

Fundamentos de economía minera

Juan Ignacio Guzmán



Fundamentos de economía minera

Fundamentos de economía minera

Juan Ignacio Guzmán

Ingeniero Civil de Industrias
Doctor en Economía de Minerales

Pontificia Universidad Católica de Chile



EDITORIAL
REVERTÉ



Fundamentos de economía minera

© Juan Ignacio Guzmán Barros, 2019

Este libro ha sido publicado con el apoyo de GEM Ltda.

Esta edición:

© Editorial Reverté, Barcelona, 2019

Edición en papel:

ISBN 978-84-291-2808-6

Edición e-book (PDF):

ISBN 978-84-291-9513-2

Maquetación: Patricia Reverté

Revisión de textos: Paloma Marín Arraiza

Propiedad de:

Editorial Reverté, S.A.

Calle Loreto 13-15, local B

08029 Barcelona

Tel: (+34) 93 419 3336

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo las excepciones previstas por la Ley 23/2006 de Propiedad Intelectual, y en concreto por su artículo 32, sobre ‘Cita e ilustración de la enseñanza’. Los permisos para fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra pueden obtenerse en Cedro (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

*A Flavia, Sofía, Trinidad, Ferrán, Martí y Vicente,
para quienes día a día extraigo
(aunque no siempre de forma óptima) lo mejor de mí*

Índice

Prefacio	XI
Notación	XIX
El autor	XXIII
Parte I. Introducción	1
Capítulo 1. Conceptos básicos	3
1.1 Economía de los recursos naturales	3
1.2 Economía minera	8
1.3 Geología y tipos de minerales	9
1.4 Cadena de valor en minería	11
1.5 Heterogeneidad del recurso y su rol en la planificación minera	12
1.6 Problemas resueltos	19
Capítulo 2. Los problemas de la explotación de minas	23
2.1 Tipos de empresas mineras	23
2.2 Precio de los <i>Commodities</i>	25
2.3 Problema económico de la empresa minera	28
2.4 Deficiencias de la solución al problema en la actualidad	34
2.5 Problemáticas no económicas de la explotación de minas	36
2.6 Problemas resueltos	38

Parte II. Base Matemática	41
Capítulo 3. Principios de optimización dinámica	43
3.1 Reseña histórica	43
3.2 Definición de optimización intertemporal	44
3.3 Modelo general de optimización dinámica en tiempo discreto	45
3.4 Tipos de soluciones	48
3.5 Formulación en tiempo continuo	50
3.6 Métodos de optimización dinámica	51
3.7 Aplicación en la industria minera	51
3.8 Problemas resueltos	56
Capítulo 4. Cálculo de variaciones	61
4.1 Reseña histórica	61
4.2 Funcionales	63
4.3 Condición de primer orden para el cálculo de variaciones	71
4.4 Cálculo de variaciones en múltiples variables	84
4.5 Tres casos adicionales	93
4.6 Problemas resueltos	105
Capítulo 5. Programación dinámica	141
5.1 Introducción a la programación dinámica	141
5.2 Derivación matemática de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	149
5.3 Nota minera: el problema de Kenneth Lane	152
5.4 Otras aplicaciones de la programación dinámica	159
5.5 Problemas resueltos	160
Capítulo 6. Control óptimo	177
6.1 Principales aplicaciones	177
6.2 Problema del control óptimo	178
6.3 Principio del máximo	180
6.4 Condiciones de transversalidad y condiciones iniciales	185
6.5 Condiciones de segundo orden o suficientes	187
6.6 Problema del control óptimo en la minería y su significado	189
6.7 Casos particulares	193
6.8 Problemas resueltos	200
Capítulo 7. Cálculo estocástico	215
7.1 Reseña histórica	215
7.2 Procesos estocásticos	216
7.3 Proceso de Wiener	220
7.4 Movimiento browniano con drift	225

7.5 Cálculo estocástico de Itô	227
7.6 Proceso de Itô	228
7.7 Lema de Itô	238
7.8 Desigualdad de Jensen	243
7.9 Problemas resueltos	246
Capítulo 8. Optimización dinámica estocástica	269
8.1 Planteamiento del problema.....	270
8.2 Programación dinámica estocástica	274
8.3 Control óptimo estocástico	281
8.4 Problemas resueltos	287
Parte III. Problemas determinísticos	291
Capítulo 9. El mundo de Hotelling	293
9.1 Supuestos del mundo de Hotelling.....	293
9.2 Problema de la mina en el mundo de Hotelling	297
9.3 Precio de equilibrio en el mundo ideal de Hotelling	305
9.4 Regla de Hotelling como maximizador del bienestar social.....	310
9.5 Relajación de los supuestos de Hotelling	313
9.6 Otras extensiones teóricas del mundo ideal de Hotelling	324
9.7 Problemas resueltos	325
Capítulo 10. El problema de determinar la producción óptima	345
10.1 Las restricciones en minería.....	345
10.2 Planteamiento del problema.....	346
10.3 Relajando los supuestos del mundo ideal de Hotelling.....	351
10.4 Análisis de estabilidad	359
10.5 Estática comparativa	366
10.6 Problemas resueltos	370
Capítulo 11. El problema de determinar la inversión óptima	389
11.1 La inversión en minería	389
11.2 Determinación de la capacidad de producción mediante planificación minera	393
11.3 Resolución del problema mediante optimización dinámica	395
11.4 Problemas resueltos	402
Capítulo 12. El efecto de los impuestos y royalties	411
12.1 Royalty	412
12.2 Impuesto unit-based	414
12.3 Impuesto sobre la utilidad o impuesto sobre la renta	418

