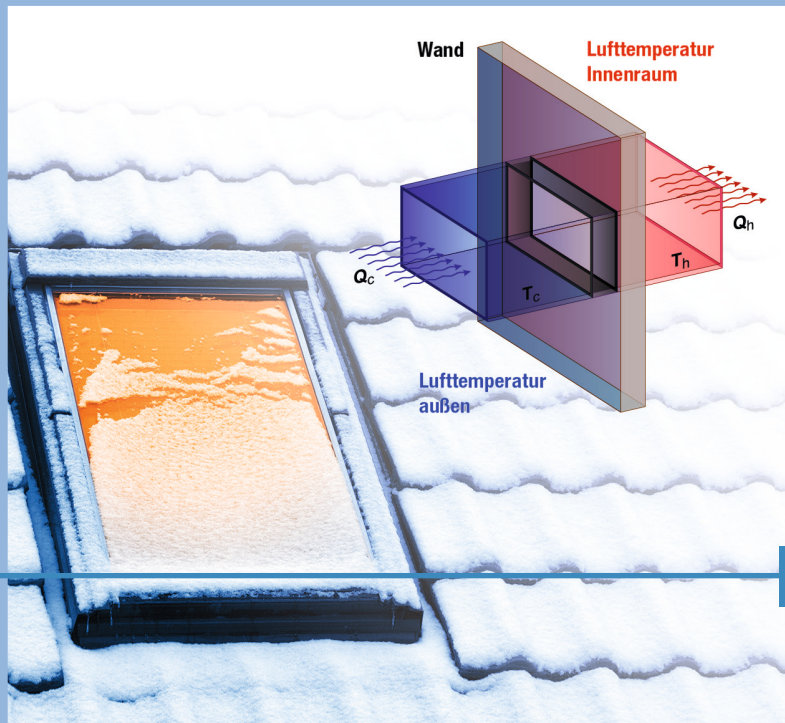


Rhena Krawietz  
Wilfried Heimke



# Physik im Bauwesen

Ein einführendes Lehrbuch mit Beispielen



2., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER





#### **Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

**plus-kpq50-hg3m2**

**[plus.hanser-fachbuch.de](http://plus.hanser-fachbuch.de)**



#### **Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Rhena Krawietz

Wilfried Heimke

# Physik im Bauwesen

Ein einführendes Lehrbuch mit Beispielen

2., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER

## Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Rhena Krawietz  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH)

Prof. Dr. Wilfried Heimke  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH)



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelbild: © shutterstock.com/Kletr und Fouad A. Saad

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Satz: Rhena Krawietz

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46487-2

E-Book-ISBN 978-3-446-46682-1

# Vorwort

Die „Physik im Bauwesen“ umfasst zum einen physikalische Grundgesetze, deren bautechnische Anwendungen in technischen Disziplinen ausführlich behandelt werden. Zum anderen werden bauspezifische Teilgebiete detaillierter dargestellt, um den (zukünftigen) Bauingenieur und Architekten zur Anwendung naturwissenschaftlichen Grundwissens im Fachgebiet „Bauphysik“ zu befähigen.

In seinem ersten Teil stellt das vorliegende Lehrbuch deshalb die physikalischen Grundgesetze für das Bauwesen in der Form eines Kompendiums systematisch dar. Die Teilgebiete Mechanik, Felder, Schwingungen und Wellen, Thermodynamik, Strahlung und Materie wurden dabei so ausgewählt und durch einen Abschnitt Fehlerrechnung bei physikalischen Experimenten ergänzt, dass sie auch von Studierenden anderer ingenieurtechnischer Studienrichtungen genutzt werden können. In seinem zweiten Teil werden die Gesetze der Bauphysik ausführlich behandelt. Die für den Bauingenieur und Architekten wichtigen Phänomene werden hier nicht nur beschrieben, sondern deren Gemeinsamkeiten und Verallgemeinerungsmöglichkeiten durch die Aufdeckung der physikalischen, logischen Struktur gezeigt. Dabei kann die „Physik im Bauwesen“ kein Ersatz für die in der Baukonstruktionslehre zu behandelnden bauphysikalischen Forderungen und deren Realisierung sein; sie soll vielmehr dem Bauingenieur und Architekten helfen, die physikalischen Grundregeln in seinem Fach fortdauernd anzuwenden und damit zu seiner Disponibilität beitragen.

Die physikalischen Phänomene werden weitgehend unabhängig von bestehenden Normenwerken (die sich in einer fortschreitenden Entwicklung befinden) dargestellt, für die Anwendung in der Praxis ist aber deren Kenntnis zusätzlich erforderlich. Den mittlerweile klassischen Gebieten der Bauphysik (Wärme, Feuchte, Schall, Licht und Brand) wurden die Kapitel Elektrizität und Materialprüfung hinzugefügt, um die Grundkenntnisse auf wichtige Teilgebiete, mit denen der Bauingenieur und Architekt in Berührung kommt, auszudehnen.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die die Autoren an der Hochschule für Technik und Wirtschaft

Dresden für Architekten und Bauingenieure gehalten haben bzw. halten. Es wendet sich deshalb an Studierende dieser Grundstudienrichtungen. Darüber hinaus kann es in der Praxis tätigen Bauingenieuren und Architekten als Nachschlagewerk dienen. Die Beschreibungen von Demonstrations-Experimenten, Aufgaben am Ende jedes Abschnitts (mit ausführlichen Lösungen im Anhang) und eingefügte Anwendungsbeispiele entsprechen dem Lehrbuchcharakter. Eine (innerhalb der Abschnitte fortlaufende) Nummerierung wichtiger Formeln und Tabellen, die Hervorhebung der Sachwörter sowie ein Verzeichnis dieser Sachwörter und der verwendeten Formelzeichen sollen das Nachschlagen erleichtern.

Beim Leser werden Kenntnisse aus den Fächern Mathematik und Physik, wie sie der Hochschulreife der allgemeinbildenden Schule entsprechen, vorausgesetzt. Bei der Darstellung der Formeln für technische Berechnungsverfahren wurde bewusst nicht auf eine Herleitung verzichtet, um dabei auch typische Methoden der physikalischen Erkenntnisgewinnung demonstrieren zu können und gleichzeitig die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit zu zeigen. Beim informatorischen Lesen können diese Ableitungen übergangen werden; die Standardformeln lassen sich auch mit geringem mathematischen Aufwand anwenden. Die verwendeten Formelzeichen entsprechen weitgehend Beispielen aus der weiterführenden Literatur (einschl. Normen und Nachschlagewerke). Sie bezeichnen ausnahmslos physikalische Größen, deren SI-Einheiten jeweils beim erstmaligen Auftauchen im Text gesondert angegeben sind.

Bei der technischen Fertigstellung des satzfertigen Manuskripts leisteten Frau Annett Lossau, Frau Nicole Baude sowie die Herren Dipl.-Ing. (FH) Michael Starke, Dipl.-Ing. (FH) Maik Rentzsch und Fritz Thomas wertvolle Hilfe. Ihnen gebührt der herzliche Dank der Autoren ebenso wie dem Verlag und insbesondere Frau Christine Fritzsch, Frau Franziska Kaufmann und Frau Heidi Bornemann.

Dresden, Sommer 2007

Wilfried Heimke,  
Rhena Krawietz

## Vorwort zur 2. Auflage

Seit dem Erscheinen von „Physik im Bauwesen“ wurde dieses Lehrbuch u. a. an der Hochschule für Technik und Wirtschaft in Dresden in den Studiengängen Bauingenieurwesen, Architektur (bis 2014) sowie Wirtschaftsingenieurwesen intensiv genutzt.

Die seitdem erfolgten neuen Entwicklungen auf dem Gebiet der Bauphysik und auch veränderte Lernmethoden der Studierenden erforderten sowohl eine inhaltliche Überarbeitung als auch methodische Veränderungen.

Um die Verbindung zwischen den physikalischen Grundlagen und den bauphysikalischen Anwendungen deutlicher aufzuzeigen, wurde die bisherige Trennung aufgehoben.

So sind jetzt im Kapitel „Wärmetransport und Wärmeschutz von Gebäuden“ die thermodynamischen und fluidmechanischen Grundlagen sowie die Betrachtungen zu elektromagnetischen Wellen und Strahlungsgesetzen mit der bauphysikalischen Betrachtungsweise von Wärmetransportvorgängen sowie mit den Berechnungen von Energiebilanzen für Gebäude vereint.

Das Kapitel „Feuchtigkeitstransport und Feuchteschutz von Gebäuden“ beginnt ebenfalls mit thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten, insbesondere zur Theorie des idealen Gases, und leitet davon ausgehend über zu Wasserdampftransportprozessen und daraus abzuleitenden Erfordernissen des Tauwasserschutzes.

Da mechanische Schwingungen von Bauteilen einerseits in unmittelbarem Zusammenhang mit der Ausbreitung von Schall und der Schalldämmung stehen, andererseits aber von genereller Bedeutung im Bauwesen sind, enthält das Kapitel „Schallausbreitung und Schalldämmung“ eine Einführung in die Physik von Schwingungen und Wellen. Daraus abgeleitet werden dann die Besonderheiten von Schall und deren Auswirkungen auf den baulichen Lärmschutz.

Die bauphysikalische Praxis besteht insbesondere auch aus experimentellen Prüfungen. Im Kapitel „Einführung“ befinden sich deshalb neben der Erläuterung der allgemeingültigen physikalischen Symbolik Ausführungen zur Fehlerrechnung.

