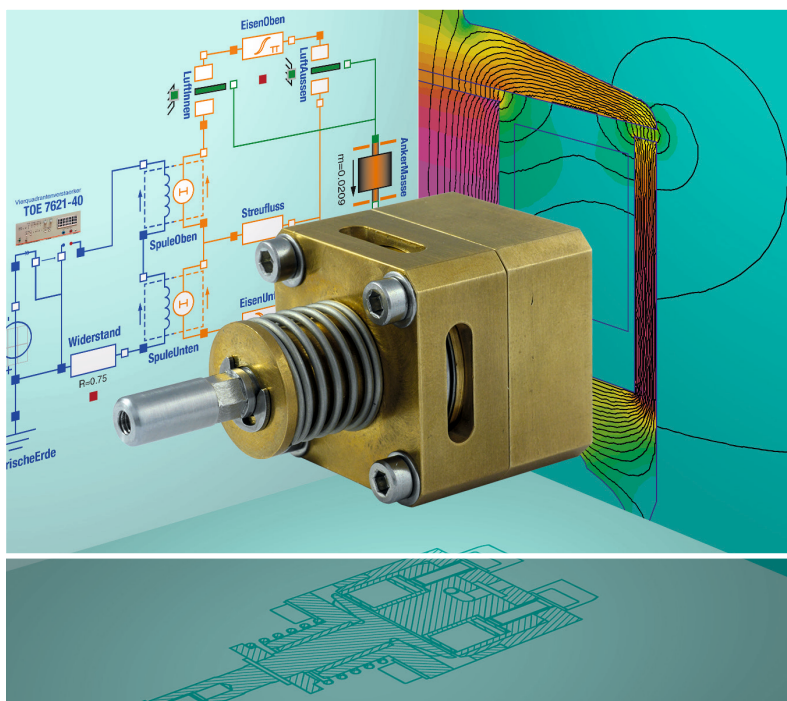


Herbert Schmidt

Simulation von Elektromagneten mit FEMM und Modelica



HANSER

Schmidt

Simulation von Elektromagneten mit FEMM und Modelica



Blieben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Herbert Schmidt

Simulation von Elektromagneten mit FEMM und Modelica

HANSER

Autor:

Prof. Dr. Herbert Schmidt

Hochschule Bochum, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2019 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Satz: Herbert Schmidt

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-45417-0

E-Book-ISBN 978-3-446-46070-6

Vorwort

Elektromagnete gehören seit bald zweihundert Jahren zum Standard-Repertoire der Antriebstechnik. Konzeptionell sind sie einfach zu verstehen. Die Wirkprinzipien sind in der Vergangenheit bereits im Detail beschrieben worden. Vom Kinderspielzeug bis zur spezialisierten Fachliteratur wird man auf jedem Komplexitätsniveau Information finden. Die Idee zu diesem Buch erwächst daher nicht aus dem Wunsch, bislang geheimes Wissen zu eröffnen.

Vielmehr aus der Beobachtung, dass sich Ingenieure im Berufsalltag oft anders dem Thema nähern als das vielleicht ein typischer universitärer Kurs tun würde. Klassisch ist es richtig, das Wissen hierarchisch zu organisieren und ein schematisches Anwendungsbeispiel am Schluss zu skizzieren. In der technischen Realität ist jedoch die Anwendung der Ausgangspunkt, und das Wissen wird punktuell zusammengesucht, wo es benötigt wird. Und tatsächlich kann man auf diese Weise viel und effizient lernen, falls erfahrene Kollegen bereitstehen, die man bei Bedarf befragen kann. Allerdings lernt man zuerst einmal nur zu dem konkreten Projekt etwas, an dem man gerade arbeitet. Nach ein paar Projekten strukturieren sich die Erfahrungen im Kopf, und es bilden sich die Querverbindungen heraus, die ein klassischer akademischer Kurs in den Vordergrund stellen würde. Es sind einfach zwei verschiedene Arten zu lernen.

Diese Art problembezogenen Lernens ist für unterschiedliche Wissensbereiche unterschiedlich geeignet. Im technischen Bereich benötigt man häufig Grundlagen, die sich nur schwierig in dieser Weise aufbereiten lassen. Das spricht jedoch nicht grundsätzlich gegen den Ansatz. Denn es gibt auch weite Technikbereiche, die man im praktischen Alltag durchaus am Beispiel erlernen kann. In diesem Buch möchte ich diesen Ansatz probieren für die Auslegung von Elektromagneten. Inspiriert ist es von der Beobachtung, dass man in der praktischen Arbeit teilweise ebenso viel oder mehr mit konkreten Projektdokumentationen (beispielsweise Abschlussarbeiten) arbeitet wie mit eigentlichen Lehrbüchern. In diesen Dokumentationen werden die allgemeinen Wahrheiten angewendet, und häufig findet man auch Hinweise auf Probleme, die in der Kompaktheit von Lehrbüchern nicht in den Vordergrund gestellt werden. In diesem Buch nutze ich zusätzlich die Möglichkeit, diejenigen Bereiche etwas detaillierter abzudecken, in denen absehbar Fragen auftreten könnten.

Gut geeignet erscheint mir dieser Ansatz besonders für einen kompakten Wissensbereich wie es beispielsweise Elektromagnete sind. Interessant dabei ist die Vielfalt unterschiedlicher Disziplinen, die in einem einzelnen Entwicklungsprozess zusammen kommen. Wir benötigen Grundlagen aus dem Bereich der Mathematik, der Elektrodynamik und der Werkstoffkunde. Diese Grundlagen werden in den ersten Kapiteln zusammengefasst. Sobald wir an die eigentliche Beschreibung von Magnetkreisen gehen, wird der Stoff entlang eines praktischen Beispiels entwickelt, das wir schließlich vollständig aufbauen und prüfen werden. Wir legen dabei keinen Fokus auf eine Typenkunde oder die Vollständigkeit im technischen Sinne. Wir konzentrieren uns auf ein einzelnes Beispiel, einen Flachankermagneten, und diskutieren es im vollen Umfang bis zur Prüfung und dem quantitativen Vergleich experimenteller Ergebnisse mit Simulationsergebnissen. Das gibt auch Gelegenheit, geeignete Prüftechnik zu skizzieren.

Wir verwenden in der Berechnung numerische Werkzeuge, die frei verfügbar sind, so dass der Leser jederzeit in der Lage ist, dieselben oder ähnliche Modelle auf dem eigenen Rechner aufzubauen und zu studieren. Für die geometriebasierte Simulation verwenden wir das Werkzeug Finite Element Method Magnetics, FEMM. Für die gleichungsbasierte Simulation verwenden wir das Werkzeug OpenModelica Connection Editor, OMEdit. Damit stehen zwei numerische Methoden zur Verfügung, die sich im Entwurfsprozess ergänzen.

Die Fertigung eines Funktionsmusters setzt natürlich eine geeignete feinmechanische Werkstatt voraus. Die Prüfung des Funktionsmusters kann in unterschiedlicher Weise geschehen. So, wie sie hier beschrieben ist, setzt sie einige spezialisierte Geräte voraus, die sicherlich nicht in jedem Fall verfügbar sein werden. Diese recht aufwendige Prüfung erlaubt es aber, die berechneten Ergebnisse sehr detailliert mit dem realen Verhalten zu vergleichen und damit einen möglichst guten Eindruck von den Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten Berechnungsmethoden zu geben. Ich habe die Hoffnung, dass sich diese Darstellung als nützlich und lesbar erweisen wird. Falls sie darüber hinaus motiviert, sich selbst an einer solchen Auslegung zu versuchen, dann hat sie ihre Aufgabe mehr als erfüllt.

