

CARLOS JAVIER ROJAS ÁLVAREZ

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

2^a edición
revisada y aumentada

 **UNIVERSIDAD
DEL NORTE**

Editorial

Introducción a la Geometría

Introducción a la Geometría

Carlos Javier Rojas Álvarez

Barranquilla
COLOMBIA, 2016



Rojas Álvarez, Carlos Javier.

Introducción a la geometría / Carlos Javier Rojas Álvarez.
— Barranquilla, Col. : Editorial Universidad del Norte, 2016.

230 p. : il. ; 24 cm.

Incluye referencias en cada capítulo

ISBN 978-958-741-591-9 (impreso)

ISBN 978-958-741-592-6 (PDF)

1. Geometría--Enseñanza. I. Tít.

(516.007 R741 23 ed.) (CO-BrUNB)



www.uninorte.edu.co

Km 5, vía a Puerto Colombia

A.A. 1569, Barranquilla (Colombia)

Primera edición, junio de 2015

Segunda edición, mayo de 2016

© Universidad del Norte, 2016

Carlos Javier Rojas Álvarez

Coordinación editorial

Zoila Sotomayor O.

Diagramación textos y portada

Munir Kharfan de los Reyes

Corrección de textos

Henry Stein

Hecho en Colombia

Made in Colombia

© Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio reprográfico, fónico o informático así como su transmisión por cualquier medio mecánico o electrónico, fotocopias, microfilm, *offset*, mimeográfico u otros sin autorización previa y escrita de los titulares del *copyright*. La violación de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
-------------------	---

CONCEPTOS PRELIMINARES	5
------------------------------	---

1. Términos primitivos	7
2. Posición relativa de puntos	9
3. Segmento	10
4. Rayos	11
5. Ángulos	12
6. Triángulos	21
7. Cuadriláteros	28
8. Polígonos	30
9. La circunferencia	36
10. Sólidos	39
Bibliografía	54

Unidad 1

SEMEJANZA	55
-----------------	----

Problema	57
1.1 Proporción	58
1.2 Polígonos semejantes	70
1.3 El criterio de semejanza AA	73
1.4 La pendiente de la recta	75
Bibliografía	78

Introducción a la geometría

Unidad 2

PERÍMETRO Y ÁREA.79

Problema	81
2.1 Patrones arbitrarios	83
2.2 Estimación	88
2.3 Área de polígonos	90
2.4 Partes de un círculo	96
Bibliografía	105

Unidad 3

ÁREA Y VOLUMEN 107

Problema	109
3.1 Unidades de volumen	111
3.2 Prismas y pirámides	115
3.3 Cilindros y conos	121
3.4 Tronco de pirámide y de cono	125
Bibliografía	129

Unidad 4

FUNCIONES131

Problema	133
4.1 Conceptos básicos	134
4.2 Funciones como modelos matemáticos	149
Bibliografía	184

Unidad 5

VECTORES. 185

Problema	187
5.1 Escalares y vectores	188
5.2 Componentes de un vector	193
5.3 Vectores unitarios	208
5.4 Suma de vectores	211
Bibliografía	222

INTRODUCCIÓN

Este libro está dirigido a estudiantes de primer semestre de programas como Diseño Industrial y Arquitectura, o a alumnos de secundaria que desean complementar el estudio de la geometría elemental en el colegio.

Este texto no sigue rígidamente la estructura del método axiomático, aunque se parte de los conceptos primitivos en geometría, se sigue con las definiciones y luego con los postulados y teoremas, que son llamados *propiedades*. Ninguno de los teoremas se demuestra, porque el objetivo del texto es aplicar la geometría.

La unidad, Conceptos preliminares, consiste en la exposición de las definiciones y propiedades básicas, que permite plantear problemas de geometría elemental espacial en la unidad 2, sin tener que esperar a la última unidad para ello.

Los cambios en esta segunda edición son:

- Reorganización de las unidades. La de semejanza es ahora la primera unidad y la de vectores, la última.
- Adición de la unidad de Funciones.
- Adición de la sección La pendiente de la recta en la unidad de semejanza.
- Nuevos problemas en la sección de Proporción relativos a la escala.
- Cambios en los problemas de la sección Patrones arbitrarios, que antes se llamaba Unidades de longitud y de área.

