



Dieter Richter

# Ephemeriden- rechnung Schritt für Schritt

Sonnenaufgang und Co.  
bestimmen leicht gemacht

 Springer Spektrum

---

# Ephemeridenrechnung Schritt für Schritt

---

Dieter Richter

# Ephemeridenrechnung Schritt für Schritt

Sonnenaufgang und Co. bestimmen  
leicht gemacht

Dr. Dieter Richter  
Hennigsdorf  
Deutschland

Die Darstellung von manchen Formeln und Strukturelementen war in einigen elektronischen Ausgaben nicht korrekt, dies ist nun korrigiert. Wir bitten damit verbundene Unannehmlichkeiten zu entschuldigen und danken den Lesern für Hinweise.

ISBN 978-3-662-54715-1                      ISBN 978-3-662-54716-8 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-54716-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Margit Maly

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

## Geleitwort

Bestimmt ist es den meisten an naturwissenschaftlichen Fragestellungen interessierten Menschen schon als Kind so gegangen, dass sie sich bei vielen Erscheinungen fragten, woher man denn das Detailwissen bekommt und wie einzelne natürliche Ereignisse in der Realität funktionieren. Dies könnte beispielsweise auch auf die Fragen zutreffen, wann denn am Morgen die Sonne auf- und am Abend wieder untergeht. Wie kann man ermitteln, wann Sonnen- und Mondfinsternisse stattfinden und wann welche Planeten oder auch andere kosmische Objekte zu sehen sein werden?

Es war am 15. November 2012 morgens um 7 Uhr. Der Autor dieses Buches stand bei klarem Himmel im Freien, sah den Jupiter im Westen und die Venus im Osten am Himmel stehen. Das war der Anlass, die Position der Planeten in Abhängigkeit von der Zeit auszurechnen und hoffentlich gut verständlich aufzuschreiben. Für diese Berechnungen ist eigentlich alles bekannt.

Warum nun der Untertitel „Sonnenaufgang und Co. bestimmen leicht gemacht“? Zum einen soll versucht werden, die Gedankengänge, beginnend mit den Kepler'schen Gesetzen bis zum „Endergebnis“, den Koordinaten im Horizontsystem, in einer in sich geschlossenen Darstellung möglichst einfach und gut verständlich zu beschreiben. Die Kepler'schen Gesetze sind die grundlegenden Beziehungen zur Berechnung der Planetenbahnen, und die Koordinaten im Horizontsystem sind die Winkel, die an der Montierung eines Fernrohres einzustellen sind, um einen bestimmten Planeten zu sehen. Dabei sollte der mathematische Apparat nicht komplizierter als notwendig sein. Zum anderen wird eine Reihe von Erscheinungen und Einflüssen auf die Planetenbahnen bzw. Positionsangaben nicht berücksichtigt. Diese Effekte werden in einem separaten Abschnitt beschrieben, wo auch versucht wird, deren Größen abzuschätzen. Es werden nur kosmische Objekte beschrieben, die sich gemäß dem ersten Kepler'schen Gesetz auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen. Objekte, die mit ihrer Bahn eine Parabel beschreiben, werden nicht berücksichtigt.

An Stellen, wo es notwendig erschien, werden Tabellen mit Kenngrößen bzw. Messungen, die Planetenbahnen beschreiben, eingefügt. Diese dienen dem Nachvollziehen der Rechenbeispiele. Es soll keine Sammlung von Kenngrößen kosmischer Objekte sein. Dafür gibt es in der entsprechenden Fachliteratur und auch im Internet umfangreiche Zusammenstellungen.

Das Buch wendet sich an Studenten der Naturwissenschaften, Amateurastronomen und all die Interessierten, die schon immer einmal erfahren wollten, woher man denn weiß, wann die Sonne aufgeht.

Hennigsdorf, November 2016

Dieter Richter

---

# Vorwort

Das Hauptanliegen des ersten Kapitels ist es, die Positionen der Planeten unseres Sonnensystems von unterschiedlichen Positionen aus zu einem vorgegebenen Zeitpunkt zu bestimmen. Dabei wird jeder Planet auf seiner Bahn um die Sonne einzeln betrachtet. Das zu lösende Problem wird auch als Zweikörperproblem (Planet - Sonne) bezeichnet. Weil es sich um die Bestimmung der Planetenbahnen auf der Basis der Kepler'schen Gesetze handelt, wird es auch Kepler-Problem genannt.

