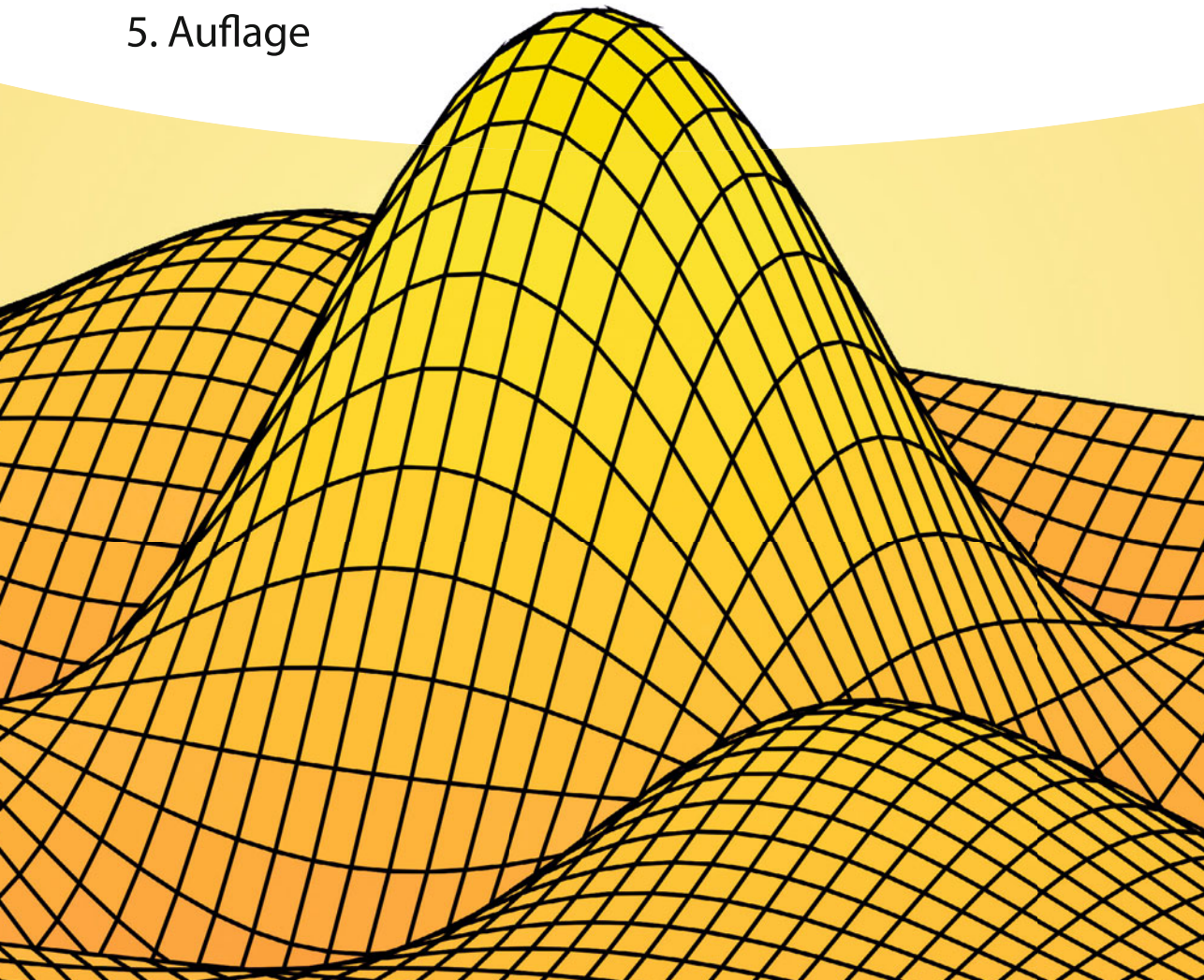


Rainer Ansorge, Hans J. Oberle,
Kai Rothe und Thomas Sonar

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie,
Differential- und Integralrechnung einer
Variablen

5. Auflage



**Mathematik in den
Ingenieur- und
Naturwissenschaften 1**

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1

Lineare Algebra und analytische Geometrie, Differential-
und Integralrechnung einer Variablen