Ohne direkten bauphysikalischen Bezug wurde das Kapitel „Grundlagen der Mechanik“ belassen, da es zum ingenieurwissenschaftlichen Grundwissen gehört und in allen vorgenannten bauphysikalischen Gebieten benötigt wird.

Neben den „klassischen“ Themen der Bauphysik (Wärme, Feuchte, Schall) spielt auch die „Elektrodynamik im Bauwesen“ eine Rolle. In diesem Kapitel wird wiederum vom Grundwissen zu konkreten Anwendungen wie z. B. dem Blitzschutz übergeleitet.

Besonders an auf dem Gebiet der Architektur Lernende und Tätige richtet sich das Kapitel „Optik und Beleuchtung“, in welchem Grundlagen der Strahlen- und Wellenoptik sowie damit in Zusammenhang stehende ingenieurwissenschaftliche Disziplinen wie Beleuchtungstechnik, Tageslicht und Farben erläutert werden.

In den letzten Jahren stärker in den Fokus gerückt ist die radioaktive Belastung von Gebäuden, hauptsächlich durch Radon. Dazu befinden sich Informationen im Kapitel „Strahlung und Bauwerke“.

Zu den bauphysikalischen Themen im weiteren Sinne gehört der „Brandschutz“, zu dessen baulichen Aspekten eine Einführung gegeben wird.

Viele bauphysikalische Nachweise sind in Normen geregelt, welche in der vorliegenden Neuauflage auch Eingang gefunden haben. Zwar unterliegen diese einem ständigen Wandel, ausgehend von den zitierten Normen können aber jederzeit die aktuell gültigen Ausgaben ermittelt werden.

Viele Abschnitte des Lehrbuches enthalten Übungsaufgaben. Auf **plus.hanser-fachbuch.de** finden Sie die **Lösungen der Aufgaben**.

Die Autoren freuen sich sehr, dass der Hanser-Verlag das neue Buchprojekt ermöglicht hat und danken Herrn Frank Katzenmayer, Frau Christina Kubiak, Frau Anne Kurth und Frau Carina Ries herzlich für die gute Zusammenarbeit und freundliche Unterstützung.

Dresden, Herbst 2020

Rhena Krawietz



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>13</b>
1.1	Physik und Bauphysik	13
1.2	Physikalische Größen	13
1.2.1	Symbolik	13
1.2.2	Maßeinheiten	14
1.2.3	Größen- und Zahlenwertgleichungen	16
1.3	Fehlerrechnung	16
1.3.1	Fehlerarten	16
1.3.2	Fehler einer Messreihe	17
1.3.3	Fehlerfortpflanzung	18
1.3.4	Lineare Regression (Ausgleichsgerade)	20
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Mechanik</b>	<b>23</b>
2.1	Kinematik und Dynamik	23
2.1.1	Punktmasse, starrer und elastischer Körper	23
2.1.2	Eindimensionale Bewegung	24
2.1.3	Bewegung im Raum	25
2.1.4	Newtonsche Axiome	27
2.1.5	Arbeit, Leistung und Energie	30
2.2	Erhaltungssätze	32
2.2.1	Impulssatz	32
2.2.2	Energiesatz	32
2.3	Bewegte Bezugssysteme	33
2.3.1	Inertialsystem	33
2.3.2	Translatorisch beschleunigte Bezugssysteme	33
2.3.3	Gleichförmig rotierendes Bezugssystem	34
2.4	Aufbau der Stoffe	35
2.4.1	Atome, Moleküle, Ionen	35
2.4.2	Bindungskräfte und -arten, Aggregatzustände	37
2.4.3	Kontinuum	38
2.5	Feste Körper	41
2.5.1	Starrer Körper	41
2.5.2	Kräfte am starren Körper	41
2.5.3	Statik	43
2.5.4	Starrer Rotator	45
2.5.5	Äußere Reibung	46
2.5.6	Elastische Stoffe	47
2.6	Flüssigkeiten und Gase	50
2.6.1	Kennzeichen der Flüssigkeiten und Gase	50
2.6.2	Druck in Flüssigkeiten und Gasen	50
2.6.3	Flüssigkeiten und Gase im Schwerfeld	51

<b>3</b>	<b>Wärmetransport und Wärmeschutz von Gebäuden .....</b>	<b>53</b>
3.1	Temperatur und Wärmemenge .....	53
3.1.1	Temperaturskalen .....	53
3.1.2	Thermische Ausdehnung .....	53
3.1.3	Temperaturmessung .....	54
3.1.4	Wärmekapazität .....	56
3.2	Temperaturausgleich.....	58
3.2.1	Nullter Hauptsatz der Thermodynamik .....	58
3.2.2	Arten des Wärmetransportes.....	58
3.2.3	Wärmestrom und Wärmestromdichte .....	59
3.3	Wärmeleitung .....	59
3.3.1	Stationärer Wärmestrom .....	59
3.3.2	Messverfahren für die Wärmeleitfähigkeit .....	61
3.3.3	Wärmedurchlass .....	61
3.3.4	Wärmeübergang .....	63
3.3.5	Wärmedurchgang.....	63
3.3.6	Temperaturverlauf in einer Wand .....	64
3.3.7	Komplexe Bauteile .....	66
3.3.8	Wärmebrücken.....	68
3.3.9	Wärmediffusion .....	70
3.3.10	Temperaturwellen.....	72
3.3.11	Kurzzeitige Wärmeableitung.....	76
3.4	Wärmekonvektion.....	78
3.4.1	Bewegte Flüssigkeiten und Gase .....	78
3.4.2	Luftdichtheit und Lüftung von Gebäuden .....	81
3.4.3	Konvektionsstromdichte .....	83
3.4.4	Lüftungswärmeverlust .....	85
3.5	Wärmestrahlung .....	85
3.5.1	Energietransport durch elektromagnetische Wellen .....	85
3.5.2	Strahlungsgesetze.....	86
3.5.3	Strahlungsabsorption, -reflexion und -transmission.....	87
3.5.4	Solare Wärmegewinne .....	90
3.6	Energieberechnungen .....	92
3.6.1	Energieeinsparverordnung .....	92
3.6.2	Berechnungen des Nutzenergiebedarfs für Heizen und Kühlen nach DIN V 18599-2 .....	95
3.6.3	Mindestwärmeschutz.....	100
3.6.4	Sommerlicher Wärmeschutz .....	101
3.6.5	Energieausweise .....	101
<b>4</b>	<b>Feuchtigkeitstransport .....</b>	<b>103</b>
4.1	Das Phasendiagramm von Wasser .....	103
4.2	Zustandsänderungen von Gasen .....	105
4.2.1	Zustandsgrößen .....	105
4.2.2	Zustandsgleichungen .....	106
4.2.3	Thermodynamische Prozesse .....	107
4.3	Mechanismen des Wassertransportes in Baustoffen.....	109

4.4	Kapillarer Wassertransport .....	110
4.4.1	Oberflächenspannung .....	110
4.4.2	Kapillarität .....	111
4.4.3	Maßnahmen gegen kapillaren Wassertransport .....	112
4.5	Luftfeuchtigkeit .....	113
4.5.1	Absolute und relative Luftfeuchtigkeit .....	113
4.5.2	Taupunkt .....	116
4.5.3	Messverfahren für die Luftfeuchtigkeit .....	116
4.6	Wasserdampfdiffusion .....	117
4.6.1	Wasserdampfdiffusion in Luft .....	117
4.6.2	Wasserdampfdiffusion in Bauteilen .....	119
4.6.3	Wasserdampfdurchgang durch eine Wand .....	120
4.6.4	Maßnahmen zum Tauwasserschutz .....	125
<b>5</b>	<b>Schallausbreitung .....</b>	<b>126</b>
5.1	Schwingungen .....	126
5.1.1	Harmonische Schwingungen .....	126
5.1.2	Gedämpfte harmonische Schwingungen .....	127
5.1.3	Erzwungene harmonische Schwingungen .....	129
5.1.4	Überlagerung von Schwingungen .....	131
5.2	Wellen .....	133
5.2.1	Wellengleichung .....	133
5.2.2	Wellenarten .....	135
5.2.3	Reflexion, Brechung und Beugung .....	136
5.2.4	Stehende Wellen .....	137
5.2.5	Doppler-Effekt .....	139
5.2.6	Elektromagnetische Wellen .....	139
5.3	Schwingungen von Bauteilen .....	141
5.3.1	Eigenschwingungen homogener, einschaliger Bauteile .....	141
5.3.2	Eigenschwingungen mehrschaliger Bauteile .....	142
5.4	Schallwellen und Schallfeldgrößen .....	144
5.4.1	Wellengleichung von Schallwellen .....	144
5.4.2	Schallgeschwindigkeit .....	146
5.4.3	Schalldruck und Schallschnelle .....	146
5.4.4	Stehende Schallwellen .....	148
5.4.5	Klanganalyse .....	149
5.5	Schallpegel .....	150
5.5.1	Energie- und Stromdichte einer Welle .....	150
5.5.2	Schallstärke und Schallpegel .....	152
5.5.3	Überlagerung von Schallfeldern .....	153
5.6	Ultraschall .....	154
5.7	Physiologische Akustik .....	155
5.7.1	Hörfläche .....	155
5.7.2	Lautheit .....	156
5.7.3	Bewertete Schallpegel .....	157
5.7.4	Trägheit der Gehörempfindung .....	158