Dieses Buch ist in Teilen ähnlich aufgebaut wie eine akademische Abschlussarbeit, auch wenn sein Thema keinen Forschungscharakter hat. Die Arbeit daran war von ähnlichen Höhen und Tiefen begleitet wie eine solche Abschlussarbeit. Dieses Erlebnis war für mich (einige Jahre nach den eigenen Abschlussarbeiten) sehr spannend. Ich möchte mich bedanken bei den Menschen, die mich dabei unterstützt haben. Frau Dr.-Ing. Silvia Hacia für die Durchführung der meisten beschriebenen Experimente und ihre Unterstützung in der praktischen Umsetzung dieses Projekts. Herrn Detlef Herkt und seinem Team in der mechanischen Werkstatt der Hochschule Bochum für die zerspanende Fertigung der Zeichnungsteile. Herrn Jan Weber, B.Eng., für seine Hilfsbereitschaft und technische Unterstützung. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Jörg Frochte für seine Unterstützung im Zusammenhang mit allem, was die numerischen Werkzeuge betrifft. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Jörg Frochte, Frau Dr.-Ing. Silvia Hacia und Herrn Jan Falkenhain, Dipl.-Ing., für das aufmerksame Korrekturlesen und die vielen Hinweise, die zur Verbesserung des Manuskripts beigetragen haben. Und nicht zuletzt Frau Mirja Werner, M.A., vom Hanser Verlag, mit der ich das Konzept dieses Buches entwickelt habe, sowie Frau Natalia Silakova, Dipl.-Ing., und Frau Christina Kubiak, ebenfalls vom Hanser Verlag, für das Lektorat und die freundliche Unterstützung während des Schreibens.

Abschließend möchte ich dieses Buch meinem Großvater Herbert Schmidt widmen, der Feinmechaniker war, und meinem Vater Uwe Werner Herbert Schmidt, der Elektromaschinenbauer ist. Heute sitze ich hier, und schreibe als Physiker ein Buch über einen Themenkomplex, der gerade in der Schnittmenge ihrer beider Berufsfelder liegt. Das Universum hat Humor. Dafür bin ich dankbar. Mir bleibt zu sagen, dass mir die Arbeit an diesem Buch viel Freude bereitet hat. Und ich hoffe, dass auch Sie Freude daran haben werden.

Mettmann-Metzkausen, im März 2019

Herbert Schmidt

Inhalt

1	Grundlagen	11
1.1	Hinweise zur Notation	11
1.2	Grundbegriffe der Vektorrechnung	13
1.3	Grundbegriffe in Magnetkreisen	24
1.4	Energien im Magnetkreis	37
1.4.1	Lange dünne Spule	37
1.4.2	Verketteter Fluss und Induktivität	38
1.4.3	Magnetische Energiedichte	41
2	Werkstoffe	45
2.1	Grundbegriffe magnetischer Werkstoffe	45
2.1.1	Einteilung nach magnetischer Ordnung	45
2.1.2	Einteilung nach Form der Magnetisierungskurve	49
2.2	Beschreibung magnetischer Werkstoffe	55
2.2.1	Sättigungspolarisation	55
2.2.2	Remanenz und Koerzitivfeldstärke	56
2.2.3	Maximalpermeabilität	58
2.2.4	Resistivität	59
2.2.5	Verlustleistung	60
2.2.6	Weitere Eigenschaften	62
2.3	Prüfung magnetischer Werkstoffe	64
2.3.1	Magnetisierungskennlinie	64
2.3.2	Koerzitivfeldstärke	67
2.3.3	Verlustleistung	69
2.3.4	Resistivität	70
2.4	Ausgewählte magnetische Werkstoffe	72
2.4.1	Eisen und Stahl	72
2.4.2	Chrom-Stähle	75
2.4.3	Silizium-Stähle	77
2.4.4	Weichmagnetische Verbundwerkstoffe	82
2.4.5	Nickel und Nickel-Legierungen	83
2.4.6	Kobalt und Kobalt-Legierungen	86

3	Gleichungsbasierte Magnetkreisberechnung	89
3.1	Netzwerke magnetischer Flussröhren	89
3.1.1	Unbekannter Arbeitspunkt eines nicht-linearen Materials	95
3.1.2	Mehrere Maschen bei quasi-linearem Verhalten	98
3.1.3	Mehrere Maschen bei nicht-linearem Verhalten	100
3.2	OpenModelica Connection Editor	103
3.2.1	Eigene Werkstoffe anlegen	105
3.2.2	Modell des magnetischen Teilkreises	109
3.2.3	Modell des elektrischen Teilkreises	115
4	Geometriebasierte Magnetkreisberechnung	121
4.1	Numerische Lösung der Maxwellgleichungen	121
4.1.1	Basisgleichung (2D kartesisch)	123
4.1.2	Basisgleichung (2D zylindrisch)	125
4.1.3	Basisgleichung (vereinfacht)	125
4.1.4	Finite-Differenzen-Methode (FDM)	126
4.1.5	Finite-Elemente-Methode: Formulierung des Energiefunktionalis	127
4.1.6	Finite-Elemente-Methode: Formulierung der Ansatzfunktion	130
4.1.7	Finite-Elemente-Methode: Fehlerabschätzung	132
4.2	Finite Element Method Magnetics	133
4.2.1	Pre-Processing	134
4.2.2	Processing	144
4.2.3	Post-Processing	144
5	Detaillierung der Modelle	151
5.1	Detaillierung des Netzwerkmodells	151
5.1.1	Streuflusspfad ① Innenpol – Außenpol	153
5.1.2	Streuflusspfad ② Innenpol – Anker	157
5.1.3	Streuflusspfad ③ Außenpol – Anker (innen)	158
5.1.4	Streuflusspfad ④ Außenpol – Anker (außen)	159
5.1.5	Streuflusspfad ⑤ Joch – Anker	160
5.1.6	Feinabgleich	160
5.2	Konstruktion	163
5.2.1	Ankergruppe	165
5.2.2	Jochgruppe	167
5.2.3	Adaptergruppe	170
5.2.4	Kupferspule	174
5.3	Detaillierung des FEM-Modells	177
5.4	Lua-Scripting in FEMM	181
5.5	Ansteuerung in OMEdit	186

6	Magnetkraftberechnung	199
6.1	Kraft aus dem FEM-Modell	199
6.1.1	Volumenintegral über die magnetischen Co-Energiedichte	200
6.1.2	Flächenintegral über den Maxwellschen Spannungstensor	203
6.1.3	Integral über den gewichteten Maxwellschen Spannungstensor	208
6.1.4	Ausgehend von der Lorentz-Kraft	212
6.2	Umsetzung in FEMM	213
6.3	Kraft aus dem Netzwerkmodell	219
6.3.1	Kraftberechnung für eine einzelne Flussröhre	219
6.3.2	Kraftberechnung in magnetischen Netzwerken	220
6.3.3	Fluss in Bewegungsrichtung	223
6.3.4	Fluss quer zur Bewegungsrichtung	224
6.3.5	Beispiel: Tauchankermagnet	225
6.4	Umsetzung in OMEdit	233
6.4.1	Feste Ankerposition	234
6.4.2	Freie Ankerbewegung	240
6.5	Kombination Netzwerk- und FEM-Modell	244
7	Funktionsprüfung	249
7.1	Prüfungen vor der Montage	249
7.1.1	Träge Masse	249
7.1.2	Federkennlinie	250
7.2	Thermisches Systemverhalten	251
7.3	Statisches Systemverhalten	254
7.4	Dynamisches Systemverhalten	259
7.4.1	Strom-geregelter Betrieb	260
7.4.2	Spannungs-geregelter Betrieb	269
8	Eisenverluste	275
8.1	Hystereseverluste	275
8.1.1	Analytische Betrachtung	276
8.1.2	Hystereseverluste im Netzwerkmodell	279
8.1.3	Umsetzung in OMEdit	281
8.2	Wirbelstromverluste	285
8.2.1	Wirbelstromverluste im FEM-Modell	285
8.2.2	Wirbelstromverluste im Netzwerkmodell	289
8.3	Abschluss	296

Formelzeichen und Abkürzungen	297
Literatur	303
Index	305

1

Grundlagen

Für die Auslegung eines Elektromagneten ist ein Verständnis der Gesetzmäßigkeiten des Elektromagnetismus erforderlich. Nun kann dieses Verständnis in sehr unterschiedlicher Tiefe angestrebt werden. Welche Tiefe für Sie beim ersten Lesen wünschenswert ist, hängt davon ab, welchen Kenntnisstand Sie bereits mitbringen. Wenn Sie sich noch nie mit Elektromagnetismus beschäftigt haben, besteht die Möglichkeit, dass eine rein formale Einführung Ihre Aufmerksamkeit von einem qualitativen Verständnis der Zusammenhänge ablenken könnte. Gleichzeitig erscheint es nicht angemessen, auf eine formale Einführung vollständig zu verzichten.