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

5. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autoren

Rainer Ansorge

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Hans J. Oberle

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Kai Rothe

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Thomas Sonar

Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

5. Auflage 2020

■ Alle Bücher von Wiley-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2020 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Print ISBN 978-3-527-41374-4

ePDF ISBN 978-3-527-82288-1

ePub ISBN 978-3-527-82289-8

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönheim, Deutschland

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur fünften Auflage IX

Vorwort zur vierten Auflage XI

Vorwort zur dritten Auflage XIII

Vorwort zur zweiten Auflage XV

Vorwort XVII

1	Aussagen, Mengen und Funktionen	1
1.1	Aussagen	1
1.2	Mengen	6
1.3	Funktionen	10
2	Zahlenbereiche	17
2.1	Natürliche Zahlen	17
2.2	Reelle Zahlen	25
2.3	Komplexe Zahlen	33
3	Vektorrechnung und Analytische Geometrie	45
3.1	Vektoren	45
3.2	Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$	61
3.3	Allgemeine Vektorräume	65
4	Lineare Gleichungssysteme	73
4.1	Matrizenkalkül	73
4.2	Gauß-Elimination	77
4.3	Inverse Matrizen	85
4.4	Die Dreieckszerlegung einer Matrix	90
4.5	Determinanten	97
5	Lineare Abbildungen	109
5.1	Lineare Abbildungen – Basisdarstellung	109
5.2	Orthogonalität	116
5.3	Orthogonale Transformationen	124

6	Lineare Ausgleichsprobleme und lineare Programme	133
6.1	Ausgleichsprobleme und Normalgleichungen	133
6.2	Die QR-Zerlegung	137
6.3	Lineare Programme	142
6.4	Das Simplexverfahren	148
7	Eigenwerttheorie für Matrizen	153
7.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	153
7.2	Symmetrische Matrizen und Hauptachsentransformation	168
7.3	Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	180
8	Konvergenz von Folgen und Reihen	193
8.1	Folgen	193
8.2	Konvergenzkriterien für reelle Folgen	199
8.2.1	Folgen in Vektorräumen	207
8.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen	209
9	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	217
9.1	Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen	217
9.2	Differentialrechnung einer Variablen	227
10	Weiterer Ausbau der Differentialrechnung	237
10.1	Mittelwertsätze und Satz von Taylor	237
10.2	Die Regeln von de l'Hospital	253
10.3	Kurvendiskussion	255
10.4	Fehlerrechnung	258
10.5	Fixpunkt-Iterationen	264
11	Potenzreihen und elementare Funktionen	271
11.1	Gleichmäßige Konvergenz	271
11.2	Potenzreihen	274
11.3	Elementare Funktionen	280
12	Interpolation	289
12.1	Problemstellung	289
12.2	Polynom-Interpolation nach Aitken, Neville und Newton	295
12.3	Spline-Interpolation	299
13	Integration	305
13.1	Das bestimmte Integral	305
13.2	Kriterien für Integrierbarkeit	310
13.3	Der Hauptsatz und Anwendungen	314
13.4	Integration rationaler Funktionen	321
13.5	Uneigentliche Integrale	326
13.6	Parameterabhängige Integrale	331

14	Anwendungen der Integralrechnung	337
14.1	Rotationskörper	337
14.2	Kurven und Bogenlänge	342
14.3	Kurvenintegrale	349
15	Numerische Quadratur	353
15.1	Die Newton-Cotes-Formeln	354
15.2	Extrapolation	359
16	Periodische Funktionen, Fourier-Reihen	365
16.1	Grundlegende Begriffe	365
16.2	Fourier-Reihen	371
16.3	Numerische Berechnung der Fourier-Koeffizienten	382
	Weiterführende Literatur	389
	Stichwortverzeichnis	393

Vorwort zur fünften Auflage

Der Text wurde für die Neuauflage vorsichtig überarbeitet und bekannt gewordene Fehler wurden korrigiert. Im Abschnitt zur Logik wurde ein wichtiger Fall aufgenommen, der bisher fehlte, aber dennoch verwendet wurde. Im Fall der Stetigkeit sind wir dem Wunsch nachgekommen, das ε - δ -Kriterium nicht nur abstrakt für metrische Räume zu formulieren, sondern direkt für den Fall von Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir hoffen, damit die Verständlichkeit des Textes noch einmal verbessert zu haben.

Wir danken dem Verlag für die Möglichkeit, dieses erfolgreiche Lehrbuch, das nun seit 26 Jahren auf dem Markt ist, in einer neuen Auflage präsentieren zu können.

Hamburg und Braunschweig, im November 2019

Die Verfasser

Vorwort zur vierten Auflage

Nach über zehn Jahren fortdauerndem Interesse durch die geneigte Leserschaft hat uns der Verlag Wiley-VCH dazu ermutigt, eine weitere Neuauflage unserer Mathematik für Ingenieure in Angriff zu nehmen. Hiermit legen wir nun zunächst die Bände eins (Lehrbuch) und drei (Aufgabenband) zur Linearen Algebra und zur Analysis einer Variablen in nunmehr gemeinsamer Autorenschaft vor.