5.8	Ausbreitung von Schallwellen.....	159
5.8.1	Reflexion und Brechung .....	159
5.8.2	Beugung.....	160
5.8.3	Schallausbreitung im Freifeld, Entfernungsgesetz.....	161
5.9	Schallabsorption und Raumakustik .....	163
5.9.1	Schallabsorptionsgrad.....	163
5.9.2	Schallabsorber .....	164
5.9.3	Nachhall .....	166
5.10	Schalldämmung .....	170
5.10.1	Lärm.....	170
5.10.2	Verkehrslärm.....	170
5.10.3	Luftschalldämm-Maß.....	171
5.10.4	Messung der Luftschalldämmung.....	175
5.10.5	Trittschalldämmung.....	178
5.10.6	Anforderungen an die Schalldämmung .....	179
<b>6</b>	<b>Elektrodynamik im Bauwesen .....</b>	<b>181</b>
6.1	Felder.....	181
6.1.1	Feldstärke .....	181
6.1.2	Potenzial .....	181
6.2	Statisches elektrisches Feld.....	182
6.2.1	Elektrostatik.....	182
6.2.2	Elektrostatik der Metalle .....	184
6.2.3	Nichtleiter im elektrischen Feld.....	185
6.3	Stationärer elektrischer Strom.....	186
6.3.1	Gleichstrom in Metallen und Flüssigkeiten .....	186
6.3.2	Gesetze des Ladungstransportes.....	186
6.4	Statisches magnetisches Feld.....	188
6.4.1	Magnetostatik.....	188
6.4.2	Stoffe im Magnetfeld .....	189
6.4.3	Magnetische Wirkungen elektrischer Ströme .....	190
6.4.4	Kräfte im Magnetfeld .....	192
6.5	Instationäre Felder .....	192
6.5.1	Elektromagnetische Induktion .....	192
6.5.2	Wechselstrom .....	193
6.6	Blitzerscheinungen .....	194
6.6.1	Elektrostatische Grundlagen .....	194
6.6.2	Feldstärke und Entladungsmechanismus.....	196
6.6.3	Entladungsdauer und -strom, Blitzableiter.....	197
6.7	Elektrostatische Verfahren .....	198
6.7.1	Elektrofilter, elektrische Sortierung.....	198
6.7.2	Beschichtungsverfahren.....	199
6.8	Elektrosmose .....	200
6.8.1	Unipolare Stromleitung.....	200
6.8.2	Aktive und passive Elektrosmose.....	200
6.9	Elektrolytische Erscheinungen .....	201

6.9.1	Elektrolytische Verfahren.....	201
6.9.2	Dissoziation.....	201
6.9.3	Elektrochemisches Entsalzen.....	201
<b>7</b>	<b>Optik und Beleuchtung.....</b>	<b>202</b>
7.1	Strahlenoptik.....	202
7.2	Wellenoptik.....	205
7.3	Lichttechnische Grundbegriffe.....	207
7.3.1	Lichtstrom, Lichtstärke, Wirkungsgrad.....	207
7.3.2	Beleuchtungsstärke.....	209
7.3.3	Leuchtdichte, Leuchtdichtefaktor.....	210
7.3.4	Messung lichttechnischer Größen.....	211
7.4	Tageslicht.....	211
7.4.1	Natürliche Beleuchtung.....	211
7.4.2	Tageslichtquotient.....	212
7.5	Künstliches Licht.....	215
7.5.1	Lichterzeugung.....	215
7.5.2	Temperaturstrahler.....	215
7.5.3	Lumineszenzstrahler.....	216
7.6	Farben.....	220
7.6.1	Farbreize.....	220
7.6.2	Farbvalenzen.....	221
7.6.3	Farbempfindungen.....	227
<b>8</b>	<b>Strahlung und Bauwerke.....</b>	<b>229</b>
8.1	Strahlung und Materie.....	229
8.1.1	Quantelung der Energie.....	229
8.1.2	Induzierte Emission.....	230
8.1.3	Photo- und Compton-Effekt.....	231
8.1.4	Bremsstrahlung.....	232
8.1.5	Paarbildung.....	232
8.2	Radioaktivität.....	233
8.2.1	Instabile Kerne.....	233
8.2.2	Zerfallsgesetz.....	233
8.2.3	Radioaktive Belastung von Bauwerken.....	234
8.2.4	Radon und radongeschütztes Bauen.....	235
<b>9</b>	<b>Brandschutz.....</b>	<b>237</b>
9.1	Anforderungen.....	237
9.2	Brandverlauf.....	237
9.3	Brandverhalten.....	239
9.3.1	Stahlkonstruktionen.....	239
9.3.2	Betonkonstruktionen.....	240
9.3.3	Holzkonstruktionen.....	241
9.4	Nachweisverfahren.....	241

<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>242</b>
<b>Verzeichnis der Formelzeichen und wichtigen Konstanten.....</b>	<b>248</b>
<b>Sachwortverzeichnis.....</b>	<b>261</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Physik und Bauphysik

Die Physik ist eine **empirische** Wissenschaft. Sie beruht auf der Beobachtung der Natur und der von uns selbst geschaffenen Umwelt, zu welcher wir z. B. auch Baustellen, Ingenieurbauten und Gebäude mit ihrer Ausstattung zählen. Als Resultate physikalischer Forschung werden **Gesetzmäßigkeiten** im Verhalten der Untersuchungsobjekte formuliert, z. B. die Abhängigkeit der Durchbiegung eines Balkens von der auf ihn wirkenden Last. Die Darstellung dieser Gesetzmäßigkeiten erfolgt bevorzugt mathematisch durch die funktionale Verknüpfung physikalischer Größen, welche in unserem Beispiel die Durchbiegung und die Last beschreiben.

Die technischen Disziplinen des Bauwesens beruhen auf physikalischen Grundlagen. In Tabelle 1.1 sind einige Beispiele dafür angegeben.

Die Hauptgebiete der sogenannten **Bauphysik** befassen sich mit der Ausbreitung von Wärme, Feuchtigkeit und Schall in Bauwerken und leiten daraus Maßnahmen für effektiven **Wärme-, Feuchte- und Schallschutz** ab.

**Tabelle 1.1** Physikalische Grundlagen für wichtige Teilgebiete des Bauwesens

Gebiet des Bauwesens	Physikalische Grundlagen
Baumechanik	Mechanik starrer und deformierbarer Körper
Baustoffe	Festkörperphysik
Schallschutz	Akustik (mechanische Schwingungen und Wellen)
Beleuchtungstechnik	Optik (elektromagnetische Wellen)
Bauklimatik	Thermodynamik (Wärmetransport und Feuchtigkeitstransport)
Blitzschutz	Elektrostatik

Damit ist unter Bauphysik **angewandte Physik** zu verstehen, d.h. ein Wissensgebiet, in dem natur- und ingenieurwissenschaftliche Aspekte vereint werden.

Im weiteren Sinne gehören zur Bauphysik die Beleuchtungstechnik, elektrostatische und elektrokinetische Erscheinungen sowie der Brandschutz. Im Bild 1.1 sind die Verknüpfungen zwischen den physikalischen Grundlagen und den Teilgebieten der Bauphysik dargestellt.

Zahlreiche Kenngrößen und Berechnungsverfahren, z. B. Nachweisverfahren zur Energieeinsparung betreffend, haben Eingang in das deutsche, europäische und internationale Normenwerk gefunden und unterliegen ständiger Überarbeitung. In den folgenden Kapiteln wird darauf beispielhaft eingegangen.

## 1.2 Physikalische Größen

### 1.2.1 Symbolik

Eine **physikalische Größe** kennzeichnet eine Eigenschaft oder den Zustand eines Objektes, z. B. die Geschwindigkeit, mit der sich ein Baufahrzeug vorwärtsbewegt. Sie kann aber auch Prozesse beschreiben, die mit einzelnen Objekten geschehen. Ein Beispiel dafür ist die mechanische Arbeit, welche ein Kran beim Anheben eines Betonteils verrichtet.

Jede physikalische Größe wird mit einem **Symbol** bezeichnet, z. B.  $\ell$  für die Länge eines Bausteins. Sie wird als Produkt einer **Maßzahl** mit einer **Maßeinheit** dargestellt:

$$\ell = \{\ell\} \cdot [\ell]. \quad (1.1)$$

$\{\ell\}$  bedeutet die Maßzahl und  $[\ell]$  die Maßeinheit von  $\ell$ .