Ich versuche hier, unterschiedlichen Bedarfen gerecht zu werden. Wir beginnen in Abschnitt 1.1 mit einigen Hinweisen zur Notation. Er stellt unabhängig von Ihrem Kenntnisstand eine wichtige Referenz dar, um in der weiteren Lektüre Unklarheiten zu vermeiden. Abschnitt 1.2 stellt in knapper Form einige Elemente der Vektoralgebra und Vektoranalysis zusammen, auf die wir im Weiteren immer wieder zurückgreifen werden. Sollten Sie beim ersten Durchblättern den Eindruck erhalten, dass dieser Abschnitt über Ihr Interesse an mathematischen Formalismen hinausgeht, können Sie in Abschnitt 1.3 wieder einsteigen. Ab hier und für den Rest des Buches bin ich in der Darstellung bestrebt, die Zusammenhänge sowohl anschaulich darzustellen, als auch formal sauber (in dem Maße, in dem es hier sinnvoll erscheint). Soweit es später zusammenhängende Passagen gibt, die nur mit einer sauberen mathematischen Behandlung sinnvoll entwickelt werden können, sind diese Passagen nach Möglichkeit entsprechend markiert, so dass Sie gegebenenfalls an späterer Stelle wieder einsteigen können. Wie stets ist ein rein anschaulicher Zugang letztendlich begrenzt. Dennoch erlaubt er ein weitgehendes Verständnis der grundsätzlichen Zusammenhänge und recht weitgehend auch ein zielführendes Arbeiten mit Magnetkreisen.

■ 1.1 Hinweise zur Notation

Da wir es immer wieder mit mathematischen Formeln und physikalischen Messwerten zu tun haben werden, ist es erforderlich, ein paar Regeln vorab zu vereinbaren.

Skalare werden kursiv gesetzt, Vektoren aufrecht und fett. r bezeichnet beispielsweise den Betrag des Vektors $\mathbf{r}$. $\mathbf{e}_r$ bezeichnet den zum Vektor $\mathbf{r}$ gehörenden Einheitsvektor:

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

$\mathbf{r}^\top$ bezeichnet die **Transponierte** zum Vektor $\mathbf{r}$, $M^\top$ die Transponierte zur Matrix M . Matrizen werden typografischen nicht gesondert hervorgehoben.

Die imaginäre Einheit wird aufrecht geschrieben:

$$i = \sqrt{-1} \quad (1.2)$$

Formelzeichen können durch Indizes modifiziert werden:

$$R_{\text{Mittel}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (1.3)$$

Soweit die Indizes selbst den Charakter von Formelzeichen haben, werden sie kursiv gesetzt (hier das i). Soweit die Indizes den Charakter beschreibender Textelemente haben, werden sie gerade gesetzt (hier das Mittel). Falls nichts anderes vereinbart ist, bedeuten x , y , und z die einzelnen **kartesischen Koordinaten Abszisse, Ordinate und Applikate** des Vektors $\mathbf{r}$. Alternativ und anwendbar auch für jegliche anderen Vektoren werden die drei Koordinaten durchindiziert als $r_1 \hat{=} x$, $r_2 \hat{=} y$ und $r_3 \hat{=} z$. Die Relation $\hat{=}$ wird für eine identische Entsprechung verwendet, im Experiment auch für gleichwertige Ergebnisse (beispielsweise $1 \text{ V} \hat{=} 1 \text{ A}$ über einen $1 \text{ }\Omega$ -Messwiderstand). ϑ und φ werden für den **Polarwinkel** (in Kugelkoordinaten) und **Azimutwinkel** (in Polar- und Kugelkoordinaten) verwendet. Der Radius in Kugel- und Zylinderkoordinaten wird als r notiert. z bedeutet auch in Zylinderkoordinaten die Applikate. Unabhängig davon werden dieselben Formelzeichen in technischen Zusammenhängen auch anders verwendet, beispielsweise wird ϑ für die Temperatur, gemessen in Grad Celsius, verwendet.

Die Notation $\mathcal{V}$ für ein Volumen, $\mathcal{A}$ für eine Fläche und $\mathcal{L}$ für eine Linie zeigt an, dass es sich um Objekte im Raum handelt, die weder durch einen einzelnen Skalar, noch durch einen einzelnen Vektor zutreffend beschrieben werden können. Falls $\mathcal{A}$ speziell eine ebene Fläche ist, bezeichnet $\mathbf{n}_A$ den zugehörigen Normaleneinheitsvektor und A den Flächeninhalt. In diesem Fall kann die Fläche durch den Vektor:

$$\mathbf{A} = A\mathbf{n}_A \quad (1.4)$$

vollständig beschrieben werden. Für beliebige, gekrümmte Flächen ist eine solche Beschreibung nur lokal möglich, beispielsweise in Flächenintegralen im infinitesimal kleinen Flächenelement $d\mathbf{A}$. Die Notation $\partial\mathcal{V}$ meint die Oberfläche des Volumens $\mathcal{V}$, entsprechend meint $\partial\mathcal{A}$ die Randlinie der Fläche $\mathcal{A}$.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher, beispielsweise $\Phi(t, x)$, unterscheiden wir partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (1.5)$$

von totalen Ableitungen:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (1.6)$$

Die partielle Ableitung berücksichtigt nur explizite Abhängigkeiten (von der Größe, nach der abgeleitet wird), die totale Ableitung auch implizite Abhängigkeiten. Der zweite Term auf der rechten Seite entsteht durch eine implizite Abhängigkeit $\Phi = \Phi(x)$ und $x = x(t)$.

Speziell totale Ableitungen nach der Zeit schreiben wir mit einem Punktakzent:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.7)$$

Es werden teilweise Formeln alternativ als Produkt und zusätzlich als Integral notiert. Die Darstellung als Produkt erhöht die Anschaulichkeit, welcher Zusammenhang durch eine bestimmte Formel beschrieben wird. Diese Darstellung ist in der Regel nur in bestimmten geometrischen Sonderfällen gültig. Daher wird alternativ eine Integraldarstellung gegeben, die allgemeinere Gültigkeit hat, jedoch tendenziell das Verständnis erschweren könnte (besonders dann, wenn noch nicht sehr viel Routine im Umgang mit Integralen vorhanden ist).

Die Formelzeichen wählen wir in Übereinstimmung mit dem Internationalen Elektrotechnischen Wörterbuch, engl. *International Electrotechnical Vocabulary*, IEV (DIN IEC 60 050). Fallweise weichen wir von den Empfehlungen geringfügig ab, soweit es der konsistenten Lesbarkeit dient. Beispielsweise empfiehlt das IEV sowohl für die elektrische Ladungsdichte als auch für den spezifischen elektrischen Widerstand (Resistivität) das Zeichen ρ . Wir verwenden in diesem Beispiel modifizierte Zeichen, ρ_Q und ρ_{el} , entsprechend für den spezifischen magnetischen Widerstand (Reluktivität) ρ_m , soweit andernfalls eine Verwechslung möglich wäre. Ein Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen findet sich auf Seite 297ff.

Die Einheiten der physikalischen Größen werden entsprechend dem internationalen Einheitensystem gewählt (*Système International d'Unités*, SI). Ihre Zeichen werden aufrecht geschrieben.

Als Dezimaltrennzeichen verwenden wir den Punkt.

Besondere Elemente werden im Fließtext durch Textboxen hervorgehoben:



In Boxen wie dieser werden Definitionen und wichtige Aussagen hervorgehoben.



In Boxen wie dieser werden Beispielrechnungen vorgeführt.

■ 1.2 Grundbegriffe der Vektorrechnung

Dieses Buch beschäftigt sich mit einem sehr konkreten, technischen Thema. Dieses Thema basiert jedoch auf dem Elektromagnetismus, und es ist daher für eine quantitative, formale Beschreibung unumgänglich, sich mit Vektoralgebra und Vektoranalysis zu beschäftigen. Die folgenden Elemente aus der Vektorrechnung werden wir verwenden.

Wir gehen stets vom Vektorraum $\mathbb{R}^3$ aus. Einzelne Definitionen könnten unmittelbar auf beliebige Mannigfaltigkeiten erweitert werden. Als Mannigfaltigkeit bezeichnet man in der Mathematik eine bestimmte Verallgemeinerung des $\mathbb{R}^n$. Da wir uns nur für den $\mathbb{R}^3$ selbst interessieren, ist diese Allgemeinheit für unsere Zwecke hier nicht erforderlich oder hilfreich. Die Definitionen sind nicht an größter mathematischer Allgemeinheit orientiert, sondern fokussiert auf die Bedarfe im Zusammenhang mit dem Thema des vorliegenden Buches. Wir diskutieren nicht die notwendigen Bedingungen, damit manche der folgenden Sätze gelten (betreffend bspw. die Topologie und Differenzierbarkeit der zugrunde liegenden Räume und Abbildungen), sondern gehen davon aus, dass in den technisch interessierenden Fällen die mathematisch notwendigen Randbedingungen erfüllt sind.