Die Bücher wurden grundlegend überarbeitet, die erläuternden Texte wurden erweitert und verbessert, viele alte und neue Abbildungen wurden verbessert bzw. neu erstellt. Der Aufgabenband wurde durch eine Vielzahl neuer Aufgaben einschließlich zugehöriger Lösungshinweise verstärkt, und auch inhaltlich wurde das Lehrbuch durch das Einfügen der im Bereich der Ingenieurwissenschaften zunehmend wichtigen *linearen Optimierung* erweitert. Die Beschreibung der numerischen Verfahren schließlich wurde ergänzt durch Hinweise auf Software in der MATLAB Rechenumgebung.

MATLAB dient inzwischen weitgehend als Standardwerkzeug im naturwissenschaftlich-technischen Bereich und steht den Studierenden der Technischen Universitäten in der Regel zur Verfügung.

Bedanken möchten wir uns bei vielen Studentinnen und Studenten, die uns zu unserer Ingenieur-Mathematik viel Lob, aber auch viele Verbesserungsvorschläge haben zukommen lassen. Dankbar sind wir auch dem Verlag, in persona Frau Palmer und Frau Werner, für tatkräftige Ermutigung und Unterstützung. Natürlich wünschen wir, dass unser Werk auch weiterhin den Studierenden wie auch den in der Praxis tätigen Ingenieuren von Nutzen sein möge.

Hamburg und Braunschweig, im April 2010

Die Verfasser

Vorwort zur dritten Auflage

Erneut erfordert die interessierte Nachfrage nach unserem Lehrbuch eine Neuauflage, zunächst des ersten Bandes, und diesmal unter der Schirmherrschaft des Verlages Wiley-VCH, der dankenswerterweise nach Übernahme des früheren Akademie Verlages bereit war, sich auch seinerseits für eine dritte Auflage zu engagieren.

Das Buch wurde vollständig neu durchgesehen, Abbildungen verbessert, noch vorhandene Druckfehler – soweit bekannt geworden – beseitigt, Rechenprogramme aus dem Buch mit entsprechendem Verweis ins Internet übernommen, weitere Übungsaufgaben zusätzlich integriert, das Lehrbuchverzeichnis aktualisiert, missverständliche Textstellen präzisiert. Darüber hinaus wird in einem dritten Ergänzungsband zur *Mathematik für Ingenieure* eine Fülle weiterer Übungs- und Klausuraufgaben einschließlich Lösungsvorschlägen bereitgestellt. Wir haben deshalb die Hoffnung, dass diese Neuauflage auch künftig den Studierenden wie dem Praktiker bei der Bewältigung anstehender Aufgaben hilfreich zur Seite stehen kann.

Hamburg, im Januar 2000

Die Verfasser

Vorwort zur zweiten Auflage

Die freundliche Aufnahme, die unser Lehrbuch sowohl bei den Lesern wie bei der Kritik gefunden hat, veranlasst uns, diese rasch notwendig gewordene Neuauflage im Wesentlichen als Nachdruck der ersten Auflage vorzulegen.

Dennoch haben wir für mancherlei Verbesserungsvorschläge sowohl von den Studierenden wie aus dem Kollegenkreise Dank zu sagen. Wir sind diesen Vorschlägen weitestgehend gefolgt, und natürlich wurden alle uns bekannt gewordenen Druckfehler korrigiert.

Dank sagen wir auch dem Verlag für die uns zuteil gewordene Unterstützung.

So hoffen wir, dass auch diese zweite Auflage den Studierenden wie den in der Praxis tätigen Ingenieuren eine seriöse Hilfe beim Erlernen oder Nachschlagen grundlegender mathematischer Sachverhalte und deren Nutzung in mathematischen Modellen natur- oder ingenieurwissenschaftlicher Zusammenhänge sein wird.

Hamburg, im April 1997

Die Verfasser

Vorwort

Diese zweibändige Ausgabe *Mathematik für Ingenieure* ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die wir an den Technischen Universitäten Clausthal, München und Hamburg-Harburg über viele Jahre abgehalten haben. Der Gesamtumfang entspricht dem Stoff eines viersemestrigen Kurses von jeweils vier Semesterwochenstunden.