#### Beispiel 1.1 Steinhöhe

In der Baukonstruktion werden Baurichtmaße verwendet, z. B. für die Steinhöhe  $h$ :

$$h = 25 \text{ cm, d. h. } \{h\} = 25 \text{ und } [h] = \text{cm.}$$

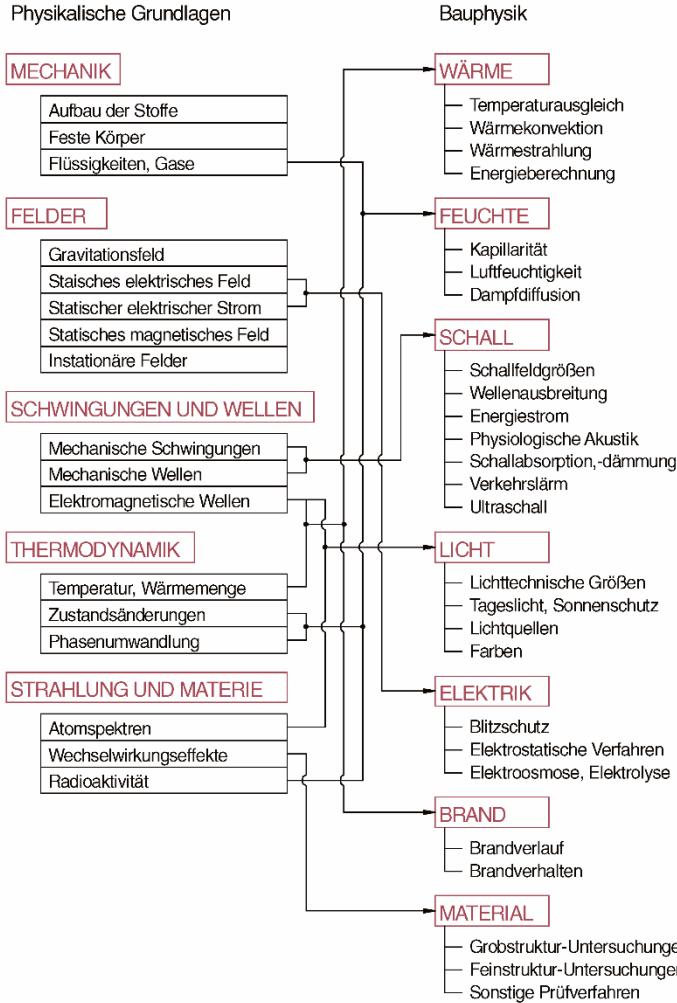


Bild 1.1 Beziehungen Grundlagen ↔ Bauphysik

1.2.2 Maßeinheiten

Die Physik ist eine messende Wissenschaft. **Messen** bedeutet, eine Größe mit einer Maßeinheit zu vergleichen. Die für uns verbindlichen Maßeinheiten sind im internationalen Einheitensystem (Système International d' Unité - **SI** [1]) festgelegt. Insgesamt sieben **Basiseinheiten** (siehe Tabelle 1.2) werden über Naturkonstanten, z. B. die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c_{L,0}$ , definiert.

Die Zahlenwerte der Naturkonstanten sind festgelegt, z. B.  $c_{L,0} = 299792458 \text{ ms}^{-1}$ .

Tabelle 1.2 Basiseinheiten des SI-Systems

Größe	Maßeinheit	Symbol der Maßeinheit
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd



Die SI-Einheiten dürfen mit **Vorsätzen** versehen werden, welche der Multiplikation der Einheit mit einer Zehnerpotenz entsprechen (Tabelle 1.3).

**Tabelle 1.3** Vorsätze für SI-Einheiten (Auswahl)

Name	Symbol	Potenz	Beispiel
Femto	f	$10^{-15}$	fs
Pico	p	$10^{-12}$	ps
Nano	n	$10^{-9}$	nm
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$	$\mu\text{m}$
Milli	m	$10^{-3}$	mm
Zenti	c	$10^{-2}$	cm
Dezi	d	$10^{-1}$	dm
Deka	da	$10^1$	daPa
Hekto	h	$10^2$	hPa
Kilo	k	$10^3$	km
Mega	M	$10^6$	MPa
Giga	G	$10^9$	GPa
Tera	T	$10^{12}$	TByte

**Beispiel 1.2** Einheitenvorsätze

$$8 \text{ nm} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ m}, \quad 2 \mu\text{m} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$275 \text{ MPa} = 275 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 2,75 \cdot 10^8 \text{ Pa}.$$

Darüber hinaus sind noch einige Einheiten zulässig, die nicht zum SI-System gehören, aber gebräuchlich sind, z. B. Minute und Stunde für die Zeit oder  $^{\circ}\text{C}$  für Temperaturangaben in der Celsius-Skala (Tabelle 1.4).

**Tabelle 1.4** SI-fremde, aber zulässige Einheiten (Auswahl)

Größe	Maßeinheit	Symbol und Umrechnung
Volumen	Liter	l $1\text{l} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Masse	Tonne	t $1\text{t} = 1000 \text{ kg}$
Zeit	Minute	min $1\text{min} = 60 \text{ s}$
	Stunde	h $1\text{h} = 3600 \text{ s}$
ebener Winkel	Grad	$^{\circ}$ $1^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \text{ rad}$
Temperatur	Grad Celsius	$^{\circ}\text{C}$ $1^{\circ}\text{C} = 1\text{K}$
Energie	Elektronenvolt	eV $1\text{eV} = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
	Kilowattstunde	kWh $1\text{kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$
Pegel	Neper	Np
	Dezibel	dB $1\text{dB} = 0,05 \cdot \ln 10 \text{ Np}$

Aus den Basiseinheiten werden alle anderen Einheiten abgeleitet. Eine Übersicht über die wichtigsten **abgeleiteten** Einheiten gibt Tabelle 1.5.

**Tabelle 1.5** Wichtige zusammengesetzte Einheiten des SI-Systems

Größe	Maßeinheit	Symbol der Maßeinheit	Beziehung zu den Basiseinheiten
ebener Winkel	Radian	rad	$\text{rad} = \text{m m}^{-1}$
Raumwinkel	Steradian	sr	$\text{sr} = \text{m}^2 \text{ m}^{-2}$
Frequenz	Hertz	Hz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
Kraft	Newton	N	$\text{N} = \text{kgms}^{-2}$
Druck, mechanische Spannung	Pascal	Pa	$\text{Pa} = \text{Nm}^{-2} = \text{kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Energie, Arbeit	Joule	J	$\text{J} = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{kgm}^2 \text{ s}^{-2}$
Leistung	Watt	W	$\text{W} = \text{Js}^{-1} = \text{kgm}^2 \text{ s}^{-3}$
Ladung	Coulomb	C	$\text{C} = \text{As}$
elektrische Spannung	Volt	V	$\text{V} = \text{W A}^{-1} = \text{kgm}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
elektrische Kapazität	Farad	F	$\text{F} = \text{As V}^{-1} = \text{A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-2}$
elektrischer Widerstand	Ohm	$\Omega$	$\Omega = \text{V A}^{-1} = \text{kgm}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2}$
Lichtstrom	Lumen	lm	$\text{lm} = \text{cdsr}$
Beleuchtungsstärke	Lux	lx	$\text{lx} = \text{lm m}^{-2} = \text{cd sr m}^{-2}$

### 1.2.3 Größen- und Zahlenwertgleichungen

**Größengleichungen** sind mathematische Beziehungen zwischen physikalischen Größen, in denen für jedes Symbol entsprechend Gleichung (1.1) Zahlenwert und Einheit einzusetzen sind. Auf beiden Seiten der Größengleichung müssen dann die Zahlenwerte und die Einheiten übereinstimmen. Deshalb ermöglicht der Vergleich der Einheiten, grobe Fehler bei der Aufstellung einer Gleichung zu finden.

#### Beispiel 1.3 Größengleichung

Mittlere Geschwindigkeit einer Planierdraupe auf einem 200 m langen Straßenabschnitt:

$$\bar{v} = \frac{x}{t} = \frac{200 \text{ m}}{144 \text{ s}} = 1,39 \cdot 3,6 \text{ kmh}^{-1} = 5,0 \text{ kmh}^{-1}.$$

Die Schreibweise  $x/\text{m} = 200$ ,  $t/\text{s} = 144$ ,  $\bar{v}/\text{kmh}^{-1} = 5,0$  eignet sich für Angaben im Kopf von Tabellen, z. B. in Messprotokollen oder an den Achsen graphischer Darstellungen.

Für praktische Zwecke, z. B. bei Aufnahme von Messreihen, kann es nützlich sein, eine Größengleichung für eine bestimmte Einheitenkombination zuzuschneiden und so in eine **Zahlenwertgleichung** zu überführen, in der nur Zahlenwerte miteinander verknüpft sind. Bei Verwendung von SI-fremden Einheiten kann dabei ein Zahlenfaktor verschieden von 1 entstehen, welcher aus der Umrechnung der Einheiten ineinander resultiert.

#### Beispiel 1.4 Zahlenwertgleichung

$$\text{Zahlenwertgleichung } \frac{\bar{v}}{\text{kmh}^{-1}} = 3,6 \cdot \frac{x/\text{m}}{t/\text{s}}$$

## 1.3 Fehlerrechnung

### 1.3.1 Fehlerarten

Werden physikalische Größen gemessen, z. B. die Länge eines Mauervorsprungs, oder aus gemessenen Werten errechnet, z. B. die Wärmeleitfähigkeit eines Baustoffes, muss die Genauigkeit des Endergebnisses immer durch Angabe eines Fehlers gekennzeichnet werden. Die Größenordnung des Fehlers bestimmt dabei,

welche Dezimalstellen des Ergebnisses noch sinnvoll angegeben werden können.

#### Beispiel 1.5 Länge eines Mauervorsprungs

Die gemessene Länge eines Mauervorsprungs beträgt  $\ell = (63,63 \pm 0,08) \text{ cm}$ .

Das bedeutet  $63,55 \text{ cm} \leq \ell \leq 63,71 \text{ cm}$ .

Aufgabe der Fehlerrechnung ist es, aus den streuenden Ergebnissen wiederholter Messungen einer physikalischen Größe einen Bestwert zu ermitteln und die Abweichung dieses Bestwertes vom wahren Wert, auch Erwartungswert genannt, zu schätzen. Dabei bleiben **grobe Fehler**, die auf eine Unachtsamkeit beim Experimentieren zurückzuführen, leicht erkennbar und korrigierbar sind, unberücksichtigt.

**Systematische Fehler** ( $\Delta x_{\text{sys}}$ ) werden durch Ungenauigkeiten der Messinstrumente oder Messverfahren hervorgerufen. Sie sind an der asymmetrischen Häufung von Messwerten bei Wiederholungsmessungen erkennbar, d. h. wenn z. B. größere Messwerte häufiger auftreten als kleinere.