Dieser Abschnitt hat nicht die Absicht, Ihnen diese Zusammenhänge zu *erklären*. Das wäre in so knapper Art kaum möglich. Vielmehr ist die Absicht, bestimmte Zusammenhänge, die immer wieder benötigt werden, übersichtlich zusammenzustellen. Sollten Ihnen bei der Durchsicht einzelne Zusammenhänge auffallen, die Ihnen noch fremd sind, oder mit denen Sie sich unsicher fühlen, wird an dieser Stelle auf die umfangreiche Literatur verwiesen. Ein Einstieg könnte beispielsweise [Meyberg 1995] sein.

Wir werden immer wieder Größen verwenden, die über dem betrachteten Raum $\mathbb{R}^3$ veränderlich sind. Handelt es sich um eine skalarwertige Größe, formulieren wir sie als Skalarfeld.



Definition **Skalarfeld** oder **Skalarenfeld**

Als Skalarfeld V bezeichnet man eine Abbildung, die jedem Vektor $\mathbf{r}$ einen Skalar $V(\mathbf{r})$ zuordnet:

$$V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Handelt es sich um eine vektorwertige Größe, formulieren wir sie als Vektorfeld.



Definition **Vektorfeld**

Als Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ bezeichnet man eine Abbildung, die jedem Vektor $\mathbf{r}$ einen Vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ zuordnet:

$$\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.9)$$

In der Arbeit mit räumlichen Ableitungen müssen immer wieder Operationen komponentenweise ausgeführt werden. Um diese Art der Berechnung effizient notieren zu können, werden die folgenden Schreibweisen verwendet.



Definition **Einsteinsche Summenkonvention**

Über doppelte, identisch vorkommende Indizes innerhalb eines Produkts wird summiert.

Summiert wird also automatisch über $b_i c_i$, nicht aber über $b_i c_j$ oder über $b_i + c_i$. Diese Konvention ist dann sinnvoll anwendbar, wenn die Grenzen der Summation aus dem Kontext offensichtlich sind. In unserem Fall sind stets Summen über die drei Raumrichtungen gemeint, beispielsweise:

$$a = \mathbf{bc} = \sum_{i=1}^3 b_i c_i \quad \text{geschrieben als:} \quad a = b_i c_i \quad (1.10)$$

Weiter nutzen wir zwei Symbole, die im Zusammenhang mit einer **Orthonormalbasis** des $\mathbb{R}^3$ (**kartesische Koordinaten**) sehr nützlich sind.


Definition Kronecker-Symbol oder Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für: } i = j \\ 0 & \text{für: } i \neq j \end{cases} \quad (1.11)$$

In kartesischen Koordinaten kann man gleichwertig schreiben:

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.12)$$

Beispielsweise ergibt sich für ein **Skalarprodukt**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \mathbf{c} \quad \text{geschrieben als: } a = b_i c_j \delta_{ij} \quad (1.13)$$


Definition Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für: drei unterschiedliche Indizes, zyklisch angeordnet} \\ -1 & \text{für: drei unterschiedliche Indizes, nicht zyklisch angeordnet} \\ 0 & \text{für: ein Index taucht doppelt auf} \end{cases} \quad (1.14)$$

Zyklische Anordnungen der drei Indizes sind 123, 231 und 312. Antizyklische Anordnungen entstehen durch eine einzelne Vertauschung, also 213, 132 und 321.

In kartesischen Koordinaten kann man gleichwertig schreiben:

$$\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad (1.15)$$

Beispielsweise ergibt sich für ein **Kreuzprodukt**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \text{geschrieben als: } \mathbf{e}_i a_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i b_j c_k \quad (1.16)$$

und für ein **Spatprodukt**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \quad \text{geschrieben als: } a = \epsilon_{ijk} b_i c_j d_k \quad (1.17)$$

Das Kronecker-Symbol und das Levi-Civita-Symbole tauchen gemeinsam in der **Graßmann-Identität** auf:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (1.18)$$

Angewendet auf ein doppeltes Kreuzprodukt entspricht dem:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.19)$$

Diese Darstellung illustriert, warum die Graßmann-Identität teilweise auch als **bac-cab-Formel** bezeichnet wird.

Bis hierher haben wir einige Aspekte der Verknüpfung und Darstellungen von Feldgrößen zusammengefasst. In der Elektrodynamik werden wir häufig Ableitungen von Feldgrößen benötigen. Im Folgenden werden wir daher einige Aspekte der Vektoranalysis zusammenfassen.

**Satz von Schwarz**

Für mehrfach stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mehrerer Variablen x_i hat die Ableitungsreihenfolge keinen Einfluss auf das Ergebnis.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (1.20)$$

In vielen Fällen können Rechnungen geschickt in **kartesischen Koordinaten** ausgeführt werden. Speziell hierfür ist die folgende Definition nützlich.

**Definition Nabla-Operator**

Als Nabla-Operator bezeichnet man einen symbolischen Vektor, dessen Komponenten den partiellen Ableitungen nach den drei Raumrichtungen entsprechen:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention können wir das schreiben als:

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

Ausgehend davon finden im $\mathbb{R}^3$ drei verschiedene räumliche Ableitungen häufige Verwendung.

**Definition Gradient**

Der Gradient ist ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewendet wird und in ein Vektorfeld abbildet.

Die Richtung seiner Bildelemente ist senkrecht auf **Niveaulinien** der Urbildmenge (Linien, die Punkte gleichen Bildwertes des Skalarfeldes verbinden). Der Betrag seiner Bildelemente entspricht der größten Änderungsrate des Skalarfeldes im Urbildpunkt.

In kartesischen Koordinaten wird der Gradient berechnet als skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit dem Skalarfeld:

$$\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention können wir das schreiben als:

$$\nabla V = \mathbf{e}_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1.24)$$

Im Beispiel der potentiellen Energie in der Mechanik (Skalarfeld E_{pot}) entsprechen die Niveaulinien den Höhenlinien, und die Kraft (Vektorfeld $\mathbf{F}$) zeigt in die Richtung, in die Wasser fließen würde:

$$\text{grad } E_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \quad (1.25)$$

Das Minus erhält man, da Wasser *bergab* fließt.

Neben dem Gradienten, der auf ein Skalarfeld angewendet wird, gibt es zwei verschiedene räumliche Ableitungen, die auf Vektorfelder angewendet werden können.



Definition Rotation

Die Rotation ist ein Differentialoperator, der auf ein Vektorfeld angewendet wird und in ein Vektorfeld abbildet. Der zugrunde liegende Vektorraum ist in beiden Fällen der $\mathbb{R}^3$.

Für einen starren Wirbel im Vektorfeld entspricht die Rotation einem konstanten Vektor, der parallel zur Symmetrieachse des Wirbels liegt.

In kartesischen Koordinaten wird die Rotation berechnet als Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention können wir das schreiben als:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (1.27)$$

Wir betrachten ein Beispiel aus der Fluidodynamik. Die Rotation des Geschwindigkeitsfelds (Vektorfeld $\mathbf{v}$) in einem Wirbel entspricht der doppelten Winkelgeschwindigkeit (Vektorfeld $\boldsymbol{\omega}$):

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} \quad (1.28)$$

Die Formulierung mithilfe des Nabla-Operators ist auf kartesische Koordinaten begrenzt. In Zylinderkoordinaten wird die Rotation stattdessen berechnet aus:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad \text{mit: } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.29)$$



Definition **Divergenz**

Die Divergenz ist ein Differentialoperator, der auf ein Vektorfeld angewendet wird und in ein Skalarfeld abbildet.

Die Divergenz gibt die **Quelldichte** des Vektorfelds an. Negative **Quellen** bezeichnet man als **Senken**.

In kartesischen Koordinaten wird die Divergenz berechnet als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.30)$$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention können wir das schreiben als:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (1.31)$$

Im Beispiel der Massenstromdichte (Vektorfeld $\mathbf{j}$) in der Fluiddynamik entspricht die Divergenz der negativen zeitlichen Änderung der volumenbezogenen Masse beziehungsweise Dichte (Skalarfeld $\dot{\rho}$). Diesen Zusammenhang bezeichnet man als **Kontinuitätsgleichung (Fluidynamik)**:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\dot{\rho} \quad (1.32)$$

Es können verschiedene Rechenregeln ausgehend von diesen Differentialoperatoren formuliert werden, von denen uns die folgenden nützlich sein werden.