Da den Anfängern im ersten Semester vom Schulunterricht her zumeist eher Grundkenntnisse aus der Analysis als aus der Linearen Algebra zur Verfügung stehen, jedoch von Anbeginn in den technisch-naturwissenschaftlichen Grundvorlesungen – etwa in der Technischen Mechanik oder den Grundlagen der Elektrotechnik – alsbald auch Hilfsmittel aus der Linearen Algebra eingesetzt werden, beginnt der erste Band nach einführenden Abschnitten mit der Vektorrechnung und Analytischen Geometrie, gefolgt von Abschnitten über lineare Gleichungssysteme, lineare Abbildungen sowie lineare Ausgleichs- und Eigenwertprobleme. Erst dann wird zur Analysis der Funktionen einer reellen Veränderlichen übergegangen, wobei überall dort, wo dies ohne Mehraufwand möglich ist, auch sogleich komplexe Variable einbezogen werden. Der zweite Band umfasst die Analysis bei mehreren reellen Veränderlichen, Integralsätze, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Optimierung, Spezielle Funktionen, Integraltransformationen und Funktionentheorie einer komplexen Variablen. Großen Wert haben wir auf motivierende Modellbildungen aus ingenieurwissenschaftlichen Bereichen gelegt, wobei allerdings zu Anfang angesichts des Umstandes, dass die Kenntnisse der Studierenden zu diesem Zeitpunkt auch in ihrem jeweiligen technischen Hauptfach noch eher rar sind, keine großen Ansprüche gestellt werden können. Nahezu alle angesprochenen mathematischen Teilgebiete werden durch Einführung in zugehörige numerische Methoden sowie durch Übungsaufgaben ergänzt.

Wir verzichten nicht auf mathematische Strenge und nur selten auf Beweise mathematischer Aussagen, denn erst das Begreifen eines Zusammenhangs – was nicht als jederzeitige auswendige Reproduzierbarkeit eines Beweises durch die Studierenden misszuverstehen ist – kann zum Verständnis der Voraussetzungen einer Aussage und damit zur kritischen Einschätzung der großen Möglichkeiten, aber auch der Grenzen eines mathematischen Werkzeugs führen. Andererseits haben wir uns jedoch einer Sprache zu befleißigen versucht, die auf zu starren Formalismus verzichtet, statt dessen vielfach lieber klare verbale Formulierungen

bevorzugt, nichtsdestoweniger aber auch formale Ausdrucksweisen benutzt, wo verbale Sprache auch bei Ingenieur-Anwendern eher erschwerend wirken würde.

Wir glauben, dass das Werk auch für Naturwissenschaftler und hinsichtlich der Modelle aus mancherlei technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen sogar für Studierende der Mathematik hilfreich sein kann, doch ist es für Ingenieure konzipiert.

Herzlichen Dank möchten wir den Sekretärinnen unseres Instituts, insbesondere Frau Monika Jampert, sagen, die bei der Erstellung der Druckvorlagen unschätzbare Dienste geleistet haben, und Herrn Uwe Grothkopf, der uns bei vielen Fragen im Zusammenhang mit der Benutzung des Textverarbeitungssystems $\text{\LaTeX}$ unterstützte. Unser Dank gilt auch vielen Kollegen und Mitarbeitern, die bei der kritischen Verwendung der als Vorläufer dieser Bände erstellten Vorlesungsskripten Ungereimtheiten aufgedeckt und so zur Gestaltung der nun vorliegenden Fassung beigetragen haben.

Nicht zuletzt sind wir dem Verlag, insbesondere Frau Gesine Reiher, für geduldiges Eingehen auf unsere Wünsche und für mancherlei Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Hamburg, im Oktober 1993

Die Verfasser

1

Aussagen, Mengen und Funktionen

In diesem und dem folgenden einführenden Abschnitt sollen einige Grundregeln der mathematischen Sprech- und Ausdrucksweise vereinbart werden. Hierzu werden die wichtigsten Begriffe über Aussagen, Mengen und Funktionen sowie später über die Zahlenbereiche zusammengestellt. Den Studierenden sollte der Stoff dieser Abschnitte im Wesentlichen von der Schule bekannt sein (mit Ausnahme vielleicht der komplexen Zahlen). Das Augenmerk sollte also hierbei eher auf dem Einüben der Notation liegen.

1.1 Aussagen

Aussagen sind Sätze, die wahr oder falsch sind. Vom Standpunkt der Aussagenlogik, aber auch für das formale Umformen von Aussagen ist nicht der Inhalt einer Aussage von Interesse, sondern ihr **Wahrheitswert**. Ist A eine Aussage, so legen wir fest:

$$\begin{aligned} w(A) = 0 & : \Longleftrightarrow A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 & : \Longleftrightarrow A \text{ ist wahr.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$w(A)$ bezeichnet dabei den Wahrheitswert der Aussage A ; das Symbol $:\Longleftrightarrow$ bezeichnet die definierende Äquivalenz, sprachlich: „... wird definiert durch ...“. Wir gehen davon aus, dass es nur zwei Wahrheitswerte gibt (Satz vom ausgeschlossenen Dritten, lat. „tertium non datur“) und dass jede (sinnvolle) Aussage entweder wahr oder falsch ist.