**Zufällige oder statistische Fehler** ( $\Delta x$ ) sind vom Experimentator (d. h. von der Leistungsfähigkeit seiner Sinnesorgane und von seiner Geschicklichkeit) und den augenblicklichen Umwelteinflüssen (Erschütterungen, Temperaturschwankungen u. Ä.) abhängige Abweichungen. Die Messwerte zeigen in diesem Fall eine symmetrische Häufung um einen häufigsten Wert, den Bestwert.

Systematische und zufällige Fehler können durch Addition in einem **Gesamtfehler**  $\Delta x_{\text{ges}}$  berücksichtigt werden:

$$\Delta x_{\text{ges}} = |\Delta x_{\text{sys}}| + |\Delta x|. \quad (1.2)$$

Die Ermittlung des Bestwertes einer Messreihe und dessen Abweichung vom Erwartungswert sind der eigentliche Gegenstand der Fehlerrechnung [2]. Hierfür wird eine auf C. F. Gauss zurückgehende Fehlertheorie (einschließlich der Symbolik) verwendet.

**Beispiel 1.6 Gesamtfehler**

Wenn der systematische Fehler des Längenmessgerätes aus Beispiel 1.5  $\Delta l_{\text{sys}} = 0,05 \text{ cm}$  und der zufällige Fehler der Messreihe  $\Delta l = 0,03 \text{ cm}$  beträgt, ergibt sich für den Gesamtfehler  $\Delta l_{\text{ges}}$  dann:

$$\Delta l_{\text{ges}} = |\Delta l_{\text{sys}}| + |\Delta l|, \quad \Delta l_{\text{ges}} = 0,08 \text{ cm}.$$

**1.3.2 Fehler einer Messreihe**

Zur Berechnung des Bestwertes (**Mittelwert**) und seiner **Fehler** aus einer Reihe wiederholter Einzelmessungen werden die in Tabelle 1.6 angegebenen Beziehungen benutzt. Das Beispiel 1.7 zeigt 10 Messwerte einer Längenmessung, welche mit einem Stahlbandmaß an einem Mauervorsprung ausgeführt wurde, sowie die Berechnung des Mittelwertes (1.4), der scheinbaren Fehler (1.5) und der minimalen Fehlersumme (1.6) in tabellarischer Form. Neben den Standardabweichungen der Einzelmessungen (1.7) und des Mittelwertes (1.8) sind der relative bzw. prozentuale Fehler (1.9) und das vollständige Messergebnis angegeben.

In Bild 1.2 sind über den Einzelmesswerten  $x$  aus Beispiel 1.7 deren Häufigkeiten  $\varphi(x)$  balkenförmig aufgetragen.

Wird die Anzahl der Messungen stark erhöht ( $n > 100$ ), dann geht die Häufigkeitsverteilung in eine glockenförmige **Normalverteilung** der Messwerte über, deren Werte der Verteilungsfunktion nach C. F. Gauss

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.3)$$

entsprechen, mit  $\mu = \bar{x}$  als Erwartungswert und  $\sigma = \Delta x$  als Standardabweichung.

In Bild 1.2 ist die „Glockenkurve“ für die Werte aus Beispiel 1.7 eingetragen.

Integriert man (1.3) in den Grenzen  $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$ , so erhält man  $\Phi(x) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi(x) dx = 0,683$  als **statistische**

**Sicherheit** dafür, dass sich der Messwert innerhalb der Standardabweichung befindet (schraffierter Bereich in Bild 1.2). Die Wahrscheinlichkeit von 68,3 % ist eine für physikalische Messungen übliche Sicherheit.

**Tabelle 1.6** Fehlerrechnung für eine Messreihe aus  $n$  Einzelmesswerten

Kennwert	Beziehung	Symbolik nach Gauss
arithmetisches Mittel (Bestwert)	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (1.4)	$\bar{x} = \frac{1}{n} [x]$
scheinbarer Fehler des Messwertes $x_i$	$v_i = x_i - \bar{x}$ mit $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ (1.5)	$[v] = 0$
minimale Fehlersumme	$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \text{Min!}$ (1.6)	$[vv] = \text{Min!}$
mittlerer Fehler der Einzelmessung (Standardabweichung des Messwertes)	$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \equiv \sigma_{n-1}$ (1.7)	$\Delta x = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$
mittlerer Fehler des Mittelwertes (Standardabweichung des arithmetischen Mittels)	$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} \equiv \sigma_n$ (1.8)	$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$
relativer oder prozentualer Fehler	$\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}$ oder $\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$ (1.9)	
Zufallskomponente der Messunsicherheit ( $t$ -Faktor nach Gosset)	$\overline{\Delta x_z} = t \cdot \overline{\Delta x}$ (1.10)	



## Beispiel 1.7 Längenmessung (Ermittlung des zufälligen Fehlers für Beispiel 1.5)

$n$	$x / \text{cm}$	$10^2 \cdot v / \text{cm}$		$10^4 \cdot vv / \text{cm}^2$ nach (1.6)
		nach (1.5)	nach (1.6)	
		-	+	
1	63,6	3		9
2	63,7		7	49
3	63,5	13		169
4	63,6	3		9
5	63,6	3		9
6	63,8		17	289
7	63,6	3		9
8	63,5	13		169
9	63,7		7	49
10	63,7		7	49
[ ]	636,3	38	38	810

$$\bar{x} = 63,63 \text{ cm} \quad \text{nach (1.4)}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{0,0810}{9}} \text{ cm} = 0,095 \text{ cm} \quad \text{nach (1.7)}$$

$$\overline{\Delta x} = \frac{0,095 \text{ cm}}{\sqrt{10}} = 0,03 \text{ cm} \quad \text{nach (1.8)}$$

$$\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} = 4,7 \cdot 10^{-4} \approx 0,5 \cdot 10^{-3} \approx 0,5 \text{ ‰} \quad \text{nach (1.9)}$$

Ergebnis:  $\bar{x} = (63,63 \pm 0,03) \text{ cm}$

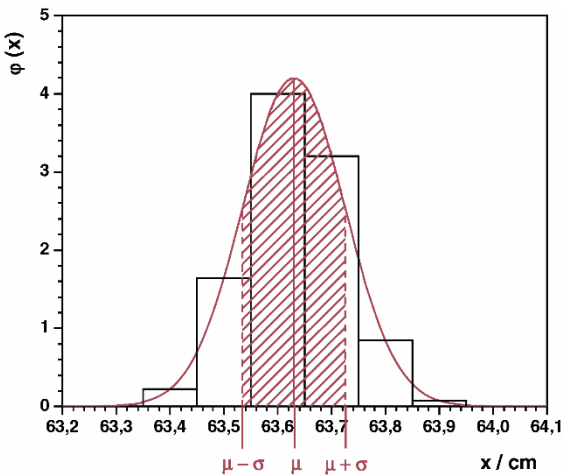


Bild 1.2 Häufigkeitsverteilung einer Messreihe

Wenn allerdings die Zahl der Wiederholungsmessungen klein ist ( $n < 10$ ) wird eine Normalverteilung der Messwerte entsprechend Bild 1.2 nicht erreicht (vgl. „Glockenkurve“ und Balkendiagramm). Die Vertrauensgrenzen für den Erwartungswert werden dann abhängig von der Anzahl der Messungen und der Standardabweichung.

W. S. Gosset hat für die Sicherheit von 68,3% einen Korrekturfaktor (**t-Faktor**, siehe Tabelle 1.7) in Abhängigkeit

von der Anzahl  $n$  der Messungen angegeben. Die statistische Messunsicherheit berechnet sich in diesen Fällen nach Gleichung (1.10) aus Tabelle 1.6.

**Tabelle 1.7** Abhängigkeit des t-Faktors von der Anzahl der Messwerte  $n$  (Wahrscheinlichkeit 68%)

$n$	1	2	3	4	5
$t_{68}$	1,84	1,32	1,20	1,15	1,11
$n$	7	10	20	50	> 100
$t_{68}$	1,08	1,06	1,03	1,01	1,00

## Beispiel 1.8

Für Beispiel 1.7 ergibt sich somit:

$$\overline{\Delta x_z} = 1,06 \cdot \overline{\Delta x} = 0,032 \text{ cm.}$$

## 1.3.3 Fehlerfortpflanzung

Wird eine physikalische Größe nicht direkt gemessen, sondern indirekt aus Messungen von Teilgrößen bestimmt, dann lassen sich mit dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz** nach Gauss aus den bekannten Kennwerten der Teilgrößen (Mittelwerte, Standardabweichungen) der wahrscheinlichste Wert (1.11) der indirekt bestimmten Größe und seine Standardabweichung (1.14) entsprechend Tabelle 1.8 ermitteln.

Tabelle 1.8 Fehlerfortpflanzung

Kennwert	Berechnung
wahrscheinlichster Wert der indirekt gemessenen Größe $z$	$\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \dots)$ (1.11)
absoluter Größtfehler von $z$	$\Delta z = \left  \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x \right  + \left  \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y \right  + \left  \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \Delta w \right  + \dots$ (1.12)
relativer Größtfehler von $z$ , wenn $z = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot w^\gamma \dots$ (Potenzprodukt)	$\frac{\Delta z}{z} = \left  \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x} \right  + \left  \beta \cdot \frac{\Delta y}{y} \right  + \left  \gamma \cdot \frac{\Delta w}{w} \right  + \dots$ (1.13)
Standardabweichung von $z$ bei indirekter Messung	$\overline{\Delta z} = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 (\Delta w)^2 + \dots}$ (1.14)

Häufig erfolgt eine Fehlerabschätzung mit Hilfe des absoluten **Größtfehlers**, wobei für die Standardabweichungen der Teilgrößen entsprechend (1.14) aus Tabelle 1.8 auch geschätzte Fehler  $\Delta \bar{x}$ ,  $\Delta \bar{y} \dots$  eingesetzt werden können.