Rechenregeln für Differentialoperatoren

Es gilt mit U einem Skalarfeld, sowie $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ Vektorfeldern:

$$\operatorname{grad} (\mathbf{VW}) = (\mathbf{V} \operatorname{grad}) \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{W} + (\mathbf{W} \operatorname{grad}) \mathbf{V} + \mathbf{W} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} \quad (1.33)$$

$$\operatorname{rot} (U\mathbf{V}) = U \operatorname{rot} \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \operatorname{grad} U \quad (1.34)$$

$$\operatorname{div} (U\mathbf{V}) = \mathbf{V} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (1.35)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V} \quad (1.36)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0 \quad (1.37)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U \quad (1.38)$$

Diese Rechenregeln lassen sich unmittelbar auf elementare Zusammenhänge aus der Analysis zurückführen. Um etwas Routine mit der **Einsteinschen Summenkonvention** zu erhalten, werden wir das explizit ausführen. Sie können alternativ unmittelbar zur Definition Gleichung (1.48) vorspringen.

Gleichung (1.33) lässt sich geschickt zeigen, indem wir zunächst auf der rechten Seite starten. Wir gehen von den ersten beiden Termen aus:

$$(\mathbf{V} \operatorname{grad}) \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{W} = \left(V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) W_i \mathbf{e}_i + \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i V_j \left(\epsilon_{mnk} \frac{\partial W_n}{\partial x_m} \right) \quad (1.39)$$

Im zweiten Term auf der rechten Seite vertauschen wir die Indizes im zweiten **Levi-Civita-Symbol** zyklisch und identifizieren dann die **Graßmann-Identität**:

$$(\mathbf{V} \operatorname{grad}) \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{W} = V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn}}_{=\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}} V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_n}{\partial x_m} \quad (1.40)$$

$$= V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + \delta_{im} \delta_{jn} V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_n}{\partial x_m} - \delta_{in} \delta_{jm} V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_n}{\partial x_m} \quad (1.41)$$

Wir führen nun die Summen über m und n in den hinteren Termen aus und erhalten:

$$(\mathbf{V} \operatorname{grad}) \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{W} = V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \quad (1.42)$$

da sich der erste und der dritte Term gegenseitig wegheben. Wir schreiben die linke Seite von Gleichung (1.33) unter Verwendung der Produktregel der Analysis aus:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{VW}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (V_j W_j) = V_j \mathbf{e}_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} + W_j \mathbf{e}_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (1.43)$$

Auf der rechten Seite finden wir zwei Terme der Form, die wir in Gleichung (1.42) erhalten haben. Wir setzen Gleichung (1.42) in Gleichung (1.43) ein und erhalten Gleichung (1.33). $\square$

Für Gleichung (1.34) schreiben wir die Rotation unter Verwendung des **Levi-Civita-Symbols** aus, wenden die Produktregel aus der Analysis an und tauschen das Vorzeichen im zweiten Term, um eine Indexvertauschung im **Levi-Civita-Symbol** vornehmen zu können:

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{V}) = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} (U V_j) = U \underbrace{\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial V_j}{\partial x_i}}_{=\operatorname{rot} \mathbf{V}} - \epsilon_{kji} \mathbf{e}_j V_j \frac{\partial U}{\partial x_i} = U \operatorname{rot} \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \operatorname{grad} U \quad \square \quad (1.44)$$

Gleichung (1.35) lässt sich einfacher zeigen:

$$\nabla(U\mathbf{V}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (U V_j \mathbf{e}_j) = V_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + U \underbrace{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i}}_{=\delta_{ij}} = \mathbf{V}(\nabla U) + U(\nabla \mathbf{V}) \quad \square \quad (1.45)$$

Verwendet wurden neben der gewöhnlichen Produktregel der Differentialrechnung nur die Darstellung des **Nabla-Operators** und des **Kronecker-Symbols**.

Entsprechend kann Gleichung (1.36) unter Verwendung der **Graßmann-Identität** gezeigt werden. Auch Gleichung (1.37) schreibt sich unter Verwendung des **Levi-Civita-Symbols** unmittelbar aus:

$$\nabla \times (\nabla U) = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U \right) = -\epsilon_{jik} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U \right) = -\epsilon_{jik} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} U \right) \quad (1.46)$$

Für das zweite Gleichheitszeichen wurde die definierende Eigenschaft des **Levi-Cevita-Symbols** verwendet (Vorzeichenwechsel bei einer einzelnen Vertauschung von Indizes). Für das dritte Gleichheitszeichen wurde der **Satz von Schwarz** verwendet (partielle Ableitungen vertauschen). Wenn wir nun im letzten Term die willkürlich gewählten Bezeichnungen der Indizes tauschen (über alle wird innerhalb des Terms summiert), erhalten wir:

$$\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U \right) = -\epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} U \right) \Rightarrow \nabla \times (\nabla U) = 0 \quad \square \quad (1.47)$$

Gleichung (1.38) stellt selbst eine Definition dar.



Definition **Laplace-Operator**

$$\Delta = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.48)$$

Damit haben wir die notwendigen Begriffe beieinander, um eine für die Elektrodynamik grundlegende mathematische Erkenntnis zu formulieren.



Helmholtz-Theorem oder **Fundamentalsatz der Vektoranalysis**

Ein allgemeines Vektorfeld $\mathbf{V}$ kann eindeutig als Superposition eines wirbelfreien Quellenfeldes $\mathbf{V}_q$ und eines quellfreien Wirbelfeldes $\mathbf{V}_w$ dargestellt werden:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_q + \mathbf{V}_w \quad (1.49)$$

Wir werden sehen, dass dieser Satz nützlich angewendet werden kann auf magnetische und elektrische Feldlinien. Beide können grundsätzlich nur eine quellen- und eine wirbelartige Natur haben. Es gibt nichts drittes – das ist die Aussage des Helmholtz-Theorems. Speziell für magnetische Feldlinien gilt, dass sie *ausschließlich* eine wirbelartige Natur haben. Elektrische Feldlinien können quellen- und wirbelartiges Verhalten vereinen.

Ein wirbelfreies Quellfeld lässt sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen (skalares Potential U_q ; das Vorzeichen entspricht üblicher Konvention):

$$\mathbf{V}_q = -\text{grad } U_q \quad (1.50)$$

Falls $\mathbf{V}_q$ speziell ein Kraftfeld ist, nennt man es in diesem Fall **konservativ**. U_q entspricht in diesem Fall der **potentiellen Energie** (nur für konservative Kräfte kann eine potentielle Energie angegeben werden).

Ein quellfreies Wirbelfeld lässt sich als Rotation eines Vektorfeldes darstellen (Vektorpotential $\mathbf{U}_w$):

$$\mathbf{V}_w = \text{rot } \mathbf{U}_w \quad (1.51)$$

Damit kann das Helmholtz-Theorem geschrieben werden als:

$$\mathbf{V} = -\text{grad } U_q + \text{rot } \mathbf{U}_w \quad (1.52)$$

Da sich die Elektrodynamik mit den Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder beschäftigt, und beide dem Helmholtz-Theorem genügen, ergibt sich die Notwendigkeit von genau vier Feldgleichungen. Für jedes Feld wird eine Gleichung benötigt, die die Quellen des Feldes beschreibt und eine, die die Wirbel des Feldes beschreibt. Diese Gleichungen bezeichnet man als **Maxwell-Gleichungen**. Ihre Zählung ist nicht standardisiert. Wir gehen hier von folgender Anordnung aus:

1. Quellen des elektrischen Feldes
2. Quellen des magnetischen Feldes
3. Wirbel des elektrischen Feldes
4. Wirbel des magnetischen Feldes

Abschließend sollen noch zwei sehr nützliche Integralsätze notiert werden. Beide sind Spezialfälle des **Satzes von Stokes**, der für n -dimensionale Mannigfaltigkeiten formuliert ist, und den wir hier in dieser Allgemeinheit selbst nicht benötigen. Verwenden werden wir im Folgenden immer wieder zwei Spezialfälle, die sich für eine Fläche beziehungsweise ein Volumen im $\mathbb{R}^3$ ergeben.



