläutert, d.h., dieser Abschnitt dient eher als Nachschlagemöglichkeit denn als Definition.

- Im zweidimensionalen euklidischen Raum benutzen wir kartesische Koordinaten x, y oder alternativ Polarkoordinaten r, φ, um einen Punkt in der Ebene eindeutig zu identifizieren.
- Im Dreidimensionalen benutzen wir kartesische Koordinaten x, y, z, Kugelkoordinaten r, ϑ, φ oder Zylinderkoordinaten r, φ, z.
- In der vierdimensionalen Raumzeit kommt die Zeit als Koordinate hinzu und wir benutzen kartesische Koordinaten t, x, y, z bzw. Kugelkoordinaten t, r, ϑ, φ oder auch Zylinderkoordinaten t, r, φ, z.

Alle Koordinaten werden auch zur Indizierung von physikalischen Größen genutzt. Zum Beispiel schreiben wir die drei Komponenten eines dreidimensionalen Vektors $\vec{v}$ als v^x, v^y, v^z, wenn wir uns im kartesischen Koordinatensystem befinden. Wir benutzen die abkürzende Schreibweise v^i, wenn wir eine (beliebige) Komponente des Vektors meinen. Die hochgestellten Buchstaben x, y, z und i nennt man auch Indizes, die auch tiefgestellt sein können. Die in der Physik übliche Konvention für Indizes besteht darin, dass man kleine lateinische Buchstaben, z.B. i, j, k, für die Indizes x, y, z bzw. r, ϑ, φ im Zwei- oder Dreidimensionalen und kleine griechische Buchstaben, z.B. μ, ν, ρ für die Indizes t, x, y, z bzw. t, r, ϑ, φ in der Raumzeit wählt. Eine beliebige kartesische Komponente $A_{\mu\nu}$ eines indizierten vierdimensionalen Objekts kann also ein beliebiges Element aus folgender Auswahl sein:

$$\{A_{tt}, A_{tx}, A_{ty}, A_{tz}, A_{xt}, A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, A_{yt}, A_{yx}, A_{yy}, A_{yz}, A_{zt}, A_{zx}, A_{zy}, A_{zz}\}$$

Die Koordinaten selbst kürzen wir auch mit i, j, k im euklidischen Raum oder mit μ, ν, ρ ab. Bewegt sich zum Beispiel ein Punktteilchen durch den Raum, d.h., ändert sich seine Position im Zeitablauf, so schreiben wir kurz $i\,(t)$, wenn wir eine beliebige Koordinate des Teilchens zum Zeitpunkt t benennen wollen. Gleiches gilt für die Ableitung einer beliebigen Koordinate nach der Zeit, die wir kurz als di/dt notieren.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I.

Das Weltbild der Gravitation vor Einstein

In diesem Teil gehen wir zurück und schauen uns an, was Einsteins Vorläufer über die Gravitation herausgefunden haben. Wir tun das nicht nur aus historischem Interesse, sondern auch deswegen, weil zum einen in den alten Ansätzen schon sehr viel von dem Gedankengut drinsteckt, auf dem Einstein seine Allgemeine Relativitätstheorie aufgebaut hat. Zum anderen bietet die formelmäßige Beschreibung der sogenannten Newton'schen Mechanik und der frühen Gravitationsgesetze gute Gelegenheit, einige der grundlegenden mathematischen Konzepte, die wir auch in den späteren Kapiteln immer wieder brauchen werden, einzuführen und in physikalischen Gesetzen zu verankern.

Unserem Vorgehen entsprechend enthält der Teil I fast alle **mathematischen Grundlagen**, aber auch schon einige neue **mathematische Werkzeuge**, die im Schulunterricht normalerweise nicht mehr behandelt werden.

Was die Gravitation angeht, so fangen wir nicht ganz von vorne an, sondern überspringen die erdzentrischen Weltbilder von z.B. Aristoteles und Ptolemäus und starten im frühen 17. Jahrhundert. In dieser Vor-Newton'schen Zeit gab es zwei getrennte Ansätze, die sich mit dem Phänomen der Schwerkraft beschäftigten, ohne dass den damaligen Forschern schon bewusst war, dass es sich um verschiedene Aspekte eines einzigen physikalischen Gesetzes handelt. Untersucht wurden einerseits die Bewegungen der Himmelskörper mit astronomischen Beobachtungen, die durch die Erfindung des Fernrohres in damals völlig neuer Qualität möglich wurden, und andererseits die Fallgesetze auf der Erde, im Wesentlichen motiviert durch ballistische Versuche mit Kanonenkugeln.

1. Die Kepler'schen Gesetze

Nach Erfindung des Fernrohres gelang es den Astronomen, die Orte der Sonne, des Mondes, der Planeten und der Sterne wesentlich genauer zu bestimmen. Galileo Galilei (1564-1642) fand unter anderem vier „planetis", die den Jupiter umlaufen, und interpretierte sie als Monde des Jupiters, also als ein Planetensystem im Kleinen. Durch die vorliegenden Beobachtungsdaten gelang es schließlich Johannes Kepler (1571-1630), Gesetzmäßigkeiten zu finden, mit denen er den Stand der Planeten vorhersagen konnte. Er stellte fest, dass sich die Planeten nicht auf Kreisbahnen, wie im kopernikanischen Weltbild postuliert, sondern auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen.