12.4 Impuesto sobre las ventas (<i>ad valorem</i>)	420
12.5 Impuesto híbrido.....	429
12.6 Impuestos mineros en Chile y en el resto del mundo.....	429
12.7 Problemas resueltos	432
Parte IV. Problemas estocásticos	439
Capítulo 13. Fuentes de incertidumbre en minería	441
13.1 Fuentes de incertidumbre en un proyecto minero	441
13.2 Relevancia de la incertidumbre de precios de <i>commodities</i> en la explotación minera.....	446
13.3 Mercados de <i>commodities</i>	448
13.4 Derivación conceptual del precio en la industria de los <i>commodities</i> minerales	449
13.5 Procesos estocásticos para cálculos de precios de <i>commodities</i>	456
13.6 Problemas resueltos	461
Capítulo 14. El problema de determinar la producción óptima bajo incertidumbre.....	471
14.1 La incertidumbre en el problema de optimización de la producción....	471
14.2 El problema de la producción óptima con certidumbre	472
14.3 El problema de la producción óptima con incertidumbre.....	475
14.4 Problemas resueltos	494
Capítulo 15. El problema de determinar la exploración óptima.....	503
15.1 Introducción	503
15.2 El rol de la exploración.....	509
15.3 Esfuerzo de exploración y descubrimiento de recursos.....	513
15.4 Explotación y exploración óptima determinística	522
15.5 Explotación y exploración óptima estocástica	534
15.6 Problemas resueltos	542
Capítulo 16. Introducción a las opciones reales.....	551
16.1 Introducción	551
16.2 Opciones reales en minería	561
16.3 Oportunidad y <i>timing</i> de inversión	571
16.4 Un problema clásico en minería: Brennan y Schwartz (1985)	594
16.5 Inversión secuencial	617
16.6 Opciones de interés para futuras investigaciones	638
16.7 Problemas resueltos	667

Prefacio

En 2003 empecé mi doctorado en economía de minerales, inmediatamente después de haber terminado un pregrado en ingeniería de minas. Aún recuerdo cuando en uno de los cursos iniciales del doctorado, que dictaba John Tilton (quien, junto con Juan Pablo Montero fue mi director de tesis doctoral), me introdujeron por primera vez al «mundo de Hotelling».

Recuerdo mi primera impresión al ver (sin derivación alguna) la «regla de Hotelling» (respecto a que el precio de un *commodity* mineral «debería» crecer según la tasa de interés del mercado). Conceptualmente era muy potente y, pese a que el profesor no había hecho una referencia a lo que yo había estudiado con anterioridad en ingeniería de minas, inmediatamente me pareció que esta regla simple daba una estructura económica al concepto de costo de oportunidad desarrollado por Kenneth Lane en la década de 1960, y que, apenas unos pocos años antes (en 2000 para ser preciso), me habían enseñado mientras estudiaba ingeniería de minas.

La «regla de Hotelling» se estudia en economía de minerales; sin embargo, únicamente como explicación de la evolución de los precios de *commodities* minerales, pero nunca bajo una perspectiva de regla útil para explotar un yacimiento de forma óptima. La lógica detrás de su derivación es que el problema que enfrenta una mina es intertemporal, es decir, las decisiones pasadas condicionan el presente y, a través de las decisiones tomadas hoy, se condicionan a su vez las decisiones que se pueden tomar en el futuro.

Durante mi estudio inicial de la «regla de Hotelling» aprendí que había sido publicada más de tres décadas antes que el concepto de costo de oportunidad de Lane (1931 y 1964, respectivamente). Desde ese momento me pareció sorprendente que Lane no hubiese citado a Hotelling, ya que como economista jefe de Rio Tinto es probable hubiese tenido acceso, sino a toda, a buena parte de la literatura económica asociada a la explotación minera (no muy abundante por lo demás en ese entonces).