Stokesscher Integralsatz oder Satz von Kelvin-Stokes

Das Ringintegral des Vektorfeldes $\mathbf{V}$ über den geschlossenen Rand der Fläche $\mathcal{A}$ ist ebenso groß wie das Flächenintegral der Rotation des Vektorfeldes über diese Fläche selbst.

$$\int_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \mathbf{V} \, d\mathbf{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{V} \, d\mathbf{r} \quad (1.53)$$

In der Elektrodynamik erhält man damit beispielsweise aus der **3. Maxwellgleichung**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (1.54)$$

das **Faradaysche Induktionsgesetz** in der kompakten Form, wie man es üblicherweise zuerst kennen lernt:

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} \quad (1.55)$$

Dabei ist $\mathbf{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathbf{B}$ die magnetische Flussdichte, U_{ind} die induzierte Spannung und Φ der magnetische Fluss (wir werden die Zusammenhänge weiter unten im Detail betrachten und die für uns relevanten Größen alle explizit einführen). Um das einzusehen, integriert man über eine beliebige Fläche und wendet den Stokesschen Integralsatz an. Wir beginnen mit der linken Seite von Gleichung (1.54):

$$\int_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = U_{\text{ind}} \quad (1.56)$$

Dabei wurde verwendet, dass elektrische Spannungen definiert sind als Gradient der elektrischen Feldstärke. Wir gehen von einer festen Geometrie aus, also von einer zeitlich unverän-

derlichen Fläche $\mathcal{A}$, und schreiben für die rechte Seite von Gleichung (1.54):

$$-\int_{\mathcal{A}} \frac{d}{dt} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \Phi = -\dot{\Phi} \quad (1.57)$$

Die zeitliche Ableitung und die räumliche Integration darf dabei unter Nutzung des Satzes von Schwarz vertauscht werden, weil das Integrationsgebiet $\mathcal{A}$ konstant ist. Für das zweite Gleichheitszeichen wurde die Definition der magnetischen Flussdichte verwendet (vgl. Gleichung (1.75) weiter unten).

Integriert man nun Gleichung (1.54) über die Fläche $\mathcal{A}$ und setzt Gleichungen (1.56) und (1.57) ein, so erhält man unmittelbar Gleichung (1.55). Die wesentlichen Umformungen werden dabei durch den Stokesschen Integralsatz sowie den Satz von Schwarz ermöglicht.

Für die Arbeit mit Volumenintegralen ist als zweiter Spezialfall des Satzes von Stokes schließlich der folgende Integralsatz nützlich.



Gaußscher Integralsatz

Das Flächenintegral des Vektorfelds $\mathbf{V}$ über die geschlossene Oberfläche des Volumens $\mathcal{V}$ ist ebenso groß wie das Volumenintegral der Divergenz des Vektorfeldes über dieses Volumen selbst.

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{V} \, dV = \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{V} \, d\mathbf{A} \quad (1.58)$$

In der Elektrotechnik erhält man auf diese Weise beispielsweise aus der **Kontinuitätsgleichung (Elektrodynamik)**:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\dot{\rho}_Q \quad (1.59)$$

das **1. Kirchhoffsche Gesetz** beziehungsweise die **Kirchhoffsche Knotenregel**:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1.60)$$

Dabei ist:

$$\mathbf{J} = \rho_Q \mathbf{v} \quad (1.61)$$

die Leitungsstromdichte mit ρ_Q der volumenbezogenen elektrischen Ladung (Ladungsdichte) und $\mathbf{v}$ dem Vektorfeld der Geschwindigkeiten, mit denen sich diese Ladungen bewegen. Die I_i sind n Zweigströme, die sich in einem Knoten eines Gleichstromnetzwerks treffen. Um das 1. Kirchhoffsche Gesetz einzusehen, integriert man über ein Volumen, das genau den betrachteten Knoten enthält, aber keine Bauelemente, die Ladung speichern können (beispielsweise Kondensatoren). Wir beginnen mit der linken Seite von Gleichung (1.59):

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{J} \, dV = \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{J} \, d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (1.62)$$

Dabei wurde verwendet, dass sich in einem Gleichstromnetzwerk das Integral über die Leitungsstromdichte als Summe über Zweigströme darstellen lässt. Ebenso verwenden wir auf der rechten Seite von Gleichung (1.59) den definierenden Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und Ladungsdichte:

$$Q = \int_V \rho_Q dV \quad (1.63)$$

so dass Einsetzen in das Volumenintegral von Gleichung (1.59) unmittelbar die Knotenregel (1.60) liefert, da per Voraussetzung der Knoten keine Ladung speichern kann ($Q = 0$). Wieder folgt der Zusammenhang ausschließlich aus definierenden Gleichungen für die verwendeten Größen, während die wesentliche Umformung durch den Gaussischen Integralsatz ermöglicht wird.

Ein weiteres Beispiel illustriert die Nützlichkeit dieses Satzes. Für die **Coulombkraft** zwischen zwei elektrischen Ladungen q und Q gilt das **Coulombsche Gesetz**:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r = q\mathbf{E} \quad (1.64)$$

mit ϵ_0 der **elektrischen Feldkonstanten**:

$$\epsilon_0 = 8.854\,187 \dots \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad (1.65)$$

und $\mathbf{r}$ dem Verschiebungsvektor zwischen den Orten dieser Ladungen. $\mathbf{E}$ ist die bereits oben verwendete elektrische Feldstärke, ausgehend von der man den **elektrischen Fluss** definiert:

$$\Psi = \int_{\mathcal{A}} \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{A} \quad (1.66)$$

(Mit gleichem Zeichen werden wir in Gleichung (1.123) den verketteten Fluss einführen. Beide Größen sind *vollkommen* unterschiedlich und verwenden nur zufällig dasselbe Formelzeichen.) Für eine einzelne Punktladung Q muss nun notwendig das resultierende elektrische Feld rotationssymmetrisch sein, so dass für r den Radius der Kugeloberfläche $\mathcal{A}$ gilt:

$$\Psi = \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = Q \quad (1.67)$$

Wir sehen hier auch, wie der Faktor 4π in das Coulombsche Gesetz hineingeraten ist. Unter Verwendung von Gleichungen (1.63) und (1.66) können wir das schreiben als:

$$\oint_{\partial V} \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_V \rho_Q dV \quad (1.68)$$

Wir haben den Integrationsbereich im linken Integral speziell als die geschlossene Oberfläche des Volumens gewählt, über das das rechte Integral läuft, so dass wir korrespondierende Bereiche betrachten. Für die Situation einer einzelnen Ladung im freien Raum ist das nicht wichtig, für ausgedehnte Ladungsverteilungen jedoch schon. Der **Gaußsche Integralsatz** angewendet auf das linke Integral liefert dann:

$$\int_V \text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) dV = \int_V \rho_Q dV \quad (1.69)$$

Falls diese Gleichung für alle Volumina $\mathcal{V}$ gilt, so muss sie für die Integranden selbst gelten:

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_Q \quad (1.70)$$

Da die Ladung damit nicht an den elektrischen Fluss selbst gekoppelt ist, sondern eine Größe, deren Flächenintegral erst den elektrischen Fluss liefert, führt man zusätzlich die **elektrische Flussdichte** ein:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (1.71)$$

so dass:

$$\Psi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{D} \, d\mathbf{A} \quad (1.72)$$

Den verknüpfenden Faktor ϵ bezeichnet man als **absolute Permittivität**. Im Vakuum entspricht sie der elektrischen Feldkonstanten. In Materie wird ein werkstoffabhängiger Parameter anmultipliziert, die **relative Permittivität** ϵ_r . Die relative Permittivität des Vakuums ist gleich eins.

Auf diese Weise haben wir aus dem Coulombschen Gesetz die erste von vier Feldgleichungen der Elektrodynamik motiviert.



1. Maxwellgleichung (Gaußsches Gesetz)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_Q \quad (\text{differentielle Form}) \quad \oint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{V}} \rho_Q \, dV \quad (\text{integrale Form}) \quad (1.73)$$

Elektrische Ladungsdichten sind die Quelle elektrischer Flussdichte (differentielle Aussage). Der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumens entspricht der in diesem Volumen eingeschlossenen elektrischen Ladung (integrale Aussage).

Beide Aussagen sind gleichwertig.