Einleitend werden die Kepler'schen Gesetze beschrieben. Wer sich die Mühe macht, die Herleitungen dieser Gesetze zu verstehen, wird Freude daran haben, dass es ausgehend von einfachen Annahmen möglich ist, zu zeigen, dass sich die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne bewegen. Weiterhin werden die Zusammenhänge zwischen dem von der Sonne zum Planeten gehenden Strahl und der von ihm überstrichenen Fläche sowie den Umlaufzeiten einzelner Planeten und der Länge ihrer großen Halbachsen hergeleitet.

Im nachfolgenden Abschnitt wird eine Anzahl von Kenngrößen beschrieben, die zur Charakterisierung der Planetenbahnen notwendig sind. Auch ohne das Ziel, diese Bahnen zu berechnen, gibt es darüber hinaus Fragestellungen für den naturwissenschaftlich Interessierten. Unter anderem werden folgende Probleme behandelt: Wie zählt man Tage unter Berücksichtigung der Kalenderumstellung vom julianischen zum gregorianischen Kalender und der meist aller vier Jahre vorkommenden Schaltjahre? Wie kann man, wenn man die Sonne als Bezugspunkt, sozusagen als Beobachtersposition, wählt, von dort aus den Abstand zum Planeten bestimmen, wenn als Messgeräte lediglich ein Winkelmesser und eine Uhr zur Verfügung stehen. Wie kann man die Bahngeschwindigkeit von Planeten bestimmen?

Danach wird die Position eines Planeten in seiner Bahnebene von der Sonne aus gesehen berechnet. Dazu ist es notwendig, die sogenannte Kepler-Gleichung aufzustellen und zu lösen. So erhalten wir einen wichtigen Parameter, die exzentrische Anomalie. Diese Größe ermöglicht es uns, den Abstand des Planeten von der Sonne und seine Bahngeschwindigkeit zu berechnen. Das Ergebnis dieses Abschnitts ist die Position des Planeten in der Bahnebene unter Verwendung räumlicher Polarkoordinaten.

Zur Erleichterung beim Nachvollziehen der nachfolgenden Rechnungen wird die Berechnung von Polarkoordinaten aus den bekannten kartesischen Koordinaten eines Bezugssystems gezeigt. Anschließend wird erläutert, wie zuerst die

kartesischen Koordinaten und anschließend die räumlichen Polarkoordinaten in einem anderen Bezugssystem errechnet werden. Das bedeutet im Allgemeinen den Wechsel in eine andere Bezugsebene verbunden mit einer neuen Bezugsrichtung.

Auf diese Weise erhalten wir über eine Reihe von Umformungen letztendlich die räumlichen Koordinaten im Horizontsystem, also die Winkel, nach denen wir unser Fernrohr justieren müssen, um einen bestimmten Planeten zu sehen.

Eine Ausnahme von unserer Betrachtung der Planetenberechnung als Zweikörpersystem stellt die Bestimmung der Mondkoordinaten von der Erde aus gesehen dar. Die Mondbahn ist kompliziert, so dass der Einfluss von anderen kosmischen Objekten, außer der Erde, um die der Mond sich ja nun bewegt, nicht vernachlässigt werden kann.

Die Rechnungen werden allgemeingültig durchgeführt. Zur besseren Veranschaulichung jedoch werden die Zahlenrechnung für die Venus, als inneren Planeten, oder die Erde, und, falls es zum Verständnis beitragen sollte, auch für den Jupiter, der sich deutlich außerhalb der Erdbahn bewegt, ausgeführt.