Nunca he aclarado esta omisión, pero en algún momento dejé de encontrarla relevante pues descubrí otra omisión de Lane incluso mayor, referida al no reconocimiento del uso de la programación dinámica en la derivación del conocido algoritmo de Lane (lo que discuto en el Capítulo 5 del libro), pese a que Richard Bellman la había desarrollado prácticamente una década antes. ¿Por qué Hotelling era completamente desconocido para la disciplina de ingeniería de minas, mientras que Lane parecía servir de base? En un principio me pareció que la respuesta lógica a esta pregunta provenía de los mismos supuestos que Hotelling había utilizado para derivar su famosa regla. Entre sus seis supuestos (detallados en el Capítulo 9) había uno que simplemente violaba todo lo que hasta ese momento había aprendido de minería. Para la derivación de su famosa regla, Hotelling había recurrido al supuesto de que el recurso que se explotaba era homogéneo. Es decir, cualesquiera fueran las propiedades de interés del mineral (ley, recuperación, impurezas, etc.) debían considerarse constantes a través de todo el depósito.

Entendiendo que la modelación en economía o en ingeniería muchas veces requiere de una simplificación de los supuestos para poder trabajarlos algebraicamente, y que muchas veces el costo de la menor precisión alcanzada al simplificar un problema es inferior a los beneficios en entendimiento de dicha simplificación, el supuesto de homogeneidad podría parecer inocuo. Sin embargo, en este caso, el no reconocer que el depósito mineral es heterogéneo me parecía simplemente imposible de digerir. Hotelling atentaba así contra el más básico de los elementos de la realidad minera: los minerales se distribuyen heterogéneamente dentro de un yacimiento.

Aunque el concepto de costo de oportunidad de Hotelling sigue siendo válido cuando el recurso es heterogéneo, como mostraría Lane posteriormente, la sola lectura del supuesto bajo el que se deriva la regla de Hotelling me parece que podría justificar la completa omisión de Hotelling en la literatura de la ingeniería de minas.

¿Pero por qué Hotelling erró tanto en la selección de su supuesto? Le he dado vueltas a esta pregunta durante más de catorce años y he llegado al convencimiento de que Hotelling simplemente no sabía lo crítico que era este supuesto en el mundo minero real. Después de todo, como estadístico y economista, Hotelling desconocía completamente la geología de los yacimientos o la práctica minera de ese entonces.

A su favor, no obstante, debe aclararse que, en el tiempo en el cual Hotelling publicó sus resultados, la disciplina minera contaba con un escaso avance en cuanto al reconocimiento de la heterogeneidad espacial de los yacimientos, hasta el punto de que disciplinas como la geoestadística o la planificación minera estaban a varias décadas de aparecer en la escena académica o práctica de la explotación de minas.

El llamado «modelo de bloques» de un yacimiento, donde cada «bloque» posee propiedades potencialmente distintas entre sí, fue el primer intento conceptual de incorporar la heterogeneidad de los depósitos minerales y marca, a mi juicio, un antes y un después en la disciplina de ingeniería de minas. Dicha innovación data de 1834 y la desarrolló el geólogo inglés Thomas Spowith, casi un siglo antes de

que se publicara el resultado de Hotelling. Sin embargo, no fue hasta que se publicó el algoritmo de Lerchs-Grosmann en 1965 que el modelo de bloques se popularizó como una forma práctica, y hoy en día imprescindible, para planificar en minería. Hotelling falleció en 1973, pero difícilmente estaba al tanto de estos desarrollos.

Así, cuando Hotelling publicó su artículo derivando la «regla de Hotelling», lo cierto es que la geología de los yacimientos era tan heterogénea como en la actualidad. Sin embargo, esta no era reconocida como un aspecto fundamental del negocio minero simplemente porque no se contaba con las herramientas ni conceptuales ni computacionales que permitieran incorporarlas en la explotación óptima de minas. Además, Hotelling no tenía posiblemente en mente determinar una regla de explotación óptima de una mina, aunque se lea explícitamente así de su artículo, sino más bien demostrar que aparecía un costo de oportunidad asociado a la explotación en el tiempo del mineral cuando el recurso era finito y que en el caso de los recursos infinitos no existía. La decisión de si explotar o no una unidad de mineral hoy debía ser entonces necesariamente respondida mirando al futuro y no con falta de proyección, como se hacía hasta ese entonces.