1.3 Grundbegriffe in Magnetkreisen

Eines der wichtigsten Konzepte in der Beschreibung von Magnetkreisen ist die **magnetische Feldlinie**. In einer technischen Zeichnung können magnetische Feldlinien eingezeichnet werden als geschlossene Pfade (Linien), die gerichtet durchlaufen werden, markiert häufig durch einen Pfeil irgendwo entlang der Linie. Diese Pfade werden von *keinem* anfassbaren Gegenstand durchlaufen. Trotzdem ist eine Analogie zu geschlossenen Kreisläufen beim Transport von Teilchen sehr hilfreich. Zwei Analogien bieten sich an, und welche für Sie hilfreicher ist, hängt davon ab, womit Sie sich in der Vergangenheit mehr beschäftigt haben: Elektrotechnik oder Hydraulik. Die erste Analogie ist ein elektrischer Gleichstromkreis (mit bspw. Elektronen

als bewegten Teilchen). Die zweite Analogie ist ein Wasserkreislauf (mit bspw. Wassermolekülen als bewegten Teilchen).

In diesen Kreisläufen darf man die jeweiligen Feldlinien verstehen als die Pfade, denen diese Teilchen folgen würden. Aus dieser Anschauung folgt eine wichtige Erkenntnis: Teilchen gehen nicht verloren (sie existieren kontinuierlich), und in jeden Raumpunkt fließen ebenso viele heraus wie hinein. Für ein ausgedehntes Volumen ist es möglich, dass mehr heraus als hinein fließen, nur sinkt in gleichem Maße die Anzahl der Teilchen innerhalb dieses Volumens. Umgekehrt steigt die Anzahl der Teilchen innerhalb dieses Volumens, wenn mehr Teilchen hinein als heraus fließen. Im Allgemeinen bezeichnet man die dahinterstehende Formel als **Kontinuitätsgleichung**. Konkret in der Elektrotechnik formuliert man diese Tatsache als sogenannte Kirchhoffsche Knotenregel (die vorzeichenbehaftete Summe der Zweigströme in einem Knoten ist null). Obwohl im magnetischen Fall keine Teilchen fließen, gibt es auch hier dieselbe Forderung an die Kontinuität der Feldlinien.



Magnetische Feldlinien sind stets ringförmig geschlossen. Es gibt keine offenen Anfangs- oder Endpunkte magnetischer Feldlinien.

In einem elektrischen Kreis wäre es nicht sinnvoll, einen Pfad für jedes einzelne Elektron zu zeichnen, ebenso wenig für jedes Wassermolekül in einem hydraulischen Kreis. Stattdessen wird man eine bestimmte Menge von Teilchen gemeinsam betrachten, deren Bewegung gemeinsam erfolgt. Im elektrischen Kreis macht man das, indem man nicht Elektronen betrachtet, sondern die elektrische Stromstärke I einführt (gemessen in $[A] \hat{=} [C/s]$). Im hydraulischen Kreis betrachtet man entsprechend einen Massenfluss (gemessen in $[kg/s]$). Im magnetischen Kreis führt man analog einen **magnetischen Fluss** Φ ein, gemessen in der Einheit Weber ($[Wb] \hat{=} [Vs]$). Der magnetische Fluss ist, ebenso wie die elektrische Stromstärke und der Massenfluss, eine skalare Größe. Eine gezeichnete Feldlinie entspricht einer bestimmten Menge magnetischem Fluss. Abhängig von der Skalierung werden mehr oder weniger Feldlinien gezeichnet, so wie es für die Übersichtlichkeit der Darstellung vorteilhaft ist.

Betrachtet man das hydraulische Analogon am Beispiel eines natürlich fließenden Flusses, so findet man unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten in unterschiedlichen Bereichen des Flusses. Im flachen Uferbereich strömt das Wasser langsamer, im tieferen Zentrum des Flusses fließt es schneller. Anschaulich bedeutet das, dass bezogen auf die Fläche (senkrecht zur Richtung der Strömung) mehr Wasser im Zentrum als am Ufer transportiert wird. Um diese Differenzierung deutlich zu machen, führt man eine Massenstromdichte ein (gemessen in $[kg/(s \cdot m^2)]$), im elektrischen Analogon entsprechend eine elektrische Stromdichte (gemessen in $[A/m^2]$). Die Massenstromdichte wäre im genannten Beispiel am Ufer geringer als im Zentrum, und es könnten beispielsweise Messwerte quantitativ verglichen werden. Im Magnetkreis führt man eine entsprechende Größe ein und bezeichnet sie als **magnetische Flussdichte** B , gemessen in der Einheit Tesla ($[T] \hat{=} [Vs/m^2]$). Damit gilt für homogenen Fluss durch eine Fläche $\mathcal{A}$ mit Flächeninhalt A senkrecht zu den Feldlinien mit Flussdichte B :

$$\Phi = BA \quad (1.74)$$

Als Verallgemeinerung davon treffen wir die



Definition des **magnetischen Flusses** durch die Fläche $\mathcal{A}$

$$\Phi_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \quad (1.75)$$

Da eine magnetische Feldlinie eine bestimmte Menge magnetischen Fluss repräsentiert, ist ihre Dichte dort groß, wo die magnetische Flussdichte groß ist, und ihre Dichte ist klein, wo die magnetische Flussdichte klein ist.



Magnetische Feldlinien repräsentieren eine bestimmte Menge **magnetischen Fluss** Φ . Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur **magnetischen Flussdichte** $\mathbf{B}$.

Wir haben gesehen, dass magnetische Feldlinien stets ringförmig geschlossen sind und dass es daher keine offenen Feldlinien gibt. Es gibt also auch keine Quellen und Senken von magnetischem Fluss (eine Quelle wäre ein Anfangspunkt einer Feldlinie, eine Senke entsprechend ein Endpunkt).



2. Maxwellgleichung

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ (differentielle Form)

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = 0 \quad (\text{integrale Form}) \quad (1.76)$$

Die magnetische Flussdichte ist quelfrei (differentielle Aussage). Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet (integrale Aussage).

Wir haben dadurch den magnetischen Fluss, der kontinuierlich über den Raum verteilt ist, repräsentiert durch einzelne Feldlinien, von denen wir nur einige wenige zeichnen, die also diskontinuierlich sind. Das ist so zu verstehen, dass jede Feldlinie einen bestimmten Raumbereich repräsentiert, in dem sich der dieser Feldlinie entsprechende Fluss aufaddiert. Das kann man grafisch darstellen, indem man der Feldlinie diesen Raumbereich auch bildlich zuordnet. Das sich ergebende Objekt bezeichnet man als **Flussröhre** (vgl. Bild 1.1a). Flussröhren zeichnet man so, dass ihre Anfangs- und Endfläche senkrecht zu den Feldlinien liegt, während ihre seitlichen Kanten parallel zu den Feldlinien liegen. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass der Fluss in der gesamten Flussröhre konstant ist, und dass die 2. Maxwellgleichung erfüllt wird.

Magnetische Feldlinien haben keine Anfangs- und Endpunkte, sondern sind ringförmig geschlossen. Es ist jedoch zulässig, Abschnitte von Flussröhren zu betrachten, die sehr wohl Anfang und Ende haben. Dabei bleibt aber klar, dass die Feldlinien selbst sich über diese Grenzen hinaus fortsetzen und schließen. Wir betrachten diese Elemente nun wie den Massenfluss durch ein Rohrstück in der Hydraulik oder die Stromstärke in einem Widerstandselement in der Elektrotechnik. Dort wissen wir, dass zur sogenannten **Flussgröße** (nämlich dem Massenfluss oder der Stromstärke) notwendig auch eine treibende Kraft gehört, die sogenannte **Potentialgröße** (nämlich die Druckdifferenz oder die elektrische Spannung). Ohne diese treibende Kraft würde sich kein Fluss einstellen. Für den magnetischen Kreis bezeichnen wir die Po-