Sind A und B Aussagen, so werden die folgenden **Verknüpfungen** dieser Aussagen betrachtet:

$\neg A$	:	„nicht A “	(Negation)
$A \wedge B$	:	„ A und B “	(Konjunktion)
$A \vee B$	:	„ A oder B “	(Disjunktion)
$A \Rightarrow B$	:	„aus A folgt B “	(Implikation)
$A \Leftrightarrow B$	:	„ A äquivalent zu B “	(Äquivalenz)

Definiert werden diese „neuen“ Aussagen durch Festlegung ihrer Wahrheitswerte (in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B):

Tafel (1.1): Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Man beachte:

- i) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. $\vee$ beschreibt also das „nicht ausschließende oder“ im Gegensatz zum „entweder ... oder“.
- ii) Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die **Prämisse** (das ist die Aussage A) falsch ist.

Mit Hilfe dieser Verknüpfungen lassen sich nun formal weitere Aussagen bilden, wie etwa:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \quad (1.2)$$

Nun gilt: Die Aussage (1.2) ist immer, d. h. unabhängig von den Aussagen A und B , wahr. Solche Aussagen heißen **Tautologien**. Wir überprüfen diese Eigenschaft anhand der zugehörigen Wahrheitswertetafel:

Tafel (1.2): Wahrheitswertetafel zu (1.2).

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	(1.2)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Tautologien lassen sich dazu benutzen, mathematische Aussagen in andere, äquivalente Aussagen umzuwandeln.

Liste häufig verwendeter Tautologien (1.3)

- | | |
|--|-----------------------------------|
| (1) $A \vee \neg A$ | Satz vom ausgeschlossenen Dritten |
| (2) $\neg(A \wedge \neg A)$ | Satz vom Widerspruch |
| (3) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ | doppelte Verneinung |
| (4) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ | Regel von de Morgan ¹⁾ |
| (5) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ | Regel von de Morgan |
| (6) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Kontraposition |
| (7) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | modus ponens |
| (8) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | modus tollens |
| (9) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | modus barbara |
| (10) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributivgesetz |
| (11) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivgesetz |

1) Augustus de Morgan (1806–1871); London.

Beispiel (1.4)

Zum Nachweis, dass die beiden Regeln von de Morgan (4) und (5) Tautologien sind, stellen wir die zugehörige Wahrheitstafel auf.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen. So ist z. B.

$$A(x, y) : \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2$$

eine (zweistellige) Aussageform in den Variablen x, y . Eine Aussageform selbst hat keinen Wahrheitswert. Erst wenn man für die Variablen konkrete Objekte (hier etwa reelle Zahlen) einsetzt, erhält man eine Aussage, die dann wahr oder falsch ist. Für obiges Beispiel ist etwa $A(\frac{1}{2}, 1)$ eine wahre und $A(-3, 2)$ eine falsche Aussage.

Für eine einstellige Aussageform $A(x)$ werden die folgenden Aussagen definiert:

$$\forall x : A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Für alle } x \text{ ist } A(x) \text{ wahr.}$$

$$\exists x : A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt (wenigstens) ein } x, \text{ so dass } A(x) \text{ wahr ist.}$$

$$\exists_1 x : A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt genau ein } x, \text{ so dass } A(x) \text{ wahr ist.}$$

Die Symbole $\forall, \exists$ und $\exists_1$ heißen **Quantoren**. Wichtig sind auch die Verneinungen der Quantoren:

$$\neg(\forall x : A(x)) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x : \neg A(x) \text{ Es gibt (wenigstens ein) } x, \text{ so dass } A(x) \text{ nicht gilt.}$$

$$\text{Beispiel: } \neg(\forall x : x > 2) \Leftrightarrow \exists x : x \leq 2$$

$$\neg(\exists x : A(x)) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : \neg A(x) \text{ Für alle } x \text{ ist } A(x) \text{ falsch.}$$

$$\text{Beispiel: } \neg(\exists x : x^2 = -1) \Leftrightarrow \forall x : x^2 \neq -1$$

Die allgemeine Form eines **mathematischen Satzes** ist die Implikation $A \Rightarrow B$.

Dabei heißt A die **Voraussetzung (Prämisse)**, B die **Behauptung (Konklusion)**. Man sagt dann auch: B ist eine **notwendige Bedingung** für A und A ist eine **hinreichende Bedingung** für B .

Für den **Beweis** eines mathematischen Satzes $A \Rightarrow B$ wird in der Regel ein sogenannter **Kettenschluss** durchgeführt:

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n = B.$$

Eine Begründung hierzu liefert die Tautologie (9) in Liste 1.3. Die einzelnen Schlüsse sind dabei einsichtig, sie sind z. B. bereits früher bewiesen worden oder sie folgen unmittelbar aus Axiomen. Diese Form des Beweises heißt **direkter Beweis**.