Aunque trabajé durante seis meses investigando la posibilidad de realizar mi tesis doctoral en el tema específico de la economía de los recursos agotables iniciada por Hotelling en su famoso artículo de 1931, lo cierto es que tuve que abandonar en su momento esta investigación. Dos factores jugaron en contra de continuar con una investigación en esta línea. Por un lado, el darme cuenta de que como área de investigación el *peak* se había producido en la década de 1970 y que a partir de la publicación del libro de Dasgupta y Heal (1979) parecía que nada más de interés podía investigarse en esta disciplina. En la década de 1990 e inicios de la década de 2000 son de hecho muy escasos los artículos en esta disciplina, y todos se refieren a extensiones más bien complementarias a la regla de Hotelling más que a quiebres significativos en el conocimiento en este problema. Menos aún, ninguno de los escritos ayudaba a indagar en la forma óptima de explotar recursos. La segunda razón para abandonar mi intención de realizar una tesis doctoral en esta área fue darme cuenta de que, pese a que mis directores de tesis conocían la teoría relativamente bien (e incluso uno de ellos había hecho aportes directos a la misma), no valoraban o comprendían del todo los problemas que intentaba explorar (más asociados a la explotación de minas que al efecto de los mercados de minerales). Los problemas expuestos escapaban bastante de sus temas de investigación, en ambos casos ligados exclusivamente a la economía y no a la ingeniería de minas.

Es así como hacia el fin de mis cursos e inicio de la investigación de doctorado como tal, tenía un tema completamente distinto, mucho más alineado con la disciplina en la cual me iba a doctorar: mi tema de tesis desarrollaba temas asociados a la organización industrial en las industrias de minerales. Sin embargo, nunca dejé de pensar en la explotación óptima de minas desde una perspectiva holística que mezclara conceptos de económica y de ingeniería.

Cuando me doctoré en 2007 empecé a trabajar en consultoría en minería, y, en un momento en el cual me encontraba trabajando para CRU, me dieron la oportunidad en la empresa de improvisar un tema de mi interés para presentar en el *Workshop on Operations Research in Mining* de 2008, congreso al que no solo terminarían asistiendo los principales exponentes de la planificación minera a nivel mundial, sino también ejecutivos de distintas compañías mineras de gran escala.

Aunque arriesgado, presenté un artículo en el cual desarrollaba una de las problemáticas fundamentales de la planificación minera moderna: la determinación del *pit* final en una mina a rajo. A pesar de que la mayoría de la industria minera descansaba en el supuesto de que el algoritmo de Lerchs-Grossman era una solución óptima para este problema, la incómoda verdad era que este algoritmo solo se hacía cargo de la problemática espacial y no temporal. Como demostré en mi presentación, si la tasa de descuento de la compañía era no nula, entonces probablemente la solución óptima de este problema no se podía derivar utilizando un algoritmo como el de Lerchs-Grossman. Si bien, antes de esta crítica ya existían voces disidentes en la academia con respecto a la pertinencia de la solución de Lerchs-Grossman, mi crítica caló hondo en la conciencia de varios académicos presentes y, en especial, de varios ejecutivos mineros ligados con la planificación minera de las principales compañías productoras.

Desafortunadamente, mi artículo era más una crítica que una base constructiva de trabajo para resolver el problema de la explotación óptima de minas, aunque reconocía algunas líneas de investigación futura de interés, particularmente referidas a la optimización de forma. Sin embargo, sentaba las bases de que el problema minero no era solo «espacial», como los partidarios de Lerchs-Grossman asumían, ni tampoco exclusivamente «temporal», como reconocían los partidarios de Lane. De hecho, el problema es «espacio-temporal» y no podía ser resuelto separando sus componentes espacial y temporal como se había hecho hasta la fecha. Aún hoy es la forma estándar de producir planes mineros en la práctica. Entre 2008 y 2011, mi trabajo como consultor y profesor asociado consumieron todas mis energías por lo que dejé de lado el problema de la explotación óptima de recursos minerales. Hacia 2011, sin embargo, empecé a estudiar por iniciativa propia la teoría general de la relatividad de Einstein y la teoría matemática asociada a la geometría Riemanniana. Ambas teorías presentan conceptos en los que el espacio se deforma al igual que se deforma la superficie de una excavación de una mina a medida que progresas en el tiempo. Estos estudios me permitieron entender la importancia de mezclar espacio y tiempo en un único marco conceptual para buscar definir y resolver correctamente el problema minero.

En 2012, se abrió una oportunidad fortuita para continuar el trabajo en esta interesante línea de investigación. Me contactó la coordinadora académica del actual Departamento de Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, donde había impartido clases desde que me titulé de ingeniería de minas en 2003, para

hablarme de la apertura de un nuevo curso titulado «Fundamentos de la economía de minerales». Aunque el nombre era idéntico al del curso que durante casi una década venía dictando John Tilton, lo cierto es que este curso estaba programado para dictarse en pregrado, a diferencia del curso de Tilton, que era de postgrado, y el programa era absolutamente libre. De hecho, me solicitó que, en caso de estar interesado en dictarlo, le entregara una propuesta de programa. Dado que esta era la oportunidad de introducir en ingeniería de minas la posibilidad de ir a los fundamentos teóricos (matemáticos) de la explotación óptima de yacimientos minerales, me embarqué en la tarea de proponer un programa entendía sería revolucionario en aquel momento.