- Cambio de problemas en la sección de Estimación y Área de polígonos.
- Nuevos problemas en la sección de Partes de un círculo y Tronco de pirámide y de cono.
- De manera general se hicieron algunas correcciones en el uso de términos.

El propósito de la reorganización de las unidades es darle una secuencia más lógica al estudio de la geometría, y el de la inclusión de la unidad de Funciones (aplicada al perímetro, área y volumen) es ampliar los niveles de conceptualización de perímetro, área y volumen, que son:

1. Recubrimiento.
2. Estimación.
3. Aritmetización o uso de fórmulas.
4. Funciones como modelos matemáticos.
5. Operador.

Este texto incluye los cuatro primeros, el quinto corresponde al Cálculo integral, que está fuera del alcance del texto.

En consecuencia, el contenido del libro está distribuido en las siguientes unidades:

Conceptos preliminares. Contiene desde los conceptos primitivos de la geometría, pasando por las definiciones de segmentos, ángulos, polígonos, circunferencia y sólidos. No contiene aplicaciones. Es como un glosario.

Unidad 1: Semejanza. Contiene las aplicaciones de la proporción, como la escala y la proporción áurea, el criterio de semejanza y la pendiente de la recta.

Unidad 2: Perímetro y área. Contiene una introducción secuenciada del perímetro y del área, partiendo de lo intuitivo (área por recubrimiento, estimación de perímetro y área), luego la secuencia deductiva de las fórmulas de polígonos, para terminar con las fórmulas de perímetro y área de algunas de las partes de un círculo. Algunas de aplicaciones consisten en el cálculo de áreas de moldes planos de poliedros.

Unidad 3: Área y Volumen. Comienza con la definición de unidad cúbica y finaliza con las fórmulas de volumen de prismas, pirámides, cilindros, conos, troncos de pirámide y de conos. No tiene las fórmulas de área lateral y total de los sólidos geométricos porque el objetivo es que los alumnos las calculen como una extensión de las fórmulas de la unidad 2.

Unidad 4: Funciones. Comienza con los conceptos básicos que se deben tener para comprender las funciones como modelos matemáticos, tales como intervalo, función, dominio, etc. Todas las funciones en la sección 4.2 son relativas al perímetro, el área o el volumen. Incluye un procedimiento para comprobar si la función obtenida es válida o no.

Unidad 5: Vectores. En esta unidad se estudian las componentes de los vectores en un sistema rectangular y la suma de dos vectores coordenados.

Las unidades 1-4 tienen la secuencia:

- **Problema.** Consiste en el planteamiento de un problema que conduce al concepto fundamental de la unidad respectiva.
- **Teoría.** Tiene las definiciones y las propiedades de la unidad.

Introducción a la geometría

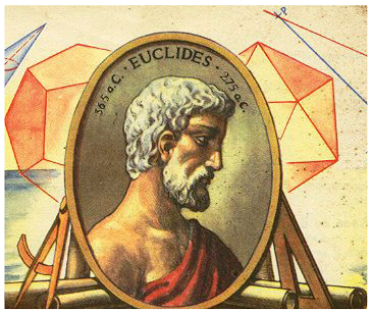
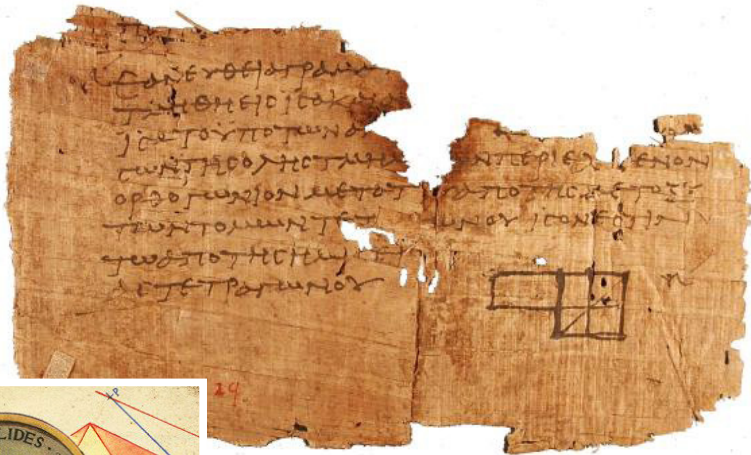
- **Aplicaciones.** Son los problemas para el alumno.
- **Bibliografía.** Es el material consultado para la elaboración de la respectiva unidad.