Die Standardabweichung berechnet man sinnvoll nur, wenn für die Teilgrößen Messreihen entsprechend Tabelle 1.6 vorliegen und die Fehlerfortpflanzung für eine große Zahl von Messwerten erfolgt.

### Beispiel 1.9 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  von Baustoffen kann im Plattengerät-Verfahren aus dem Wärmestrom  $\dot{Q}$  durch die Platte, deren geometrischen Abmessungen (Kantenlängen  $a$  und  $b$ , Plattendicke  $d$ ) und den Oberflächentemperaturen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  auf der Kalt- und Warmseite der Platte bestimmt werden:  $\lambda = \frac{\dot{Q} \cdot d}{a \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)}$ , vgl. (1.11).

Es wurden folgende Größen gemessen:  $\dot{Q} = (16,0 \pm 0,1) \text{ W}$ ,  $a = (500 \pm 1) \text{ mm}$ ,  $b = (495 \pm 1) \text{ mm}$ ,  $d = (80 \pm 1) \text{ mm}$ ,  $\theta_1 = 6,0 \text{ °C} \pm 0,1 \text{ K}$ ,  $\theta_2 = 15,0 \text{ °C} \pm 0,1 \text{ K}$ . Daraus erhält man entsprechend (1.11):

$$\lambda = \frac{\bar{\dot{Q}} \cdot \bar{d}}{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)} = \frac{16 \cdot 0,08}{0,5 \cdot 0,495 \cdot (15 - 6)} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} = 0,575 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Für den Größtfehler ergibt sich nach Gleichung (1.12) aus Tabelle 1.8:

$$\Delta \lambda = \left| \frac{d}{a \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \cdot \Delta \dot{Q} \right| + \left| \frac{\dot{Q}}{a \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \cdot \Delta d \right| + \left| -\frac{\dot{Q} \cdot d}{a^2 \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \cdot \Delta a \right| + \left| -\frac{\dot{Q} \cdot d}{a \cdot b^2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \cdot \Delta b \right| + \left| \frac{\dot{Q} \cdot d}{a \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)^2} \cdot \Delta \theta_1 \right| + \left| -\frac{\dot{Q} \cdot d}{a \cdot b \cdot (\theta_2 - \theta_1)^2} \cdot \Delta \theta_2 \right|,$$

$$\Delta \lambda = \left( \frac{0,08}{0,5 \cdot 0,495 \cdot 9} \cdot 0,1 + \frac{16}{0,5 \cdot 0,495 \cdot 9} \cdot 10^{-3} + \frac{16 \cdot 0,08}{0,5^2 \cdot 0,495 \cdot 9} \cdot 10^{-3} + \frac{16 \cdot 0,08}{0,5 \cdot 0,495^2 \cdot 9} \cdot 10^{-3} + 2 \cdot \frac{16 \cdot 0,08}{0,5 \cdot 0,495 \cdot 9^2} \cdot 0,1 \right) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$$= (3,59 + 7,18 + 1,15 + 1,16 + 12,77) \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$$= 25,85 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$$\Delta \lambda = 0,026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ bzw. } \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{0,026}{0,575} = 0,045 = 4,5 \text{ \%}.$$

Die Rechnung wird einfacher, wenn man  $D = |\theta_2 - \theta_1| = 9 \text{ K}$  mit  $\Delta D = |1 \cdot \Delta \theta_2| + |-1 \cdot \Delta \theta_1| = 0,2 \text{ K}$  setzt und für

$$\lambda = \frac{\dot{Q} \cdot d}{a \cdot b \cdot D} = 0,575 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ den relativen Fehler nach Gleichung (1.13) berechnet:}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \left| \frac{\Delta \dot{Q}}{\dot{Q}} \right| + \left| \frac{\Delta d}{d} \right| + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \frac{\Delta D}{D} \right| = (6,25 + 12,50 + 2,00 + 2,02 + 22,20) \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 44,97 \cdot 10^{-3} = 0,045 = 4,5 \% \text{ bzw. } \Delta \lambda = 0,045 \cdot \lambda = 0,026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Ergebnis:  $\lambda = (0,575 \pm 0,026) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

### 1.3.4 Lineare Regression (Ausgleichsgerade)

Existiert zwischen zwei Größen  $y$  und  $x$  ein linearer Zusammenhang oder lässt sich die Beziehung durch geeignete Umformung linearisieren, dann können durch Anwendung der linearen Regression die Parameter einer

Geraden, welche den (linearisierten) funktionalen Zusammenhang bestmöglich beschreibt, berechnet werden. Diese Gerade heißt **Ausgleichsgerade**.

Die Fehler der Geradenparameter können ebenfalls berechnet werden.

**Tabelle 1.9** Lineare Regression, Ausgleichsgerade

Kennwert	Beziehung	Symbolik nach Gauss
linearer Zusammenhang der Messwerte $x_i, y_i$ ( $\Delta x_i \ll \Delta y_i$ )	$y_i = a + b \cdot x_i$ (1.15)	
Ordinatenabschnitt der Ausgleichsgeraden	$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$ (1.16)	$a = \frac{[y][xx] - [x][xy]}{n[xx] - [x]^2}$
Anstieg der Ausgleichsgeraden	$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$ (1.17)	$b = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[xx] - [x]^2}$
Abweichung der Messpunkte von der Ausgleichsgeraden	$w_i = y_i - (a + b \cdot x_i)$ (1.18)	$w = y - (a + bx)$
Fehler des Ordinatenabschnittes	$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$ (1.19)	$\Delta a = \sqrt{\frac{[ww]}{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{[xx]}{n[xx] - [x]^2}}$
Fehler des Anstieges der Ausgleichsgeraden	$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$ (1.20)	$\Delta b = \sqrt{\frac{[ww]}{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n[xx] - [x]^2}}$

Die in Tabelle 1.9 angegebenen Beziehungen sind nach der Gauss'schen Fehlertheorie so gebildet, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den Messwerten für  $y$  und den entsprechenden Werten der Gerade ein Minimum ergeben, analog zu (1.6). Hierbei

wird allerdings vorausgesetzt, dass die Fehler  $\Delta x_i$  klein gegen die Fehler  $\Delta y_i$  und demzufolge vernachlässigbar sind. Für die Beziehungen in Tabelle 1.9 existieren z. B. in Taschenrechnern entsprechende Programme.

### Beispiel 1.10 Optische Durchlässigkeit

Bringt man in den Strahlengang vor einem Luxmeter nacheinander bis zu  $z=10$  Glasplatten ein, dann nimmt die mit einem Fotoelement gemessene Beleuchtungsstärke  $E$  von einem Startwert  $E_0$  ausgehend kontinuierlich ab. Für die optische Durchlässigkeit  $\mathcal{G}$  des Glases kann man schreiben  $E = E_0 \cdot \mathcal{G}^{2z}$  mit den Wertepaaren

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E/lx$	191	175	156	143	131	122	110	104	97	89	82

Linearisierung:  $\lg E = \lg E_0 + (2 \cdot \lg \mathcal{G}) \cdot z$   $y = a + b \cdot x$  vgl. (1.15). Für die Berechnung des Geradenanstiegs gemäß (1.17)  $b = 2 \cdot \lg \mathcal{G}$  eignet sich folgende Tabelle:

$x = z$	$y = \lg E$	$x^2$	$x \cdot y$	$a + b \cdot x$	$[y - (a + b \cdot x)]^2 \cdot 10^4$
0	2,2810	0	0	2,2705	0,3600
1	2,2430	1	2,2430	2,2343	0,7570
2	2,1931	4	4,3862	2,1981	0,2500
3	2,1553	9	6,4659	2,1619	0,4360
4	2,1173	16	8,4692	2,1257	0,7060
5	2,0864	25	10,4320	2,0895	0,0960
6	2,0414	36	12,2484	2,0533	1,4160
7	2,0170	49	14,1190	2,0171	0,0001
8	1,9868	64	15,8944	1,9809	0,3480
9	1,9494	81	17,5446	1,9447	0,2210
10	1,9138	100	19,1380	1,9085	0,2810

$n = 11, \sum_{i=1}^{11} x = 55, \left(\sum_{i=1}^{11} x\right)^2 = 3025$ 
 $\sum_{i=1}^{11} y = 22,9845$ 
 $\sum_{i=1}^{11} x^2 = 385$ 
 $\sum_{i=1}^{11} (x \cdot y) = 110,9407$ 
 $\sum_{i=1}^{11} w^2 = 4,871 \cdot 10^{-4}$

$$a = \frac{[y][xx] - [x][xy]}{n[xx] - [x]^2} = \frac{22,9845 \cdot 385 - 55 \cdot 110,9407}{1210} = \frac{2747,294}{1210}, \quad a = 2,2705$$

$$b = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[xx] - [x]^2} = \frac{11 \cdot 110,9407 - 55 \cdot 22,9845}{11 \cdot 385 - 3025} = -\frac{43,7998}{1210}, \quad b = -0,0362$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{[ww]}{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n[xx] - [x]^2}} = \sqrt{\frac{4,871 \cdot 10^{-4}}{9}} \cdot \sqrt{\frac{11}{11 \cdot 385 - 3025}} = 7,357 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0953, \quad \Delta b = 7,011 \cdot 10^{-4}$$

$$\mathcal{G} = 10^{\frac{b}{2}} = 10^{\frac{0,0362}{2}} = 0,9592, \quad \Delta \mathcal{G} = \left| \frac{1}{2} \cdot 10^{\frac{b}{2}} \cdot \ln 10 \cdot \Delta b \right| = 7,74 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Ergebnis: } \mathcal{G} = 0,9592 \pm 0,0008, \quad \frac{\Delta \mathcal{G}}{\mathcal{G}} = 8,3 \cdot 10^{-4} = 0,8 \text{ ‰}$$