Dicho programa no solo era revolucionario por tener contenidos inéditos en el mundo en una escuela de ingeniería de minas, sino porque una parte de los contenidos serían producto de mi propia investigación (en su mayoría sin publicar, ya se desarrolló durante mi trabajo en consultoría). Además, la matemática enseñada en la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, aunque reconocidamente exigente, es insuficiente para desarrollar en detalle el contenido que buscaba enseñar. Me propuse entonces incluir en el curso las bases matemáticas completas necesarias para el entendimiento de la teoría (Parte II de este libro) y cuyo único objeto era introducir al alumno a las herramientas matemáticas de la optimización dinámica, que era imprescindible para los contenidos de ese curso.

Dejé fuera del programa, fundamentalmente por requerir más tiempo que el disponible durante un semestre académico, la parte matemática más avanzada (optimización de forma y teoría del transporte óptimo, por citar un par de ejemplos). Aun así, desarrolle el curso con objeto de no solo transmitir mi crítica original de 2008 respecto al carácter espacio-temporal del problema de la explotación minera, sino de entregar además las herramientas y conceptos mínimos para resolver el problema espacio-temporal con matemáticas acotadas.

Para lo anterior, sin embargo, tuve que tomar ciertos compromisos. El primero es que para que la matemática sea más sencilla y «reveladora», salvo raras excepciones, el curso se desarrolló para espacio y tiempo continuo. El problema discreto, lejos de ser más sencillo como pudiera parecer al principio, exige recurrir rápidamente a métodos numéricos, que son menos explicativos que las fórmulas matemáticas. Aunque prácticamente ninguna referencia se desarrolla en estas páginas con respecto a la solución numérica discreta, lo cierto es que desde 2010 he desarrollado los elementos tanto a nivel teórico como práctico de la explotación de minas a rajo abierto tanto para espacio como para tiempo discreto. En esta línea, por ejemplo, he liderado el desarrollo de DeepMine, software de planificación minera estratégica que desde 2012 se ha aplicado exitosamente a más de cincuenta operaciones y proyectos mineros en Chile y en el extranjero.

Tras tres años impartiendo el curso de «Fundamentos de economía minera» (como se conoce en la actualidad, título más apropiado que el original) o simplemente FEM,

como le dicen mis alumnos, con ajustes significativos y nuevos desarrollos entre los distintos años, alcancé un programa y contenido que, a mi juicio, generan una base de estudio para cualquier interesado en el problema de la explotación óptima de minas (sea ingeniero u economista). En 2016, durante la cuarta edición del curso y habiendo alcanzado un nivel de comprensión teórico satisfactorio, me propuse escribir un libro basado en los manuscritos de las clases. Dado el escaso tiempo disponible para esto, me apoyé aquel año y el siguiente en los propios alumnos del curso, quienes transcribieron las clases dictadas en formato electrónico editable.

Aunque mi expectativa era que dichas transcripciones fuesen suficientes para materializar el libro, lo cierto es que terminaron siendo un impulso necesario para su ejecución, pero en ningún caso suficiente. El libro actual no puede ser considerado como una simple transcripción de mis clases realizada por mis alumnos. Entre las versiones entregadas por ellos y la versión final del libro no existe prácticamente nada al margen de mis clases manuscritas. Tampoco este libro puede ser simplemente considerado transcripciones de las clases manuscritas, aunque la estructura y contenidos principales provengan textualmente de mis clases. Más bien, este libro recoge mi mejor esfuerzo respecto a exponer en un tratado la base de lo que considero debiesen ser los «Fundamentos de Economía Minera» que durante los años he ido desarrollando, muchas veces considerando literatura dispersa sin un sentido de lógica común, y otras tantas desarrollando yo mismo parte de la teoría.

La desconexión entre la literatura asociada a la ingeniería de minas respecto a aquella de corte económico no deja de sorprenderme. Puesto que mi doctorado fue precisamente en economía de minerales, me dispuse desde ese momento a entender cuáles eran las conexiones lógicas entre ambas disciplinas, y este libro es, a mi juicio, el resultado de dicha búsqueda permanente.

Mi objetivo en este libro es ambicioso, ya que he intentado unificar la teoría de la explotación óptima de minas, mediante el uso de una estructura común y matemática. Aunque en algunos casos he logrado extender la teoría incluso más allá de su conocimiento actual, mi motivación al publicar el libro en su estado actual es contribuir a que futuras generaciones de ingenieros en minas y economistas puedan expandir la teoría de la economía minera hasta el punto de volverla operacional en la práctica de la explotación de minas. No tengo la menor duda de que, si esto se alcanza, no solo los investigadores que realicen los desarrollos nos permitirán expandir el conocimiento a niveles sustanciales (y con una importante cuota de belleza estética), sino que el conocimiento desarrollado servirá como una base útil para mejorar el negocio de la minería y, a través de este, el bienestar de la sociedad.