Las dos unidades que tienen ejemplos son la 4 (Funciones) y la 5 (Vectores); las demás no tienen ejemplos.

CONCEPTOS PRELIMINARES

1. Términos primitivos	7
2. Posición relativa de puntos	9
3. Segmento	10
4. Rayos	11
5. Ángulos	12
6. Triángulos	21
7. Cuadriláteros	28
8. Polígonos	30
9. La circunferencia	36
10. Sólidos	39
Bibliografía	54

RESEÑA HISTÓRICA



Euclides (325-275 a.C.). Primero en la Edad de Oro de la geometría griega. Fundó en Alejandría su escuela. El primero en sistematizar los conocimientos de la geometría, hasta entonces, en lo que hoy conocemos como el método axiomático, en el libro *Los elementos*, por lo que a la geometría se le conoce también como geometría elemental.

1. TÉRMINOS PRIMITIVOS

Geometría: del griego $\gamma\eta$: tierra, $\muετρεω$: medir; etimológicamente significa *medida de la tierra*. Del latín *geometrein*, donde *gaia* o *ge*: tierra, *metrein*: medir.

El **método** axiomático parte de conceptos que no se definen, llamados **términos** primitivos. En función de ellos se formulan las **definiciones**. La combinación de estos dos permite establecer los **postulados**, proposiciones que se admiten como verdaderas. Por último están los **teoremas**, proposiciones que deben ser demostradas a partir de las definiciones, postulados y teoremas (previamente demostrados).

Los términos primitivos en geometría elemental son el punto, la recta y el plano:

TÉRMINO PRIMITIVO 1.1

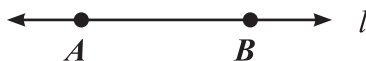
El **punto** solo tiene posición, no tiene medida. Se simboliza con letras mayúsculas.

En la figura de la derecha, el punto A : • A

TÉRMINO PRIMITIVO 1.2

La **recta** es delgada, no tiene longitud finita. Se simboliza con letras minúsculas cursivas como l , m , n , etc.; o con dos letras mayúsculas, que corresponden a dos puntos de ella, con un símbolo de flecha doble sobre dichas letras.

En la figura se observa la recta l o \overline{AB} .



TÉRMINO PRIMITIVO 1.3

El **plano** es delgado y se extiende indefinidamente en todas las direcciones. Se simboliza con letras mayúsculas.

En la figura se muestra el plano P .

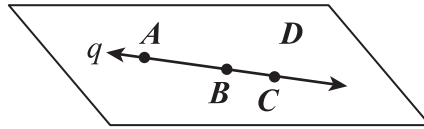


2. POSICIÓN RELATIVA DE PUNTOS

DEFINICIÓN 2.1

Los puntos de un conjunto son **colineales** o están **alineados** si y solo si hay una recta que los contiene a todos.

La figura muestra que los puntos A, B y C son colineales porque están en la recta q ; mientras que los puntos A, B, C y D no son colineales porque no pertenecen a la recta q .



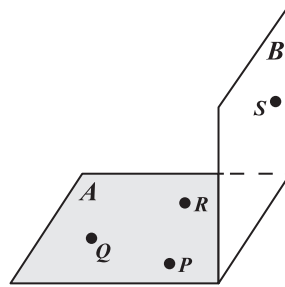
$$A, B, C \in q$$

$$D \notin q$$

DEFINICIÓN 2.2

Los puntos de un conjunto son **coplanares** si y solo si hay un plano que los contiene a todos.

En la figura se observa, los puntos Q, P y R son coplanares porque están en el plano A ; mientras que los puntos Q, P, R y S no son coplanares porque no están, todos, en el plano A .