Bemerkung 1.1. **MG: Ellipse I**

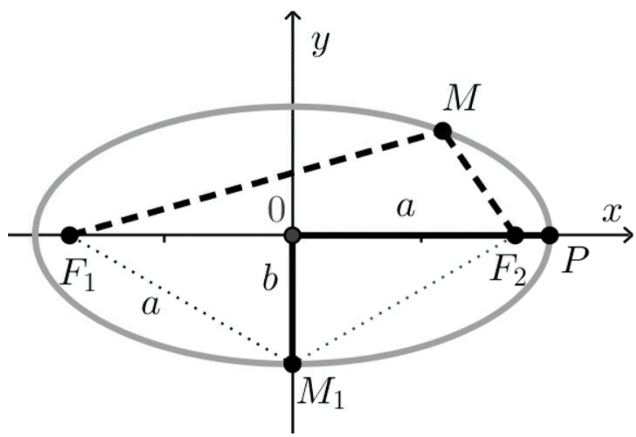

Abbildung 1.1.: Ellipse mit Halbachsen a und b

Eine **Ellipse** ist die Menge der (hellgrauen) Punkte in Abb. 1.1, für die die Summe ihrer Distanzen zu den beiden **Brennpunkten** F_1 und F_2 konstant ist. Das heißt, für jeden beliebigen Punkt M auf der Ellipse ist die Summe der gestrichelten Strecken $\overline{F_1M} + \overline{F_2M}$ konstant. Der Abstand a von 0 bis P wird **große Halbachse**, der Abstand b von 0 bis M_1 **kleine Halbachse** genannt. Wir berechnen die Summe der Strecken vom Punkt P zu den beiden Brennpunkten und erhalten

$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = \left(a - \overline{0F_2}\right) + \left(a + \overline{0F_1}\right) = 2a,$$

M. Ruhrländer, *Aufstieg zu den Einsteingleichungen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62546-0_1

da $\overline{0F_2} = \overline{0F_1}$ ist. Das heißt, die Summe der Strecken jedes Punktes auf der Ellipse zu den beiden Brennpunkten beträgt stets $2a$. Der Punkt M_1 hat den gleichen Abstand zu den beiden Brennpunkten, d.h., es gilt

$$\overline{M_1F_1} = \overline{M_1F_2} = a,$$

wie die gepunkteten Linien in Abb. 1.1 zeigen. Wenn a und b gleich groß sind, dann fallen die beiden Brennpunkte zusammen und die Ellipse geht in einen Kreis über. □

Bemerkung 1.2. **MG: (x, y)-Koordinatensystem**
In Abb. 1.1 taucht auch erstmals ein **Koordinatensystem** auf, das durch zwei senkrecht aufeinanderstehende Geraden, die man Achsen nennt, charakterisiert. wird.

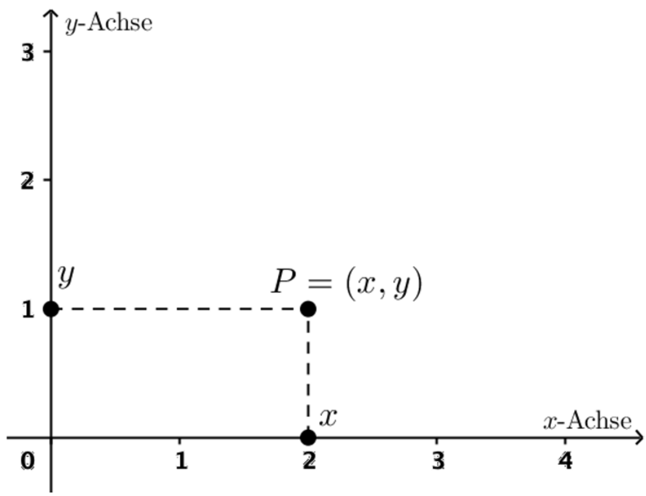

Abbildung 1.2.: Punkt in (x, y)-Ebene

Die x-Achse liegt horizontal und zeigt nach rechts (was durch einen Pfeil angedeutet wird), die y-Achse liegt vertikal und zeigt nach oben. Koordinatensysteme spielen bei unseren weiteren Ausführungen eine große Rolle. Erst sie gestatten es, zahlenmäßige Berechnungen z.B. zur Lage eines Punktes durchzuführen. Dazu stelle man sich vor, dass die x- und y-Achse in Einheiten (z.B. km) unterteilt sind, sodass man nach Festlegung des Nullpunktes (dort, wo sich die beiden Achsen schneiden) jeden anderen Punkt $P = (x, y)$ der (x, y)-Ebene (in unserem Beispiel die Umlaufebene des Planeten) durch seine Koordinaten, das sind die **Projektionen** (gestrichelte Linien in Abb. 1.2) auf die x- bzw.