Por tanto, la unificación que presento en este libro es fruto de una década y media de pensamiento profundo, en la que, además, he desplegado todo mi conocimiento en ingeniería, economía y matemáticas (tengo títulos formales en las dos primeras y la tercera ha sido mi pasión por ya treinta años). Si he tenido éxito o no en este emprendimiento, solo los lectores y futuras generaciones de investigadores podrán

decirlo. Por el momento, espero este libro sirva para mejorar y modernizar el entendimiento que se tiene de la explotación óptima de minas.

Antes de cerrar este prefacio, me interesa aclarar algunos puntos y dar los agradecimientos respectivos. El primer punto se refiere al idioma elegido. A pesar de que el consejo de alguna gente fue que mi esfuerzo se debería concentrar en un libro en inglés, me parece que hoy en día una publicación como esta en castellano se justifica debido a que una fracción muy relevante de la minería a nivel mundial se desarrolla en países de habla hispana o donde el castellano es hablado como segunda lengua. Aunque no descarto que, dependiendo del éxito del libro, haya una traducción al inglés, lo cierto es que me parece que el idioma base de la minería mundial hoy en día es el castellano y la selección del idioma del libro es una apuesta en este sentido.

En cuanto a la complejidad de las matemáticas requeridas por el libro, desafortunadamente, no creo sea posible indagar en la teoría de la explotación de minas con matemáticas más simples. El problema es extremadamente complejo y por tanto es esperable que las matemáticas requeridas no sean triviales. Por lo mismo, he tratado de exponer toda aquella matemática que escapa de los contenidos mínimos de un programa tradicional de ingeniería o economía (incluyendo álgebra lineal, geometría, así como cálculo uni y multivariado) asumiendo que el lector no posee conocimiento previo.

Aunque, evidentemente, todos los errores que pueda contener el libro son de mi exclusiva responsabilidad, no puedo sino reconocer aquí el apoyo de innumerables personas que han hecho posible que este proyecto se materialice, así como que han influido de alguna u otra forma en mi concepción mental y me han permitido asentar mis conocimientos en la forma que se exponen en este libro.

Aunque definitivamente no puedo nombrarlos a todos, por la extensión necesaria para esto y por el riesgo de dejar de nombrar a algunos por equivocación, nada de esto sería posible si no hubiese sido por el apoyo constante y admiración personal que siento hacia mis directores de tesis doctoral, John Tilton y Juan Pablo Montero, quienes me guiaron en el proceso de aprender a investigar y pensar más allá de la base de conocimiento actual. El apoyo de los profesores del Departamento de Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile ha sido también permanente en la concepción de este libro.

Mis compañeros de trabajo en GEM, así como los distintos profesionales y ejecutivos de la minería con los que he tenido la oportunidad de trabajar en esta década y media de ejercicio profesional han sido invaluables fuentes de aprendizaje para formar mi visión expuesta en este libro.

Asimismo, los más de 200 alumnos de ingeniería de minas que han tomado mi curso han sido clave, no solo por el apoyo a la transcripción original de mis clases, sino, y no menos importante, por darme la oportunidad de desarrollar los conceptos mediante la explicación y defensa de estos. La alta motivación e intelectualidad de gran parte de estos alumnos, y en particular de quienes han sido ayudantes del curso

durante estos cinco años, han sido cruciales para el desarrollo constante del material aquí expuesto. Mención especial merece Matías Vergara, quien como ayudante del curso fue el primero en tener la visión del valor del contenido del curso para la elaboración de un libro como el presente.

Por su parte este libro no se habría podido publicar sin el apoyo de la empresa GEM, de la cual soy socio fundador, y que generosamente patrocinó esta publicación. Durante la década en la que he sido gerente general de esta empresa, he podido desarrollar no solo la teoría sino también las bases prácticas de la explotación óptima de minas. Desde 2013 contamos en la empresa con el software DeepMine, que concreta en la práctica gran parte de los desarrollos teóricos descritos en el libro, y con el cual hemos podido comprobar en más de cincuenta operaciones y proyectos el aporte de valor de incluir la optimización dinámica en el problema de la explotación de minas.

Agradezco también a Sebastián Cifuentes, alumno de magíster de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y uno de los ayudantes del curso, por su ayuda con la edición final del borrador y la confección de prácticamente todas las figuras y tablas del libro.

Finalmente, mis sinceros agradecimientos al equipo de Editorial Reverté, y en especial a Patricia Reverté y Julio Bueno, por su minucioso y excelente trabajo de edición del borrador original.

Juan Ignacio Guzmán

Notación

Este libro ha sido escrito utilizando las reglas de ortografía de la Real Academia Española de 2010.