Beim sogenannten **indirekten Beweis** benutzt man die Kontraposition bzw. den modus tollens. Anstelle von $A \Rightarrow B$ beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$ oder: wenn die Behauptung B nicht gilt, so ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung A .

Wir betrachten zwei einfache Beispiele für diese Beweisformen:

Satz (1.5)

Für eine natürliche Zahl n gilt: n gerade $\iff n^2$ gerade.

Beweis.

Wir beweisen die Äquivalenz, indem wir die beiden Implikationen

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} &\Rightarrow n^2 \text{ gerade} \\ \text{und } n \text{ gerade} &\Leftarrow n^2 \text{ gerade} \end{aligned}$$

einzeln nachweisen.

$\Rightarrow$: (direkter Beweis)

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} &\Rightarrow n = 2k, \quad k \text{ natürliche Zahl,} \\ &\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \\ &\Rightarrow n^2 \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: (indirekter Beweis)

$$\begin{aligned} \text{Annahme: } n \text{ ungerade} &\Rightarrow n = 2k - 1, \quad k \text{ natürliche Zahl,} \\ &\Rightarrow n^2 = (2k - 1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ ist ungerade,} \\ &\quad \text{im Widerspruch zur Voraussetzung!} \end{aligned}$$



Wir betrachten ein zweites Beispiel für einen indirekten Beweis. Die äußere Form des Satzes ist dabei etwas anders, da keine Voraussetzung explizit genannt wird. Tatsächlich bilden jedoch die (üblichen) Rechenregeln für natürliche bzw. rationale Zahlen hier die Voraussetzungen.

Wir schließen aus

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$(\neg A) \vee B$	$\neg(\neg A \vee B)$
1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

die Regel

$$\neg(A \Rightarrow B) \iff \neg(\neg A \vee B).$$

Nach der Regel von de Morgan (siehe Liste 1.3 (5)) ist die rechte Seite äquivalent zu

$$\neg\neg A \wedge \neg B \iff A \wedge \neg B,$$

womit wir

$$\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B \quad (1.3)$$

gezeigt haben. Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen, wobei wir wie folgt vorgehen werden. Wir wollen zeigen: $x = \sqrt{2} \Rightarrow x$ ist keine rationale Zahl ($A \Rightarrow B$), zeigen dazu aber, dass $A \wedge \neg B$ *nicht* gilt, also muss $A \Rightarrow B$ richtig sein.

Satz (1.6)

$\sqrt{2}$ ist irrational, d. h., $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ mit n, m natürliche Zahlen darstellen.

Anmerkung

Die klassische geometrische Fragestellung lautet: Sind die „Strecken“ 1 und $\sqrt{2}$ *kommensurabel* (lat.: mit gleichem Maß messbar)?

Oder anders gesagt: Gibt es eine „kleine“ Strecke Δ mit

$$1 = m \cdot \Delta \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = n \cdot \Delta$$

(m, n natürliche Zahlen)?

Wenn es ein solches Δ gibt, so ist $\Delta = \frac{1}{m}$ und damit $\sqrt{2} = n \cdot \Delta = \frac{n}{m}$ eine rationale Zahl.

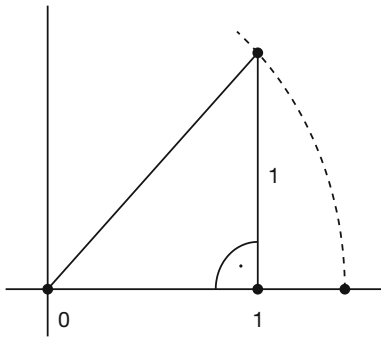


Abb. 1.1 Konstruktion von $\sqrt{2}$.

Beweis zu Satz 1.6 (indirekt mit (1.3)).

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$; n, m natürliche Zahlen. Weiter können wir annehmen, dass der Bruch $\frac{n}{m}$ gekürzt ist, d. h., n und m teilerfremd sind. (Damit haben wir $\neg B$ angenommen.)

Es folgt:

$$\begin{aligned} 2m^2 &= n^2 \\ \Rightarrow n^2 &\text{ gerade} \\ \Rightarrow n &\text{ gerade, etwa } n = 2k, k \text{ natürliche Zahl.} \end{aligned}$$

Satz 1.5

Dies in obige Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
 2m^2 &= n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\
 \Rightarrow m^2 &= 2k^2 \\
 \Rightarrow m^2 &\text{ gerade} \\
 \Rightarrow m &\text{ gerade.} \\
 \text{Satz 1.5}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Widerspruch konstruiert zu unserer Voraussetzung, dass n und m teilerfremd sind. $(A \wedge \neg B)$ gilt nicht, also folgt mit (1.3): $A \Rightarrow B$.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist also falsch! ■

1.2 Mengen

Wir verwenden den „naiven“ Mengenbegriff nach Georg Cantor²⁾. Hiernach ist eine Menge eine „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen“. Es soll jedoch kritisch angemerkt werden, dass sich hierdurch der Begriff „Menge“ nicht streng definieren lässt; er ist ein Grundbegriff. Der korrekte Weg wäre es, Regeln festzulegen, wie man mit Mengen umzugehen hat. Dies führt auf die axiomatische Mengenlehre nach Ernst Zermelo und David Hilbert³⁾.

Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
 A, B, \dots, M, N, \dots, & \text{Mengen,} \\
 a \in M & : \Longleftrightarrow a \text{ ist Element der Menge } M, \\
 a \notin M & : \Longleftrightarrow \neg(a \in M).
 \end{aligned}$$

Mengen lassen sich definieren durch:

- Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$,
- eine charakterisierende Eigenschaft $A(x)$: $M := \{x \in \Omega : A(x)\}$.

Hierbei bezeichnet $:=$ die definierende Gleichheit („... wird definiert durch ...“) und $A(x)$ ist eine Aussageform, die für Objekte (Elemente) aus einem Grundbereich Ω erklärt ist.

$$\textbf{Gleichheit: } M = N : \Longleftrightarrow \forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N) \quad (1.4)$$

$$\textbf{Teilmenge: } M \subset N : \Longleftrightarrow \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N) \quad (1.5)$$

Eine Menge, welche kein Element enthält, heißt **leere Menge**. Nach (1.4) existiert nur eine leere Menge, diese wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

2) Georg Cantor (1845–1918); Berlin, Halle.

3) Ernst Zermelo (1871–1953); Göttingen, Zürich, Freiburg,
David Hilbert (1862–1943); Königsberg, Göttingen.

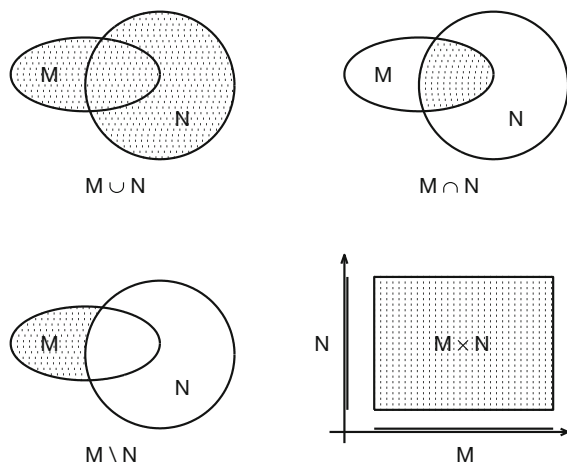


Abb. 1.2 Verknüpfungen von Mengen.

Ordnungseigenschaft (1.7)

- a) $M \subset M$,
- b) $M \subset N \wedge N \subset M \Rightarrow M = N$,
- c) $M \subset N \wedge N \subset P \Rightarrow M \subset P$.

Verknüpfungen von Mengen (1.8)

$M \cup N$	$:= \{x : x \in M \vee x \in N\}$	(Vereinigung),
$M \cap N$	$:= \{x : x \in M \wedge x \in N\}$	(Durchschnitt),
$M \setminus N$	$:= \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$	(Differenz),
$M \times N$	$:= \{(a, b) : a \in M \wedge b \in N\}$	(Kartesisches ⁴⁾ Produkt),
$P(M)$	$:= \{X : X \subset M\}$	(Potenzmenge).

Bemerkungen (1.9)

- a) Zwei Mengen M, N mit leerem Durchschnitt, d. h., $M \cap N = \emptyset$, heißen **disjunkt**.
- b) Die Begriffe Vereinigung, Durchschnitt und Kartesisches Produkt lassen sich unmittelbar auf mehrere Mengen verallgemeinern

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{k=1}^n A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\
 &:= \{a : \exists i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\}, \\
 \bigcap_{k=1}^n A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\
 &:= \{a : \forall i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\},
 \end{aligned}$$

4) René Descartes (Cartesius) (1596–1650); Paris, Niederlande.

$$\prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$:= \{(a_1, \dots, a_n) : \forall i : a_i \in A_i\}.$$

c) Man beachte, dass für geordnete Paare bzw. geordnete n -Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \quad \text{bzw.}$$

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i.$$

d) Wir geben einige wichtige Beispiele für kartesische Produkte an. Hierbei und im Folgenden bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, vgl. Abschn. 2.2.

Die euklidische Ebene⁵⁾

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\},$$

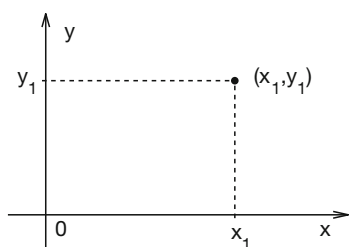


Abb. 1.3 Die euklidische Ebene.