## Aufgaben

**1.1** Geben Sie die mechanische Spannung  $1 \text{ Nmm}^{-2}$  in der (abgeleiteten) SI-Einheit Pa an!

**1.2** Formen Sie die folgende Größengleichung  $\frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot \ell}$  in eine Zahlenwertgleichung der Form

$$\frac{V/\text{m}^3}{t/\text{h}} = \alpha \cdot \frac{(R/\text{mm})^4 \cdot \Delta p/\text{MPa}}{\eta/\text{Poise} \cdot \ell/\text{m}} \text{ um!}$$

Welchen Wert hat die Zahl  $\alpha$ ? ( $1 \text{ Poise} = 1 \text{ gcm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )

**1.3** Bei der Doppelwägung wird das Gewicht eines homogenen Körpers in Luft ( $G_L$ ) und vollständig eingetaucht in eine Flüssigkeit ( $G_{Fl}$ ) der Dichte  $\rho_{Fl}$  gemessen und daraus dessen Dichte  $\rho$  nach der Gleichung

$$\rho = \rho_{Fl} \cdot \frac{G_L}{G_L - G_{Fl}}$$
 berechnet.

Ermitteln Sie die Dichte des Körpers und ihren Größtfehler, wenn folgende Messwerte vorliegen:

$$G_L = (112,22 \pm 0,05) \text{ g}, \quad G_{Fl} = (99,68 \pm 0,05) \text{ g},$$

$$\rho_{Fl} = (0,998 \pm 0,002) \text{ gcm}^{-3}.$$

**1.4** Gegeben ist eine Ziegelwand der Dicke  $d = (0,425 \pm 0,002) \text{ m}$ . Das Material hat eine Wärmeleitfähigkeit von  $\lambda = (0,14 \pm 0,01) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Der Wärmeübergangswiderstand auf der Innenseite beträgt  $R_{si} = (0,13 \pm 0,02) \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}$ , auf der Außenseite

$$R_{se} = (0,04 \pm 0,02) \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}.$$

(a) Schätzen Sie den Größtfehler des Wärmedurchgangskoeffizienten ab, der aus diesen Angaben nach der

$$\text{Formel } U = \frac{1}{R_{si} + \frac{d}{\lambda} + R_{se}} \text{ errechnet werden kann!}$$

(b) Der Wärmedurchgangskoeffizient der Wand wurde durch Messung bestimmt, die Ergebnisse sind:

Nr.	1	2	3	4	5
$U / \text{W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	0,291	0,307	0,286	0,289	0,359
Nr.	6	7	8	9	10
$U / \text{W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$	0,391	0,272	0,261	0,324	0,345

Berechnen Sie den absoluten (d. h. den mittleren Fehler des Mittelwertes), den relativen und den prozentualen Fehler des Wärmedurchgangskoeffizienten!

**1.5** Der spezifische Lüftungswärmeverlust durch ein Bauteil wird nach der Formel  $H_V = c_L \cdot \rho_L \cdot a \cdot \ell \cdot \Delta p^{\frac{2}{3}}$  berechnet.

Dabei ist  $c_L = (1000 \pm 5) \text{ Wskg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  die spezifische Wärmekapazität der Luft,  $\rho_L = (1,293 \pm 0,005) \text{ kgm}^{-3}$  die

Dichte der Luft,  $a = (0,30 \pm 0,02) \text{ m}^3 \text{ m}^{-1} \text{ h}^{-1} \text{ Pa}^{-\frac{2}{3}}$  der Fugendurchlasskoeffizient und  $\ell = (9,90 \pm 0,01) \text{ m}$  die Fugenlänge des Bauteils sowie  $\Delta p = (0,65 \pm 0,01) \text{ Pa}$  die Druckdifferenz zwischen Innen- und Außenluft. Berechnen Sie den Lüftungswärmeverlust und schätzen Sie seinen absoluten und relativen Größtfehler ab!

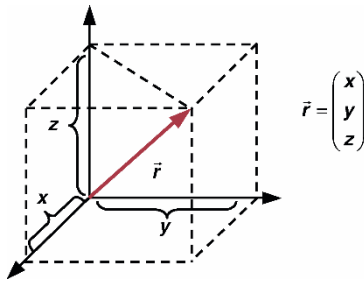


## 2 Grundlagen der Mechanik

### 2.1 Kinematik und Dynamik

#### 2.1.1 Punktmasse, starrer und elastischer Körper

Die **Kinematik** beschreibt die **Bewegung** von Körpern durch Angabe der **Ortskoordinaten** und deren **Zeitabhängigkeit**. In der **Dynamik** werden **Kräfte** eingeführt und als Ursachen für die Änderung des Bewegungszustandes von Körpern benannt. Diese Kräfte können die Körper aber auch deformieren.



**Bild 2.1** Ortskoordinaten  $x, y, z$  und dreidimensionaler Ortsvektor  $\vec{r}$

Die einfachsten Beschreibungen erhält man mit dem Modell der **Punktmasse**. Eine Punktmasse ist ein idealisierter Körper, bei dem die gesamte Stoffmenge in

einem Punkt konzentriert ist, ihr Ort lässt sich durch den **Ortsvektor**  $\vec{r}$  (auch Radiusvektor genannt) beschreiben.

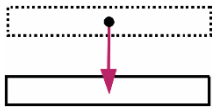
Reale Körper haben eine endliche Ausdehnung mit einer kontinuierlichen Masseverteilung, für die sich ein **Massenmittelpunkt**  $\vec{r}_s$  (siehe Abschnitt 2.5.1) definieren lässt.

Häufig erzeugen äußere, auf einen festen Körper einwirkende Kräfte nur vernachlässigbar kleine Deformationen. Der Körper kann unter dieser Voraussetzung durch das Modell des **starrten Körpers** angenähert werden. An einem starren Körper rufen beliebige äußere Kräfte keinerlei Formänderungen (Abstandsänderungen zwischen einzelnen Punkten des Körpers) hervor (siehe Abschnitt 2.5.1). Bei einer Translationsbewegung, d. h. bei einer Parallelverschiebung aller Punkte, verhält sich der starre Körper wie eine Punktmasse, angesiedelt im Massenmittelpunkt. Es ist deshalb in Sonderfällen zulässig, starre Körper als Punktmasse zu beschreiben, welche sich am Ort des Massenmittelpunktes befindet.

Körper heißen **elastisch** (siehe Abschnitt 2.5.6), wenn ihre durch äußere Kräfte hervorgerufenen **Deformationen** (Volumen- und Gestaltsänderungen) nicht mehr vernachlässigbar sind, nach Wegfall der Belastung jedoch die ursprüngliche Form und das ursprüngliche Volumen wieder eingenommen werden (**reversible Deformation**).

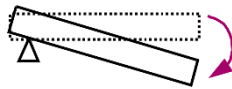
#### Beispiel 2.1 Bewegungen eines Holzbalkens

Mögliche Bewegungen eines Holzbalkens und zu deren Beschreibung geeignete Modelle



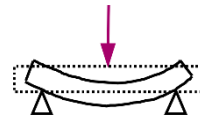
Fällt im freien Fall vom Gerüst:

→ Punktmasse



Kippt um ein Auflager:

→ Starrer Körper



Wird zusätzlich belastet:

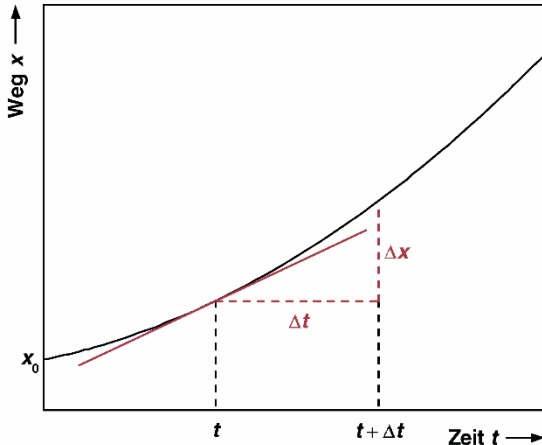
→ Elastischer Körper

Weitere Anwendungen für die Modelle:

- Planetenbewegung um die Sonne
- Flugbahn eines Tennisballs
- Proton und Elektron im einfachen Atommodell
- Rotationsbewegung eines Betonmischers
- Durchbiegung eines Stahlträgers
- Durchbiegung einer Hängebrücke

### 2.1.2 Eindimensionale Bewegung

Die **eindimensionale** Bewegung einer Punktmasse lässt sich mit einer Wegkoordinate  $x = x(t)$  beschreiben, wenn sich die Punktmasse auf einer Geraden bewegt. Das Bild 2.2 zeigt das Weg-Zeit-Diagramm einer derartigen Bewegung, die zur Zeit  $t=0$  am Ort  $x = x_0$  beginnt.