Todas las variables presentadas en el libro, sean temporales o espaciales, se encuentran definidas en espacio continuo. En casos excepcionales se desarrollan estas variables en tiempo y/o espacio discreto, pero cuando este es el caso se especifica para no generar confusión. El tiempo se expresa por t e, implícitamente, a menos que se indique otra cosa, el tiempo inicial viene dado por $t_0 = 0$. En cuanto al espacio N -dimensional, este se denota de acuerdo con R^N . Un punto en el espacio físico se describe por el vector $x = (x, y, z) \in R^3$. Nótese que en este caso x en negrita se reserva para variables vectoriales mientras que x sin negrita describe una variable escalar.

Las funciones continuas se denotan por C^0 , mientras que las funciones diferenciables por C^1 . De forma análoga las funciones α -ésimas diferenciables se denotan por C^α . Por su parte, las derivadas totales de la función $x(t)$ son referidas de forma indistinta como $x'(t)$, $\dot{x}(t)$ o $\frac{dx(t)}{dt}$. La selección de una u otra forma se adapta de acuerdo a cada capítulo o sección, sin existir, necesariamente, una guía estricta en el uso de una u otra forma específica. Para el caso en que la función $x(t)$ se presenta en tiempo discreto, la diferencia de la variable por $\Delta x = x_{t+1} - x_t$. Los diferenciales (sobre funciones continuas) a su vez se denotan por dx en el caso de aquellos determinísticos y por dz para los estocásticos (diferenciales de Wiener).

La derivada parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x se expresa indistintamente por $\frac{\partial f}{\partial x}$ o f_x , aunque, en general, se prefiere esta última forma (más moderna a la primera). Según esta última notación la segunda derivada parcial con respecto a x corresponde a f_{xx} (que en notación clásica corresponde a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).

Debido a que el tópico fundamental del libro corresponde a la optimización dinámica, el interés en general consiste en encontrar variables que son funciones del tiempo, muchas veces se omitirá la dependencia temporal con el único objeto de hacer menos engorrosos el álgebra o la presentación. Así, variables como $q(t)$ o $S(t)$, de uso extensivo en el libro, serán muchas veces simplificadas y escritas simplemente como q o S , respectivamente. En algunos casos excepcionales se utilizará la notación q_t o S_t , pero en general esta es una notación menos extensiva. La justificación para mantener en algunos casos esta última notación es que todavía es de uso frecuente en la literatura.

El autor es consciente de que el entendimiento del lector aumenta en la medida que exista consistencia en la selección del nombre y notación de las variables usadas una y otra vez a lo largo de las páginas del libro. En general esta ha sido la predisposición al escribir, muchas veces llegando incluso a modificar la notación original de los artículos o libros consultados. Sin embargo, pretender absoluta consistencia en un libro que cuenta con alrededor de 700 páginas y que describe y utiliza decenas de variables no fue siempre posible.

Así, por ejemplo, el libro denota por $E[\cdot]$ y a $\text{Var}[\cdot]$ las esperanzas y varianzas matemáticas de una variable aleatoria, mientras que \bar{x} describe el promedio o media aritmética de una variable (esto es $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i$). A menos que se haya cometido un error tipográfico (que en una obra de este tamaño no puede descartarse *a priori*), el uso de esta notación debiese siempre mantenerse.

A su vez, el libro presenta una serie de variables económicas y financieras de uso extensivo en la literatura académica y la industria minera. Por eso, se ha tratado de mantener consistencia a lo largo de las páginas para denotar el precio del commodity a extraer (P), los costos de producción (C), los costos marginales de producción (C_q o C'), la utilidad instantánea (π) y la tasa de descuento (r). En el caso del funcional de mayor relevancia para esta obra, el Valor Actual Neto, este se puede denotar por sus siglas en castellano (VAN) o, cuando la exposición es puramente matemática, por J o V (este último caso en general se limita al Capítulo 16 debido a que esta es la notación preferida en el caso de la teoría de las opciones reales).

De forma general, las unidades de medida no desempeñan un papel relevante en la exposición (aunque sí en la práctica de la explotación de minas) debido a que el tratamiento es usualmente algebraico. Sin embargo, cuando se ha requerido para mejorar la exposición o plantear algunos problemas aplicados, se utiliza el Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI).

Algunas letras mayúsculas se han intentado reservar (como los casos antes mencionados J o V) para variables de uso frecuente. Tal es el caso de H para denotar hamiltoniano, L para lagrangiano, S para reservas remanentes y T para la vida de la mina (*life of mine* o LOM). En el caso de las letras minúsculas el libro mantiene q para referirse a la producción de la mina.

Finalmente, algunas letras para denotar variables de interés se han tomado prestadas de otros alfabetos distintos al latino. Tal es el caso de τ para los impuestos, Ω para el volumen excavado y de \wp para el *timing* óptimo de inversión. Esta última letra (*thorn*, del alfabeto inglés antiguo) es primera vez que se utiliza según el conocimiento del autor para referirse a esta variable, y su uso se justifica debido a que tanto t , T como τ se usaron para expresar otras variables.