Der dreidimensionale euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

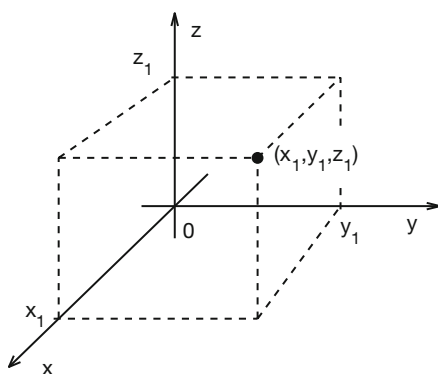


Abb. 1.4 Der dreidimensionale euklidische Raum.

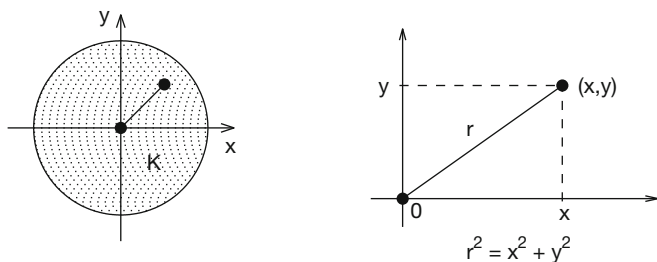
Der n -dimensionale euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

5) Eukleides bzw. Euklid (um 300 v. Chr.); Alexandria.

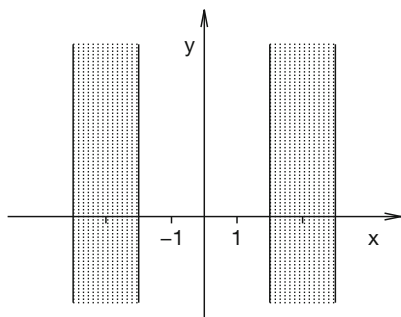
Beispiele (1.10)

a) Kreisfläche: $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$,

**Abb. 1.5** Kreisfläche.

b) Streifen: $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$,

$$\begin{aligned} 5 \leq x^2 + 1 \leq 17 &\iff 4 \leq x^2 \leq 16 \\ &\iff 2 \leq x \leq 4 \vee -4 \leq x \leq -2, \end{aligned}$$

**Abb. 1.6** Streifen.

c) Für $a \leq b; a, b \in \mathbb{R}$ werden Intervalle definiert:

$$\left. \begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall,} \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned} \right\} \text{halboffene Intervalle.}$$

d) T-Träger: $T := T_1 \cup T_2$ mit

$$T_1 := \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0], \quad T_2 := \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]$$

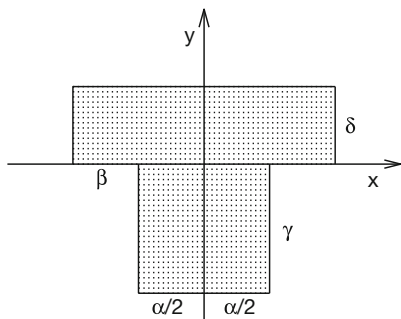


Abb. 1.7 Querschnitt eines T-Trägers.

1.3 Funktionen

Seien D und Z Mengen. Unter einer **Funktion (Abbildung)** von D nach Z verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zuordnet. Wir schreiben dann: $f : D \rightarrow Z$ und $y = f(x)$ oder $f : x \mapsto y$. Man hat also

$$f : D \rightarrow Z \iff \forall x \in D : \exists_1 y \in Z : y = f(x). \quad (1.6)$$

D heißt **Definitionsbereich**, Z heißt **Zielmenge** oder **Bildbereich** von f . Die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times Z \quad (1.7)$$

heißt der **Graph** der Funktion f .

Zu $A \subset D$ heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \quad (1.8)$$

das **Bild** von A unter der Funktion f . Zu $B \subset Z$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\} \quad (1.9)$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f , vgl. Abb. 1.8.

Im Zusammenhang mit Funktionen tritt häufig das Problem der **Lösung bzw. Lösbarkeit von Gleichungen** auf, d. h., zu gegebenem $y \in Z$ wird eine Lösung $x \in D$ der Gleichung $f(x) = y$ gesucht.

Wir sagen:

$f : D \rightarrow Z$ heißt **surjektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *wenigstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, falls also gilt

$$\forall y \in Z \exists x \in D : y = f(x); \quad (1.10)$$

$f : D \rightarrow Z$ heißt **injektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *höchstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, also

$$\forall x_1, x_2 \in D : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2). \quad (1.11)$$