Für Rechnungen, bei denen sich die Sonne im Koordinatenursprung befindet, werden auch die Werte für die Erde angegeben. Wenn, wie im Titel genannt, auch der Sonnenaufgang berechnet werden soll, muss man natürlich wissen, wo sich die Erde zu dem gegebenen Zeitpunkt befindet. Da wir auf der Erde leben, wird sich bei Fortführung der Rechnungen der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt und später auch auf der Erdoberfläche befinden. Dann werden wir zusätzlich zu Venus und Jupiter auch die entsprechenden Koordinaten der Sonne berechnen. Die Darstellung endet mit der Auflistung aller wichtigen Formeln und einer zusammenfassenden Übersicht aller Bezugssysteme.

In einem weiteren Abschnitt werden Beispiele zur Anwendung des beschriebenen Formalismus vorgestellt. Sie dienen zum einen dem besseren Verständnis der im ersten Kapitel dargestellten Rechenmethode und Begriffe (z. B. Abschn. 3.3). Zum anderen werden auch neue Erkenntnisse vermittelt, die über die eigentliche Ephemeridenrechnung hinausgehen (z. B. Abschn. 3.4).

Im Anhang werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen beschrieben, die zum Verständnis der Rechnungen notwendig sind.

Um Positionsangaben machen zu können, müssen der Beobachtungsort und die Beobachtungszeit bekannt sein. Wenn keine anderen Angaben genannt werden, ist der Beobachtungszeitpunkt der 15. November 2012 morgens um 6:00 Uhr Weltzeit, also 7:00 Uhr mitteleuropäischer Zeit. Die geographischen Koordinaten des Beobachtungsortes betragen  $13:12,5^\circ$  östlicher Länge und  $52:36,9^\circ$  nördlicher Breite.

Alle Rechnungen wurden mit mindesten 16stelliger Genauigkeit durchgeführt. Es werden jedoch in Abhängigkeit vom jeweiligen Problem weniger Stellen angegeben. Das Ziel der Ausführungen besteht vorrangig darin, die Rechenwege nachvollziehbar darzustellen und nicht ein Ergebnis mit einer scheinbar sehr hohen Genauigkeit zu präsentieren. Die Einschränkungen, die sich aus der Behandlung der Positionsbestimmung als Zweikörperproblem ergeben, lassen ohnehin kein allzu genaues Ergebnis zu.



---

## Danksagung

Ich möchte Frau Marika Richter für das Lektorieren sowie Herrn Dr. Alexander Donat und Herrn Arne Skerra für die Anregungen und fachliche Durchsicht des Manuskripts danken. Für mögliche Rechen- und Schreibfehler ist jedoch allein der Autor verantwortlich.

Weiterhin geht mein Dank an Frau Sandra Grundmann, Frau Margit Maly sowie an Frau Stella Schmoll von der Springer-Verlag GmbH für die wertvollen Hinweise zur Gestaltung des Buches.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Position der Planeten</b> .....	1
1.1 Die Kepler'schen Gesetze.....	1
1.1.1 Herleitung des ersten Kepler'schen Gesetzes .....	2
1.1.2 Herleitung des zweiten Kepler'schen Gesetzes .....	5
1.1.3 Herleitung des dritten Kepler'schen Gesetzes .....	7
1.2 Die Bahnparameter und Bahnelemente der Planeten.....	8
1.2.1 Julianisches Datum und Julianisches Jahrhundert .....	9
1.2.2 Große Halbachse und Exzentrizität .....	12
1.2.3 Mittlere Anomalie .....	13
1.2.4 Winkelgeschwindigkeit .....	14
1.2.5 Winkel zwischen Bahnebene und Ebene der Ekliptik .....	14
1.2.6 Länge des aufsteigenden Knotens .....	16
1.2.7 Argument und Länge des Perihels .....	16
1.2.8 Mittlere Länge .....	18
1.2.9 Wahre Anomalie .....	18
1.2.9.1 Herleitung der Kepler-Gleichung .....	19
1.2.9.2 Lösung der Kepler-Gleichung .....	21
1.2.9.3 Berechnung der wahren Anomalie .....	23
1.2.10 Abstand Planet-Sonne .....	25
1.2.11 Bahngeschwindigkeit .....	26
1.2.12 Argument der Breite .....	29
1.2.13 Zusammenstellung der bisher ermittelten Bahnparameter .....	30
Literatur .....	30
<b>2 Koordinatentransformationen</b> .....	33
2.1 Rechenmethode zur Koordinatentransformation .....	34
2.2 Die Bahnebene .....	37
2.3 Koordinatentransformationen von der Bahnebene zur Ebene der Ekliptik .....	37
2.4 Der Übergang von heliozentrischen zu geozentrischen ekliptikalen Koordinaten .....	44
2.4.1 Die Transformation .....	45

2.4.2	Die Position der Sonne .....	48
2.4.3	Die Position des Mondes .....	49
2.5	Transformation von geozentrisch ekliptikalen zu geozentrisch äquatorialen Koordinaten .....	51
2.6	Die Transformation von geozentrisch äquatorialen zu topozentrischen Koordinaten.....	55
2.6.1	Die geozentrische Breite und der Abstand zum Erdmittelpunkt .....	55
2.6.2	Die Sternzeit .....	56
2.6.2.1	Sternzeit für Null Uhr Greenwicher Zeit am Beobachtungstag .....	58
2.6.2.2	Sternzeit für die Beobachtungszeit am Beobachtungstag .....	59
2.6.2.3	Sternzeit unter Berücksichtigung des Beobachtungsortes .....	59
2.6.2.4	Transformation von geozentrisch äquatorialen Koordinaten zu topozentrischen Koordinaten .....	60
2.7	Die Transformation von geozentrisch äquatorialen Koordinaten zum Horizontsystem .....	62
2.7.1	Stundenwinkel .....	63
2.7.2	Berechnung von Azimut und Höhe .....	64
2.7.2.1	Berechnung mit Rotationsmatrix .....	64
2.7.2.2	Auswertung eines sphärischen Dreiecks .....	66
2.7.2.3	Die Position von Venus, Jupiter und der Sonne .....	67
2.8	Das Horizontsystem.....	68
2.9	Vereinfachungen .....	69
2.10	Zusammenstellungen .....	73
2.10.1	Kenngrößen .....	74
2.10.2	Rechenschritte .....	74
2.10.3	Koordinatensysteme .....	79
	Literatur .....	79
<b>3</b>	<b>Anwendungsbeispiele der Ephemeridenrechnung .....</b>	<b>81</b>
3.1	Der Sonnenstand .....	81
3.1.1	Der Sonnenstand in Abhängigkeit von der Zeit .....	82
3.1.2	Die Berücksichtigung der Lichtlaufzeit .....	84
3.1.3	Der Azimut in Abhängigkeit von der Zeit .....	86
3.1.4	Die Zeitgleichung .....	87
3.2	Wann ist Frühlingsanfang? .....	87
3.3	Die Position der Erde und der Venus.....	90
3.4	Sternkarte .....	92
3.4.1	Die Sternscheibe und die Deckscheibe .....	93
3.4.1.1	Zirkumpolarkreis und Himmelsäquator .....	95
3.4.1.2	Ekliptik .....	95

---

3.4.1.3	Der zu einem bestimmten Zeitpunkt sichtbare Teil des Himmels .....	96
3.4.2	Einzeichnen von Beobachtungen in die Grundscheibe der Sternkarte .....	99
3.5	Finsternisse .....	101
3.5.1	Mondfinsternis .....	101
3.5.1.1	Die Bahnen des Mondes und der Sonne .....	102
3.5.1.2	Bestimmung des Ortes des Kernschattens .....	103
3.5.1.3	Die Bahn des Mondes im Kernschatten .....	104
3.5.2	Sonnenfinsternis .....	106
3.6	Analemma .....	107
	Literatur .....	110
<b>Anhang A</b>	.....	111
A.1	Newtonsche Näherungsverfahren .....	111
A.2	Sinussatz und Kosinussatz der sphärischen Geometrie .....	112
A.3	Quadratische Interpolation .....	113
A.3.1	Die Interpolationsgleichung .....	113
A.3.2	Schnittstellen von Parabeln .....	114
A.4	Zylinderkoordinaten.....	114
A.5	Ellipse .....	117
	Literatur .....	118
<b>Sachverzeichnis</b>	.....	119

---

## 1.1 Die Kepler'schen Gesetze

Die Kepler'schen Gesetze<sup>1</sup> sind die Grundlage der Berechnung von Planetenbahnen. Kepler fand sie durch die Auswertung von Datenmaterial früherer astronomischer Beobachtungen. Die Gesetze wurden vielfach beschrieben (z. B. [1], Seite 52; [2], Seite 112 oder [3], Seite 86 ff. sowie auf vielen Seiten des Internets). Sie lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Dabei befindet sich die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse.
2. Der Strahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in der gleichen Zeit gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten einzelner Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

Zunächst erfolgt die Herleitung dieser Gesetze. Trotz unseres Vorhabens „Ephemeridenrechnung leicht gemacht“, sind diese Herleitungen notwendig, denn sie bilden die Grundlage für alle folgenden mathematisch-physikalischen Überlegungen.

Die ersten beiden Gesetze behandeln ein Zweikörperproblem. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Körper als Punktmassen betrachtet werden können. Es wirken keine zusätzlichen Gravitationskräfte, die von anderen Körpern ausgehen, welche die Bahn des ein Zentralobjekt „umrundenden“ Körpers beeinflussen könnten. Selbstredend und historisch bedingt ist der Schwerpunkt unserer Betrachtungen unser Sonnensystem. Doch die Gesetze sind allgemeingültig und nicht auf dieses beschränkt. Im kosmischen Maßstab bekommen jedoch relativistische Effekte zunehmend eine Bedeutung. Deshalb muss weiterhin vorausgesetzt werden, dass der Einfluss durch relativistische Effekte vernachlässigt werden kann.

Das dritte Gesetz behandelt ein Mehrkörperproblem, was an einem Beispiel veranschaulicht werden soll. Die Erde bewegt sich um die Sonne. Von der Erde aus

---

<sup>1</sup>Johannes Kepler, von 1571 bis 1630; Mathematiker, Astronom, Astrologe, Optiker.

bestimmen wir die Umlaufzeit eines weiteren Planeten, des dritten Körpers, und können mit dem dritten Kepler'schen Gesetz seinen Abstand zur Sonne berechnen ([4], Seite 2 und 3).

Bei unseren Betrachtungen dieser Gesetze wollen wir nicht vergessen, dass es sich um die *Kepler'schen* Gesetze handelt. Er kannte weder die Gravitationskräfte zwischen den Planeten und der Sonne noch die zwischen den Planeten untereinander. Die Gesetze der Bewegung von Massen unter dem Einfluss von Zentralkräften waren unbekannt. Wie im Abschn. 1.1.2 ausführlich begründet wird, kam deshalb bei der Herleitung des dritten Gesetzes ein vereinfachter Ansatz zur mathematischen Formulierung des Problems zur Anwendung. Mit unserem heutigen Wissen könnten wir diese Gesetze exakter formulieren, aber es sind, wie gesagt, die *Kepler'schen* Gesetze.

### 1.1.1 Herleitung des ersten Kepler'schen Gesetzes

Das Ziel der Herleitung des ersten Kepler'schen Gesetzes besteht darin, zu zeigen, dass sich die Bahnkurve der Bewegung eines Planeten um die Sonne mit der Gleichung eines Kegelschnittes, in diesem Fall mit der Gleichung einer Ellipse, beschreiben lässt. Prinzipiell können dabei beliebige Koordinatensysteme verwendet werden. Aufgrund der Problemstellung bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an. Die Herleitung besteht aus zwei Teilschritten.

1. Erstellen einer Gleichung, die den Zusammenhang der Länge des Strahls  $r$  von einem Brennpunkt aus zum Planeten vom überstrichenen Winkel  $\varphi$  beschreibt (Abb. 1.1).
2. Wir gehen von der Gleichung einer Ellipse (eine detaillierte Beschreibung befindet sich im Abschn. A.5 ab Seite 117) in Zylinderkoordinaten oder ebenen Polarkoordinaten aus. Das ist in diesem Fall dasselbe, denn wir betrachten

**Abb. 1.1** Planetenbahnellipse in Polarkoordinaten