El autor

Juan Ignacio Guzmán es Ingeniero Civil de Industrias Mención en Minería de la Pontificia Universidad Católica de Chile y doctor en Economía de Minerales por la misma universidad. Desde 2003 se ha desempeñado como consultor nacional e internacional de minería en más de 25 commodities minerales, incluyendo cobre, oro, litio, potasio, molibdeno, hierro, aluminio, petróleo, gas y yodo, entre otros. En 2006 fue profesor visitante en la Escuela de Economía y Negocios de la Colorado School of Mines en Estados Unidos. En 2008 fundó Gestión y Economía Minera Limitada (GEM), donde hoy se desempeña como gerente general. En GEM ha liderado alrededor de 250 estudios en los ámbitos de la economía, evaluación, estrategia y optimización para la industria minera en Chile y otra decena de países. Desde 2003 ha sido profesor de pre y postgrado en la Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad de Chile y Universidad de los Andes, en cursos asociados a la ingeniería industrial y de minas, así como a la economía de minerales.

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo se describen los conceptos básicos que se deben considerar para estudiar los fundamentos de la economía minera. En particular, esta disciplina se sitúa como parte de la economía de los recursos naturales, donde se relaciona con la economía de minerales, más tradicional y reconocida. A pesar de la relación entre ambas, el objeto de estudio no es idéntico. Por eso, este capítulo describe las principales diferencias entre ambas disciplinas, para luego reforzar la cadena de valor del proceso minero, introducir la terminología principal de las áreas afines, así como detallar la importancia de la heterogeneidad y distribución espacial de los *commodities* minerales en los yacimientos y su rol en el estudio de la economía minera.

1.1 Economía de los recursos naturales

La economía se divide en tres áreas principales, a saber: microeconomía, macroeconomía y econometría.

La economía de los recursos naturales es una las disciplinas de la microeconomía, además de otras como por ejemplo la organización industrial, la economía de la salud o la educación. La microeconomía es la parte de la economía que estudia el comportamiento económico de los agentes económicos individuales (los consumidores, las empresas, los trabajadores y los inversores), así como de los mercados en los que interactúan. La microeconomía considera las decisiones personales para cumplir ciertos objetivos propios, como puede ser la maximización de la satisfacción personal en el caso de las personas o de las utilidades o valor presente neto en el caso de las empresas.

La economía de los recursos naturales corresponde al estudio de cómo la sociedad asigna los recursos naturales escasos como reservas pesqueras, plantaciones de árboles, agua dulce, minerales, entre otros¹. Dentro de los recursos naturales se pueden considerar los siguientes:

- Minerales.
- Forestales.
- Tierra.
- Plantas.
- Animales terrestres.
- Peces.
- Agua.
- Servicios meteorológicos.

Evidentemente, la tendencia es a pensar en que los recursos anteriores son todos de distinta naturaleza y, en este punto, sería crítico tener una forma de clasificarlos. Para tal fin, se presenta en la subsección siguiente la ecuación fundamental de los recursos naturales.

1.1.1 Ecuación fundamental de los recursos naturales

Sea S_t la cantidad de reservas de un recurso natural disponible para su explotación en el instante t . Sin pérdida de generalidad, se asumirá en un principio que el tiempo es discreto y, para efectos de la derivación de la ecuación, se asumirá la existencia de dos períodos distintos: 0 y 1. Durante el periodo 0, se explota una cantidad ΔS del recurso y en dicho periodo se suma al reservorio inicial una cantidad Q_0 . De aquí, la relación fundamental entre dichas variables, denominada «ecuación fundamental de los recursos naturales», viene dada por:

$$S_1 = S_0 - Q_0 + \Delta S \quad (1.1)$$

La ecuación anterior no solo relaciona en el tiempo al *stock* o reserva (S) de un recurso natural con su flujo (Q), sino que el término ΔS entrega en sí mismo una forma simple de clasificación. De hecho, dependiendo del signo de este término se podrán clasificar los recursos en renovables ($\Delta S > 0$), no renovables ($\Delta S = 0$) y perecibles ($\Delta S < 0$).

Los recursos renovables son aquellos que se van reponiendo en el tiempo. De esta forma las cantidades en el reservorio del recurso están afectas al proceso de

¹ Debe distinguirse este concepto del de economía ambiental, cuyo objeto de estudio es la forma en que se disponen los residuos o desechos de la sociedad y la calidad resultante del agua, el aire y el suelo como receptores de dichos desechos. La economía ambiental también se encarga del estudio de la conservación de los ambientes naturales y la biodiversidad. Para una introducción a la economía ambiental, el lector puede consultar Field y Field (2016).