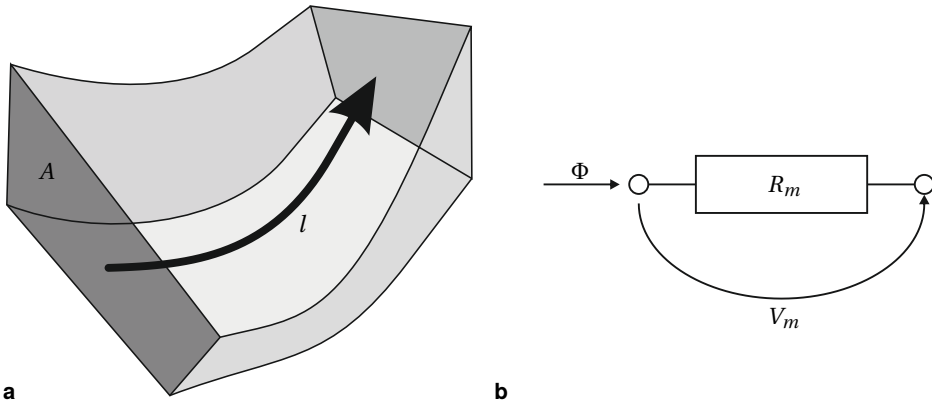


Bild 1.1 Definition konzentrierter Elemente für magnetische Netzwerke. **a** Eine Flussröhre mit Querschnittsfläche A und Länge l , die eine einzelne Feldlinie enthält. **b** Darstellung dieser Flussröhre durch ihre Reluktanz R_m (Impedanzgröße), gemeinsam mit der anliegenden magnetischen Spannung V_m (Potentialgröße) und dem sie durchtretenden magnetischen Fluss Φ (Flussgröße).

tentialgröße als **magnetische Spannung** (in [A], vgl. Bild 1.1b). In Elektromagneten beispielsweise erzeugen wir die magnetischen Feldlinien durch eine stromdurchflossene Spule, und es wundert uns daher nicht, dass die Einheit der magnetischen Spannung identisch ist mit der Einheit der Stromstärke. Die Gesamtheit der in einer gegebenen Schleife eines Magnetkreises vorliegenden magnetischen Spannung bezeichnet man als **Durchflutung** Θ .



Die **Flussgröße** im Magnetkreis ist der **magnetische Fluss** Φ .

Die **Potentialgröße** im Magnetkreis ist die **magnetische Spannung** V_m .

Die Summe der magnetischen Spannungen über einen geschlossenen Kreis bezeichnet man als **Durchflutung** Θ .

Wir haben bereits mehrfach festgestellt, dass offene magnetische Feldlinien nicht existieren, sondern nur geschlossene Wirbel von Feldlinien. Die Ursache dieser Wirbel liegt (geometrisch) innerhalb des Wirbels: es sind elektrische Ströme. Betrachtet man einen einzelnen, stromdurchflossenen elektrischen Leiter, so findet sich in seiner Umgebung ein kreisförmiger Wirbel magnetischer Feldlinien. Die Stromstärke I in diesem Leiter entspricht gerade der elektrischen Durchflutung im beschriebenen Wirbel der magnetischen Feldlinien.

Schließt man den stromdurchflossenen Leiter zu einer Schleife, ist die Situation lokal unverändert. Windet man nun den stromdurchflossenen Leiter zu einer zweiten Schleife parallel zur ersten, so befindet sich im Zentrum dieser Schleife die doppelte Stromstärke. Allgemein gilt das entsprechend für N Windungen:

$$\Theta = NI \quad (1.77)$$

Aufgrund dieser Identität ist es teilweise üblich, die Einheit der elektrischen Durchflutung als Ampèrewindung [AW] anzugeben, statt als [A]. Dieses Vorgehen ist jedoch im SI nicht vorgesehen, und wir werden hier stets das [A] verwenden.

Zwei Beobachtungen sind wichtig: Zum Ersten, dass es für den magnetischen Kreis vollkommen egal ist, dass tatsächlich nur eine Stromstärke von I vorliegt, die "mehrfach genutzt" wird. Die Situation ist magnetisch nicht zu unterscheiden davon, eine N -fach größere Stromstärke mit nur einer Windung um den Pfad zu legen (bzw. ins Innere des Wirbels). Zum Zweiten, dass in einer solchen Wicklung der Draht auf jeder Umdrehung im Schnittbild zweimal nahe am Pfad vorbeikommt: einmal innen, einmal außen (bezogen auf den geschlossenen Pfad). Beide Male mag er gleich nah am Pfad vorbei laufen, dennoch erzeugt nur der Durchlauf *innen* eine elektrische Durchflutung bezogen auf diesen Pfad. Der Durchlauf außen ist, bezogen auf diesen Pfad, vollkommen wirkungslos.

Um einen stromdurchflossenen Leiter ergibt sich also ein kreisförmiger Wirbel magnetischer Feldlinien. Tatsächlich erzeugt die elektrische Stromstärke zunächst nur eine Durchflutung, also die Potentialgröße, der folgend sich die Flussgröße ausbilden wird, in diesem Fall also der magnetische Fluss. Betrachten wir unsere beiden Analoga, um zu verstehen, warum diese Unterscheidung wichtig ist. Wenn ich ein hydraulisches System betrachte, kenne ich allein ausgehend von der Druckdifferenz nicht unmittelbar den Massenfluss, ebenso wie ich im elektrischen System allein ausgehend von der elektrischen Spannungsdifferenz die Stromstärke noch nicht kenne. Was fehlt, ist in beiden Fällen eine Größe, die beide miteinander verknüpft. Wie viel Massenfluss erhalte ich für eine gegebene Druckdifferenz, wie viel Stromstärke erhalte ich für eine gegebene Spannungsdifferenz?

Im einfachsten Ansatz geht man von einer Proportionalität zwischen Potential- und Flussgröße aus. Als verknüpfende Größe ergibt sich dann der Quotient aus Potential- und Flussgröße, den man allgemein als **Impedanz** bezeichnet. In der Hydraulik ist es speziell der Strömungswiderstand, in der Elektrotechnik der Widerstandswert beziehungsweise die Resistanz (in Ohm $[\Omega] \hat{=} [V/A]$). Die verknüpfende Gleichung bezeichnet man für elektrische Kreise als **Ohmsches Gesetz**:

$$U = RI \quad (1.78)$$

Einen entsprechenden Zusammenhang formuliert man für Magnetkreise.



Definition der **Reluktanz** oder des **magnetischen Widerstands** (in $[1/H]$)

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} \quad (1.79)$$

Diese Definition wird auch als **Hopkinsonsches Gesetz** bezeichnet:

$$V_m = R_m \Phi \quad (1.80)$$

Die Reluktanz ist eine Eigenschaft der Flussröhre, entlang der der Fluss Φ orientiert ist. V_m ist die magnetische Spannung, die über die beiden Endflächen anliegt (vgl. Bild 1.1b). Vollkommen analog dem elektrischen Fall wächst die Reluktanz, falls die Länge l der Flussröhre größer wird und sie sinkt, falls die Querschnittsfläche A der Flussröhre größer wird:

$$R_m \propto \frac{l}{A} \quad (1.81)$$

Um die Proportionalitätskonstante zu formulieren, führt man analog zum elektrischen Kreis drei neue Begriffe ein.



Definition der **Reluktivität** oder des **spezifischen magnetischen Widerstands** (in [m/H])

$$\rho_m = R_m \frac{A}{l} \quad (1.82)$$

Definition der **absoluten Permeabilität** (in [H/m])

$$\mu = \frac{1}{\rho_m} \quad (1.83)$$

Definition der **Permeanz** oder des **magnetischen Leitwerts** (in [H])

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} \quad (1.84)$$

Die Bezeichnung der absoluten Permeabilität als magnetische Leitfähigkeit wäre zwar treffend, ist aber unüblich.

Diese Berechnungsvorschrift:

$$R_m = \rho_m \frac{l}{A} \quad (1.85)$$

funktioniert nur für konstante Querschnittsfläche A über die gesamte Länge l der Flussröhre, sogenannte **prismatische Flussröhren**. Ändert sich der Querschnitt über die Länge oder ändert sich die Länge über den Querschnitt, muss die Flussröhre rechnerisch zerteilt werden in kleine Elemente, und dann muss die effektive Reluktanz der Verschaltung dieser Elemente berechnet werden. Dabei gelten dieselben Regeln, die für Stromkreise aus der Elektrotechnik bekannt sind.



Für **Serienschaltungen** von Flussröhren addieren sich die Reluktanzen:

$$R_{m, \text{ges}} = \sum_i R_{m, i} \quad (1.86)$$

Für **Parallelschaltungen** von Flussröhren addieren sich die Permeanzen:

$$\Lambda_{\text{ges}} = \sum_i \Lambda_i \quad (1.87)$$

Unter sonst gleichen Bedingungen wächst die magnetische Spannung also mit der Länge der Flussröhre, so dass es sinnvoll ist, eine weitere Größe einzuführen, die nicht von der Geometrie der gewählten Flussröhre abhängt. Diese Größe bezeichnet man als **magnetische Feldstärke**