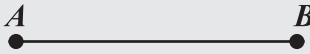


□

3. SEGMENTO

DEFINICIÓN 3.1

El **segmento** \overline{AB} es el conjunto de los puntos A y B , y de todos los puntos que están entre A y B . A y B se llaman los **extremos** de \overline{AB} .



La **distancia** AB es la longitud del segmento \overline{AB} .

En la figura D está entre A y B , cuando estos tres puntos son colineales y $AD + DB = AB$. Se denota por $A-D-B$.



DEFINICIÓN 3.2

Segmentos congruentes son segmentos que tienen la misma longitud.

En la figura los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} son congruentes. Se simboliza por $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $AB = CD$. El símbolo \cong se lee "es congruente con".



DEFINICIÓN 3.3

El **punto medio** de un segmento es el punto que está entre los extremos de un segmento y que lo divide en dos segmentos congruentes.

En la figura, M es el punto medio de \overline{AB} .



□

4. RAYOS

DEFINICIÓN 4.1

El **rayo** \overrightarrow{AB} es un subconjunto de una recta formado por la unión del segmento \overline{AB} y el conjunto de todos los puntos que están del mismo lado de A , como B . El punto A se llama el extremo de \overrightarrow{AB} .



DEFINICIÓN 4.2

Rayos opuestos son rayos que tienen el mismo extremo, pero que van en direcciones opuestas.

En la figura, los rayos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son rayos opuestos.



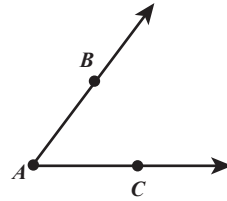
□

5. ÁNGULOS

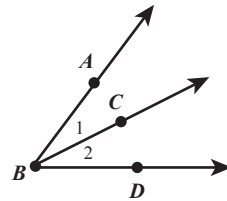
DEFINICIÓN 5.1

Un **ángulo** es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo extremo, denominado el vértice.

Los ángulos se denotan por el vértice: $\angle BAC$, o con tres letras, siendo la del medio la correspondiente al vértice: $\angle BAC$.



Cuando puede haber ambigüedad al escribir $\angle B$ y no se quiere usar las tres letras, se puede denotar un ángulo específico con números, así: $\angle 1$ es el $\angle BAC$ y el $\angle 2$ es el $\angle CBD$.

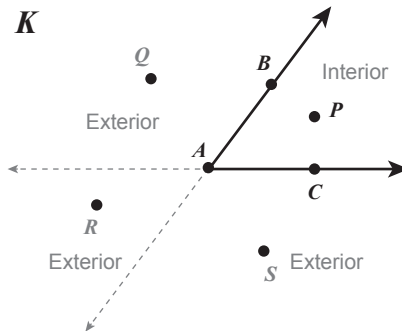


DEFINICIÓN 5.2

Sea $\angle BAC$ un ángulo en el plano K . Un punto P está en el **interior** del $\angle BAC$, si:

1. P y B están del mismo lado de la recta \overleftrightarrow{AC} , y
2. P y C están del mismo lado de la recta \overleftrightarrow{AB} .

El **exterior** del $\angle BAC$ es el conjunto de todos los puntos de K que no están en el ángulo y que tampoco están en su interior. En la figura de la derecha, los puntos Q , R y S no están en el interior del $\angle BAC$ ni sobre él; por lo tanto están en el exterior del $\angle BAC$. El punto P está en el interior del $\angle BAC$.



DEFINICIÓN 5.3

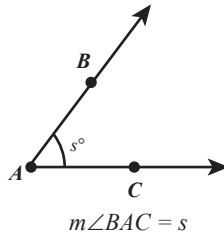
Una unidad de medida de ángulos es el **grado**, se simboliza con el supraíndice $^{\circ}$.

PROPIEDAD 5.1

A cada $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.

DEFINICIÓN 5.4

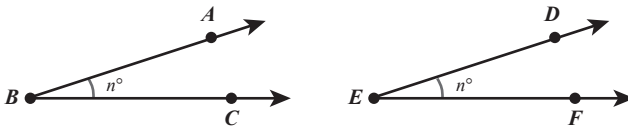
El número dado en la propiedad 1 se llama la **medida** del $\angle BAC$, y se escribe $m\angle BAC$.



DEFINICIÓN 5.5

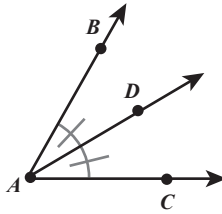
Ángulos congruentes son ángulos que tienen la misma medida.

En la figura, los ángulos $\angle B$ y $\angle E$ son congruentes porque tienen la misma medida y se denota por $\angle B \cong \angle E$ o $m\angle B = \angle E$.



DEFINICIÓN 5.6

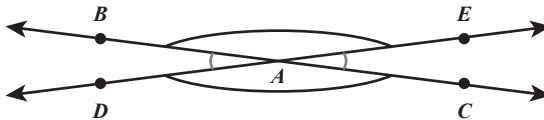
Sea D un punto en el interior del $\angle BAC$, de tal forma que $\angle BAD \cong \angle DAC$. \overrightarrow{AD} se llama la **bisectriz** del $\angle BAC$ porque lo biseca.



DEFINICIÓN 5.7

Ángulos opuestos por el vértice, son ángulos cuyos lados los forman dos pares de rayos opuestos.

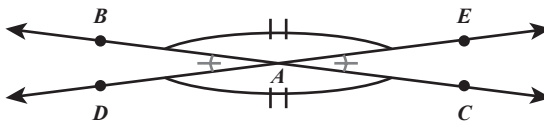
En la figura, los ángulos $\angle BAD$ y $\angle EAC$ son opuestos por el vértice. Similarmente, $\angle BAE$ y $\angle DAC$ también lo son.



PROPIEDAD 5.2

Los **ángulos opuestos por el vértice** son ángulos congruentes.

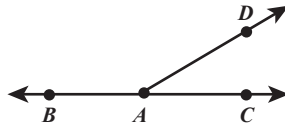
En la figura, $\angle BAD$ y $\angle EAC$ son opuestos por el vértice; entonces, por este teorema: $\angle BAD \cong \angle EAC$. Similarmente, $\angle DAC \cong \angle BAE$.



DEFINICIÓN 5.8

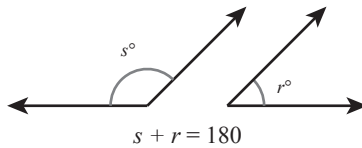
Un **par lineal de ángulos** es un par de ángulos con un lado común, y los otros dos lados los forman rayos opuestos.

En la figura, los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal.



DEFINICIÓN 5.9

Un par de **ángulos suplementarios** son ángulos, cuya suma de sus medidas es 180. Cada ángulo es el **suplemento** del otro.



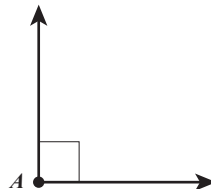
PROPIEDAD 5.3

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

DEFINICIÓN 5.10

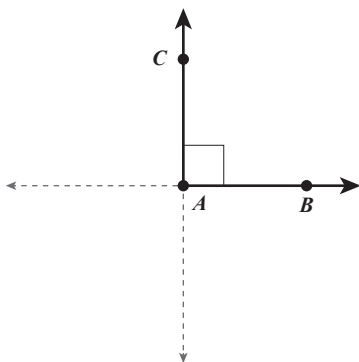
Un **ángulo recto** es un ángulo cuya medida es 90° .

El $\angle A$ es recto porque $m\angle A = 90$.



DEFINICIÓN 5.11

\overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son **perpendiculares** si y solo si forman un ángulo recto. Se simboliza $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Se utiliza el mismo término y la misma notación para rectas y segmentos, de tal forma que si el $\angle CAB$ es un ángulo recto, se escribe: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, y así sucesivamente para cualquier combinación de segmentos, rayos o rectas.



DEFINICIÓN 5.12

Un par de **ángulos complementarios** son ángulos, cuya suma de sus medidas es 90. Cada ángulo es el **complemento** del otro.