**Bild 2.2** Weg-Zeit-Diagramm einer eindimensionalen Bewegung

Der Quotient  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$  heißt **Durchschnittsgeschwindigkeit** im Intervall  $(t, t + \Delta t)$ . Die **Momentangeschwindigkeit**  $v$  zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich aus

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad (2.1)$$

mit  $v(0) = v_0$ ,

$$[v] = [\bar{v}] = \text{ms}^{-1}.$$

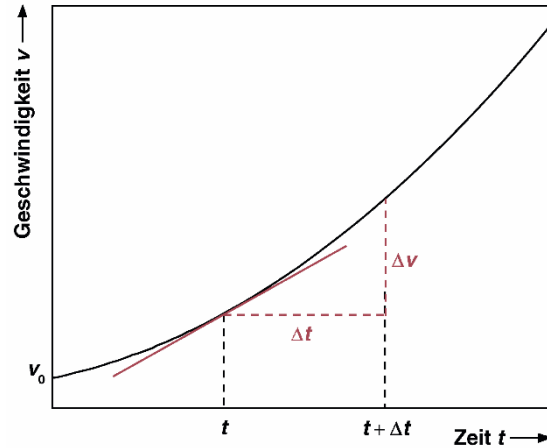
Für  $v(t) = v = \text{const.}$  heißt die Bewegung **gleichförmig**. Eine **ungleichförmige** Bewegung führt entsprechend Bild 2.3 zur Definition einer **Beschleunigung**  $a$ :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}, \quad (2.2)$$

mit  $a(0) = a_0$ ,  $[a] = \text{ms}^{-2}$ .

Punkte über einer physikalischen Größe bezeichnen deren erste bzw. zweite Ableitung nach der Zeit.

In Tabelle 2.1 und Tabelle 2.2 sind typische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zusammengestellt.



**Bild 2.3** Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm einer eindimensionalen Bewegung

**Tabelle 2.1** Charakteristische Geschwindigkeiten

Physikalisches Phänomen	Geschwindigkeit / $\text{ms}^{-1}$
Elektronen in Metallen	$5 \cdot 10^{-3}$
Fußgänger	1,4
Kranfahrzeug	5
Auto	15...20
Nervenerregung	40
Wind (Stärke 12)	50
Flugzeug	70...500
Schall in Luft	340
Erdrabant	$1,2 \cdot 10^3$
Schall in Metallen	$5 \cdot 10^3$
Erde beim Umlauf	$3 \cdot 10^4$
Licht im Vakuum	$3 \cdot 10^8$

**Tabelle 2.2** Charakteristische Beschleunigungen

Physikalisches Phänomen	Beschleunigung / $\text{ms}^{-2}$
Personenzug	0,1...0,3
Auto	3...8
Fallbeschleunigung auf der Erde	9,81
Elektron in Vakuumröhre	$1 \cdot 10^{15}$

Der Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen ergibt sich entsprechend (2.1) und (2.2) zu

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt} v(t) \\ v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t') dt' \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t'') dt'' = x_0 + \int_0^t \left\{ v_0 + \int_0^{t'} a(t'') dt'' \right\} dt'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

### Beispiel 2.2 Freier Fall

Anwendung der Formeln (2.3) auf den freien Fall aus einer Höhe  $h$

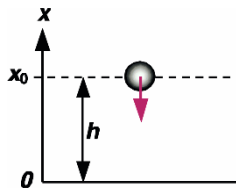
$$\begin{aligned} a &= -g \\ v &= v_0 - g \cdot t \end{aligned}$$

mit  $v_0 = 0$  folgt  $v = -g \cdot t$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

mit  $x_0 - x = h$  folgt  $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$

$$v = \sqrt{2g \cdot h}$$



### 2.1.3 Bewegung im Raum

Eine Bewegung im Raum wird entsprechend Bild 2.4 durch den zeitlich veränderlichen Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  beschrieben. Dabei ergibt sich für die **Geschwindigkeit**:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}} \quad (2.4)$$

und für die **Beschleunigung**:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.5)$$

#### Kinematik in kartesischen Koordinaten

Häufig ist eine Darstellung in kartesischen Koordinaten (vgl. Bild 2.1) möglich. Die Bewegung kann durch voneinander unabhängige eindimensionale Bewegungen in den Richtungen der Koordinatenachsen beschrieben werden.

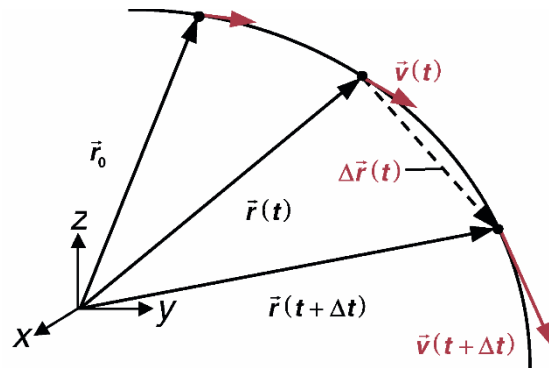


Bild 2.4 Bahnkurve im Raum

Diese Richtungen werden durch die **Einheitsvektoren**  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  angegeben. Der Betrag eines Einheitsvektors ist stets gleich 1, d.h.  $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ .  $\vec{e}_x$  zeigt in Richtung der x-Achse,  $\vec{e}_y$  in Richtung der y-Achse und  $\vec{e}_z$  in Richtung der z-Achse. Dann kann man schreiben:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z, \quad (2.6)$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.7)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z \quad (2.8)$$

mit  $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$  und  $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ ,

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (2.9)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z \quad (2.10)$$

mit  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y$  und  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z$ ,

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.11)$$

## Beispiel 2.3 Wurf- oder Wasserstrahlparabel

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0 & a_y &= 0 & a_z &= -g \\
 v_x &= v_{0x} & v_y &= 0 & v_z &= -g \cdot t + v_{0z} \\
 &= v_0 \cdot \cos \alpha & & & &= -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \\
 x &= v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha + x_0 & y &= 0 & z &= -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha \\
 & & & & &+ z_0
 \end{aligned}$$

Für die Bahnkurve  $z(x)$  ergibt sich eine Parabel:

$$z(x) = -\frac{g}{2} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (x - x_0) \cdot \tan \alpha + z_0.$$

Mit  $x_0 = z_0 = 0$  hat diese Parabel die Gleichung

$$z = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan \alpha \quad (\text{siehe Bild 2.5}).$$

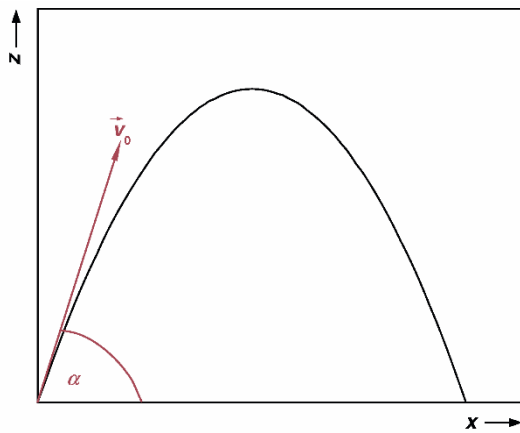


Bild 2.5 Beispiel für einen ebenen Wurf

## Kreisbewegung

Die Bewegung einer Punktmasse auf einem Kreis (als Prototyp einer Kurve) entspricht prinzipiell der Bewegung auf der Geraden. In Bild 2.6 ist der Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  jetzt **Radiusvektor** mit dem konstanten Betrag  $|\vec{r}| = r$ . Es ist in diesem speziellen Fall sinnvoll, statt der Angabe der Koordinaten  $x$  und  $y$  den Winkel  $\varphi$  einzuführen, für den mit der Bogenlänge (Weglänge)  $s$ ,  $[s] = \text{m}$ , gilt

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r}, \quad (2.12)$$

$$[\varphi] = \text{rad}$$

## Die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (2.13)$$

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{s}^{-1},$$

kann als ein Vektor  $\vec{\omega}$  beschrieben werden, welcher senkrecht auf der Kreisbahnebene steht. Sie ist mit der (Kreis-) **Bahngeschwindigkeit**  $\vec{v}$  über das Vektorprodukt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.14)$$

verknüpft.

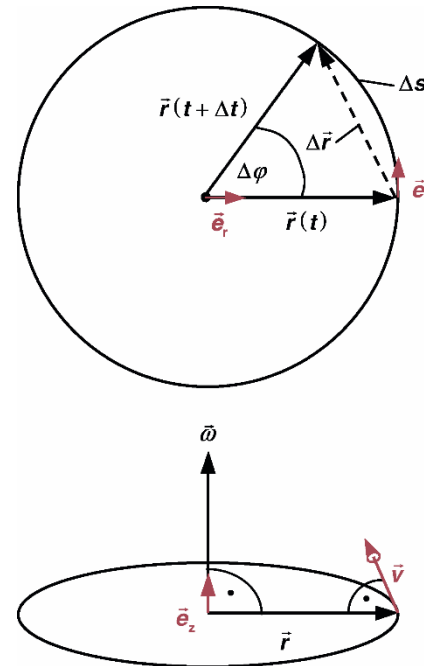


Bild 2.6 Kreisbewegung

Mit dem **Tangenten-Einheitsvektor**  $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$  und

dem **Radius-Einheitsvektor**  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  kann man entsprechend Bild 2.6 und wegen  $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$  schreiben: