Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik

Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus

2. Auflage

Springer Spektrum

Die antike Mathematik

Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik

Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus

2., verbesserte Auflage

Springer Spektrum

Dietmar Herrmann
Anzing, Deutschland

ISBN 978-3-662-61394-8 ISBN 978-3-662-61395-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61395-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandabbildung: Akropolis © sborisov/Fotolia

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

> *Von demjenigen nun, der die Geschichte irgendeines Wissens überliefern will, können wir mit Recht verlangen, dass er uns Nachricht* gebe, wie die Phänomene nach und nach bekannt geworden, was *man darüber phantasiert, gewähnt, gemeint und gedacht habe*[1].

Auch wenn die *Geschichte der Mathematik* kein prüfungsrelevantes Vorlesungsfach an deutschen Hochschulen ist, kann ein ergänzendes Buch von Interesse sein. Es bietet für alle Mathematik-Lehrenden und -Interessierten eine ganz neuartige Sicht auf die vielfältigen Problemstellungen, die im Laufe eines Jahrtausends (Thales 580 v. Chr. bis Proklos 420 n. Chr.) in der antiken griechischen Mathematik entwickelt wurden. Aus Umfangsgründen können es nur Facetten der verschiedenen Werke sein, die sich jedoch zu einem Kaleidoskop der Wissenschaft zusammensetzen. Ein breites Spektrum von Aufgaben, Konstruktionen und historischen Abbildungen setzt sich zusammen zu einem neuen Gesamtbild, das mehr Einsicht verschafft als herkömmliche summarische Beschreibungen.

Die vielseitigen Methoden, die die griechischen Forscher erdacht haben, ringen auch dem heutigen Betrachter Respekt und Anerkennung ab. Diese erstaunlichen Leistungen sind ohne jegliche Hilfsmittel wie Rechenmaschinen und moderne Kommunikation entstanden. Es wurde Wert darauf gelegt, die ganze Bandbreite der griechischen Mathematik zu schildern, insbesondere mithilfe von literarische Quellen und einer gelungenen Bilderauswahl auch den Kontext der pythagoreisch-platonischen Philosophie einzubringen. Es gibt drei Möglichkeiten einer historischen Aufarbeitung: streng chronologisch, biografisch-personenbezogen oder sachgebunden mithilfe spezieller Themenkreise. Die vorliegende Darstellung wählt eine Mischung der beiden letzt genannten.

Ein erstes Problem bei der Darstellung antiker Mathematik wird von dem berühmten Artikel *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics* von *Sabetai Unguru* aufgeworfen. Der Verfasser äußert darin die Auffassung, dass es prinzipiell unangemessen sei, antike Erkenntnisse mit modernen Formeln darzustellen. Der Formel- und

[1] J.W. von Goethe: Aus dem Vorwort der Farbenlehre (1810).

Begriffsapparat der modernen Mathematik beinhaltete Konzepte und Abstraktionen, die das Authentische am historischen Vorgehen möglicherweise verschleiern. Als Beispiel sei die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gewählt. In der modernen Mathematik gilt sie für alle abstrakten Elemente eines kommutativen Rings; eine solche Begriffsbildung ist einem Euklid völlig fremd. Ein Produkt zweier Zahlen oder ein Quadrat ist bei Euklid stets mit einem Flächeninhalt verbunden und kann nur mit Größen gleicher Dimension verknüpft werden. Das griechische Wort αριθμος *(arithmos)* muss im phythagoreisch-platonischen Umfeld gesehen werden und kann nicht mit dem Wort *Zahl* adäquat übersetzt werden. Um die Darstellungen lesbar zu machen und kompakt zuhalten, wird die gewöhnliche Formelsprache verwendet.

Ein zweites Ziel ist die Schilderung des politisch-kulturellen Umfelds, in dem sich der griechische Wissenschaftler befindet. Das kulturelle Erblühen Athens in einer Phase relativen Friedens zwischen den Perserkriegen – aufgrund ihrer Führungsrolle im Bündnis gegen die Perser – ermöglichte den Bau einer Akademie, die Bildungswillige – wie Aristoteles – aus ganz Griechenland anzog. Alexander befreite Ägypten von der persischen Besatzung und bewirkte eine Machtverschiebung nach Südosten. Die nach seinem Tod durch die Reichsteilung entstehende ägyptisch-syrische Provinz wurde mit ihrer Hauptstadt Alexandria intellektuelles und wirtschaftliches Zentrum des Mittelmeerraums. Die dort gegründeten Schulen am Museion und Serapeion überstanden den Zusammenbruch des Ptolemäerreichs und gediehen auch unter der römischen Besatzung. Erst das Aufkommen des Christentums als Staatsreligion beendet das Schicksal der noch an der platonischen Lehre hängenden Wissenschaftler, wie man am Schicksal der Hypatia sieht.

Ein weiteres Anliegen ist das Einbeziehen von neuen, kritischen Gesichtspunkten im Vergleich zur älteren Literatur. Geschichten, dass der Vegetarier Pythagoras bei der Entdeckung eines Lehrsatz mehrere Stiere geopfert hat oder dass Archimedes mit Brennspiegeln die Segel der römischen Flotte in Brand gesetzt hat, kann man als Märchen abtun. Eine moderne Interpretation von Diophantos, Kritisches zum Werk des Klaudios Ptolemaios und Heron, sowie neue Übersetzungen von Nikomachos und Theon von Smyrna liefern eine neuartige Sicht auf die griechische Mathematik. Das umfangreiche Werk von Pappos wird völlig neu bewertet. Die verwendeten Methoden setzen meist nur mittlere Kenntnisse voraus.

Die Geometrie tritt gegenwärtig in der Ausbildung etwas in den Hintergrund; dies ist aber kein hinreichender Grund die euklidische Geometrie ganz abzuschaffen nach dem Motto von J. Dieudonné (Mitglied des Bourbaki-Kreises) *Euclid must go!*

Zur 2. Auflage

Der Autor ist dem Verlag zu Dank verpflichtet für die Herausgabe des Buchs nunmehr in der 2., verbesserten Auflage. So konnte ein eigenes, neuartiges Kapitel zur Römischen Mathematik eingebracht und mit neuem Bildmaterial illustriert werden. Viele andere Kapitel wurden aktualisiert und erweitert, insbesondere auch der dem Fortwirken der hellenistischen Mathematik in Byzanz und Bagdad gewidmete Abschnitt.

Ferner bedanke ich mich bei Herrn Prof. Lothar Profke für die hilfreichen Kommentare zur 1. Auflage. Ein besonderer Dank gebührt der Programmplanerin Frau Dr. Annika Denkert für ihre Unterstützung des Projekts!

Der Autor wünscht eine anregende Lektüre!

Dietmar Herrmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1

1.1 Zum Inhalt des Buchs

Kap. 2 schildert das Aufkommen einer neuen griechischen Kultur, die zu einem Neubeginn der griechi-schen Zivilisation führt, die später in ganz Europa bestimmend wird. Mit dem Aufkommen der Wissen-schaften entwickelt sich auch die Mathematik.

Die Kap. 3 bis 5 behandeln die Anfänge der Mathematik durch die Pioniere Thales, Pythagoras und Hippokrates, die allesamt von den ionischen Inseln bzw. Küstenstädten stammen.

Die Kap. 6 bis 8 berichten, wie Athen durch Errichtung der Akademie und des Lykeions zum wissenschaftlichen Zentrum wird. Obwohl Platon und Aristoteles keine eigentlichen Mathematiker waren, gingen von ihnen ganz entscheidende Impulse für die Mathematik aus.

Nach dem Tod von Alexander des Großen zerfällt sein Herrschaftsbereich in einzelne Satrapen- bzw. Diadochenreiche. Wie die Symbiose aus griechischer und ägyptischer Kultur unter dem Herrscherhaus der Ptolemäer aus der neuen Hauptstadt Alexandria ein Handels- und Wissenschaftszentrum macht, schildert Kap. 9. Alexandria bietet bis zur römischen Eroberung die ideale Wirkungsstätte für eine ganze Reihe berühmter Mathematiker wie Euklid (Kap. 10), Archimedes (Kap. 12), Eratosthenes (Kap. 13) und Apollonius (Kap. 15).

Die drei klassischen Probleme wie Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung und Quadratur des Kreises sind als Themenbereiche in Kap. 11 zusammengefasst. Angeschlossen sind noch die Konstruierbarkeit der regulären Polygone und die Quadratur der sog. Möndchen, die Hippokrates kunstvoll entwickelte, um damit die Quadratur des Kreises zu finden.

Kap. 14 bietet einen allgemeinen Überblick über die Geometrie der Kegelschnitte, die sich nicht mehr in den Lehrplänen der weiterführenden Schulen findet. Es dient als Vorbereitung für das folgende Kapitel zu Apollonios von Perga (Kap. 15).

D. Herrmann, *Die antike Mathematik,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-61395-5_1

Auch nach der Eingliederung ins Römische Reich wirkte Alexandria noch lange als Ausbildungszentrum und Werkstatt berühmter Naturwissenschaftler. Zu nennen sind hier Astronomen wie Aristarchos und Hipparchos (Kap. 16) sowie Klaudios Ptolemaios (Kap. 18), Ingenieure wie Ktesibios und Heron (Kap. 17) und die Mathematiker Menelaos, Diophantos (Kap. 21), Pappos von Alexandria (Kap. 22). Besprochen werden auch die weniger bekannten Gelehrten wie Nikomachos von Gerasa (Kap. 19), Theon von Smyrna (Kap. 20) und Theon von Alexandria (Kap. 23), die keine primären Mathematiker waren.

Wie schon im ersten Teil der Einleitung ausgeführt, ist es problematisch, antike Mathematik mit modernen Formeln zu beschreiben; die Leserin bzw. der Leser wird durch den Hinweis *in moderner Schreibweise* an den Sachverhalt erinnert. Aus Gründen der Lesbarkeit und Straffung des Textes ist es nicht möglich alle Rechenschritte *im alten Stil* nachzuvollziehen; deshalb werden an wenigen Stellen des Buchs Hilfsmittel der Differenzialrechnung Mathematik eingesetzt, im Kap. 11 wird auf den Begriff der algebraischen Körpererweiterung verzichtet. Die Verwendung der den Griechen unbekannten trigonometrischen Funktionen konnte nicht ganz vermieden werden, da die ausschließliche Verwendung der Sehnenfunktion das Lesen des Textes erschwert.

Für verschiedene Namen gibt es konkurrierende Formen im Griechischen und Lateinischen. Hier werden in der Regel die griechischen Namen verwendet wie *Nikomachos* statt Nicomach, *Diophantos* statt Diophantus oder *Ptolemaios* statt Ptolemäus. Gängige Namen werden aber verwendet, wie Euklid statt *Eukleides* oder Alexandria statt *Alexandreia.* Bei Recherchen in Bibliotheken oder Buchkatalogen wird meist der lateinische Namen im Genitiv, wie *Apollonii Pergaei quae graeci exstant,* verwendet.

Sofern kein deutschsprachiges Werk zitiert ist, stammen alle Übersetzungen aus dem Lateinischen und Englischen vom Autor, wenn keine andere Quelle genannt wird. Bei Hinweisen auf Euklid, Apollonius usw. geben die römischen Zahlen stets das Buch an, die lateinischen den Lehrsatz bzw. Paragrafen. Euklid (I, 47) ist also der Lehrsatz 47 im ersten Buch der *Elemente,* der wohlbekannte Satz des Pythagoras. Kommentare und Erläuterungen des Autors stehen in eckigen Klammern. Die Platon- und Aristoteles-Hinweise werden in der üblichen Nummerierung nach Stephanus bzw. Bekker gegeben.

Dieses Buch ist aus Aufzeichnungen und Notizen, die der Autor in mehreren Jahren gesammelt hat in dem Wunsch, das Material in einem gut lesbaren, historisch bebilderten Band in moderner, kritischer Darstellung zu vereinen. Es ist natürlich unmöglich, alle mathematischen Leistungen dieses Jahrtausends aufzuzählen; aus Umfangsgründen erfolgt eine exemplarische Beschränkung auf bestimmte, für den jeweiligen Autoren typischen, Fragestellungen. Dabei wird eine Fülle von Konstruktionen, Aufgaben und Algorithmen vorgestellt, die zur Eigenbeschäftigung und zur Verwendung im Unterricht anregen soll. Eine Vielzahl von Abbildungen erleichtert das Verständnis des Stoffs. Wie weit es gelungen ist, das Mosaik der griechischen antiken Mathematik Steinchen für Steinchen zusammenzusetzen und ihre Gelehrten in ihrem sozio-kulturellen, politischen und religiösen Kontext lebendig werden zu lassen, möge die geneigte Leserin bzw. der geneigte Leser entscheiden.

Ergänzung zur 2. Auflage

Der Autor dankt dem Verlag für die Bereitschaft, das Buch in 2. Auflage herauszugeben; dies ermöglicht dem Autor den Text zu aktualisieren, eine Vielzahl von neuen Farbbildern aufzunehmen und diverse Druckfehler zu korrigieren. Neu hinzugekommen ist das Kap. 25 „Römische Mathematik", ein Thema, das hier zum ersten Mal umfassend und neuartig dargestellt wird. Neu ist auch das Abschn. 16.4 „Anwendungen in der Geographie". Wesentlich erweitert wurde die Darstellung der Griechischen Mathematik in den Abschn. 2.2 bis 2.3, ebenfalls „Die Mathematik des Frühmittelalters" in Abschn. 26.2. Aus Umfangsgründen musste das bisherige „Was Euklid noch nicht wusste" entfallen. Aktualisiert wurden insbesondere die Kap. 4 (Pythagoras), Kap. 8 (Aristoteles und das Lykeion), Kap. 9 (Alexandria), Kap. 12 (Archimedes) und Kap. 21 (Diophantos).

Für interessierte Leserinnen und Leser darf ich noch auf die beiden ergänzenden Bände des Autors hinweisen, die im selben Verlag erschienen sind:

- *Die Mathematik im Mittelalter:* Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam
- *Die Mathematik im Vorderen Orient:* Geschichte der Mathematik in Alt-Ägypten und Mesopotamien

1.2 Zum Stand der mathematikgeschichtlichen Forschung

> *Ich glaube, dass der Versuch Mathematik ohne Bezug auf ihren kulturellen, sozialen, philosophischen und historischen Hintergrund zu lehren, ein schwerwiegender Irrtum und ein strategischer Fehler ist.*[1]

Über die sog. *geometrische Algebra* schrieb O. Neugebauer[2]:

> Die Antwort auf die Frage, wo der Ursprung aller grundlegenden Probleme in der geometrischen Algebra liegt [nämlich in den Flächenumwandlungen von Euklid (II,1-10) bzw. Euklid (VI,24-29)], kann heute vollständig gegeben werden: sie liegen einerseits in den Bedürfnissen der Griechen die generelle Gültigkeit ihrer Mathematik im Kielwasser der aufkommenden Irrationalitäten zu sichern, andererseits in der sich ergebenden Notwendigkeit die Resultate der vorgriechischen Algebra zu übersetzen. Ist einmal das Problem auf diese Art formuliert, erweist sich alles als trivial und liefert einen nahtlosen Übergang von der babylonischen Algebra zu den Formulierungen Euklids.

Diese Auffassung, dass Euklid Flächenumwandlungen eine Form von versteckter Algebra darstellen, wurde weitgehend Allgemeingut, wie man den Schriften von H.G.

[1] R.L. Hayes, 6th International Congress on Mathematical Education, Budapest 1988.

[2] O. Neugebauer: *Zur geometrischen Algebra,* Quellen u. Studien zur Geschichte d. Mathematik, Abt. B3,254–259.

Zeuthen und B.L. van der Waerden entnehmen kann. Zeuthen schreibt ähnlich in seiner Schrift[3] über die Kegelschnitte:

> Obwohl die Griechen nicht den Begriff des Koordinatensystems hatten, würden sie rechtwinklige und schiefwinklige Koordinaten verwenden … Die Theorie der Proportionen würde ihnen erlauben, die wichtigsten algebraischen Operationen auszuführen. […] Die geometrische Algebra habe zu Euklids Zeiten eine solche Entwicklung erreicht, dass sie dieselben Aufgaben verrichten konnte wie unsere Algebra, solange diese nicht über die Behandlung von Ausdrücken zweiten Grades hinausgeht(!)

Auch B.L. van der Waerden setzt in seinem bekannten Buch *Science Awakening* (S. 119) die obengenannten Flächenumwandlung von Euklid gleich mit der Anwendung der heutigen binomischen Formeln wie $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Dieser Auffassung bereitete ein grundlegender Artikel[4] des Israelis Sabetai *Unguru* ein Ende. Ein Großteil seiner Attacke betraf die lang etablierte Lehrmeinung über die griechische *geometrische Algebra.* Einen Vorläufer in dieser Debatte hatte Unguru in Jacob *Klein* (S. 5), der bereits 1965 schrieb:

> Die meisten Geschichtsdarstellungen versuchen die griechische Mathematik mithilfe der modernen Symbolik zu erfassen, als wäre dies nur eine äußere Form, die man für beliebige Inhalte maßschneidern könne. Selbst wenn die Nachforschungen auf einem wahren Verständnis der griechischen Wissenschaft beruhen, wird man erkennen, dass die Untersuchung auf einem Erkenntnisniveau verläuft, das durch moderne Vorstellungen geprägt ist.

Auch A. Szabó, der sich in seinem Buch (S. 457) schon 1969 gegen die Thesen von O. Neugebauer wandte:

> (1) Selbst wenn wir glauben, dass es eine babylonische Algebra wirklich gegeben hat, auch dann hat man bisher noch mit keiner konkreten Aufgabe wahrscheinlich machen können, dass die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hätten.
> (2) Jene Sätze bei Euklid, die man gewohnt ist, als algebraische Sätze in geometrischem Gewand anzusehen, haben mit der Algebra in Wirklichkeit nur so viel zu tun, dass wir in der Tat sehr leicht unsere algebraischen Äquivalente für diese Sätze angeben können.

Den Begriff der geometrischen Algebra nannte Unguru ein *Fantasiegespinst, ein monströses Zwittergeschöpf, das sich Mathematiker ausgedacht haben, denen jegliches Gefühl für Historie fehlt.* Dieser Begriff dürfe auf keinen Fall auf die babylonische oder griechische Mathematik angewendet werden.

---

[3] H.G. Zeuthen: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum,* Kopenhagen 1886.

[4] S. Unguru: *On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics:* Archive for the History of Exact Sciences 15 (1975), 67–114.

> Diese historiografische Auffassung, die sich hinter dem Begriff „geometrische Algebra“ verbirgt, ist anstößig, naiv und historisch nicht haltbar. Historische Mathematiktexte unter dem Blickwinkel modernen Mathematik zu betrachten, ist die sicherste Methode, das Wesen der antiken Mathematik zu missverstehen, bei der philosophische Voreinstellungen und metaphysische Verflechtungen eine sehr viel grundlegendere und bedeutsamere Rolle gespielt haben als in der modernen Mathematik. Die Annahme, man könne automatisch und unterschiedslos auf jeden mathematischen Inhalt die moderne algebraische Symbolik anwenden, ist der sicherste Weg, die innewohnenden Unterschiede zu missverstehen, die in der Mathematik vergangener Jahrhunderte inbegriffen sind. Geometrie ist keine Algebra!

Später ergänzt er an gleicher Stelle

> Es ist beklagenswert und traurig, wenn ein Student der antiken Kulturgeschichte sich erst mit den Bezeichnungsweisen und Operationen der modernen Mathematik anfreunden muss, um zu verstehen, welche Bedeutung und Intentionen moderne Kommentatoren in die alten Texte hineininterpretieren. … Das Ziel dieser sog. historischen Studien ist wohl zu zeigen, wie die antiken Mathematiker ihre modernen Ideen und Prozeduren verstecken unter einem Deckmantel von unbeholfenen, peinlichen, antiquierten und altmodischen Ausdrucksweisen. Mit anderen Worten ist es wohl Aufgabe eines Mathematik-Historikers, die alten mathematischen Texte zu entwirren, sie in die moderne Sprache der Mathematik umzusetzen, damit sie für alle Interessenten verfügbar werden.

Seine Feststellung, dass diese Vorgehensweise *anachronistisch* und *unhistorisch* ist und deshalb die ganze griechische Mathematik neu geschrieben werden müsse, entfachte wütende Reaktionen. Hans *Freudenthal,* Andre *Weil* und B.L. *van der Waerden* publizierten ihre Antworten in derselben Zeitschrift; der Protest führte dazu, dass die Schriftleitung der Zeitschrift weitere Beiträge Ungurus ausschloss.

In seiner Gegenoffensive hielt sich van der Waerden nicht zurück:

> Unguru, wie viele Nicht-Mathematiker, überschätzt stark die Bedeutung der Symbolik in der Mathematik. Diese Leute sehen unsere Beiträge voller Formeln und meinen, dass diese Formeln den wesentlichen Inhalt des mathematischen Denkens ausmachen. Wir, die tätigen Mathematiker, wissen es besser, dass in vielen Fällen die Formeln nicht den wesentlichen Inhalt darstellen, sondern nur bequeme Hilfsmittel sind.

In einem Brief an den Herausgeber der Zeitschrift formulierte A. Weil[5]:

> Es empfiehlt sich die Mathematik zu beherrschen, bevor man sich mit ihrer Geschichte abgibt. […] Die Bücher VII bis IX Euklids enthalten keinerlei Algebra und auch keine sog. geometrische Algebra. Es ist natürlich viel praktischer die algebraischen Operationen mit unseren Algebra-Symbolen zu betreiben, als mit Worten, wie Euklid es macht; genau wie es einfacher ist, mit Dezimalbrüchen (oder wie die Computer im Binärsystem) zu rechnen als mit den Brüchen Archimedes’, das ändert jedoch nichts am Kern der Sache.

[5] Andre Weil: *Who Betrayed Euclid? (Extract from a letter to the Editor),* Archive for the History of Exact Sciences 19 (1978), 91–93.

Der Brief Weils schließt mit folgenden Worten, die man wohl selten in einer mathematischen Zeitschrift findet:

> Wenn eine wissenschaftliche Disziplin, die zwischen zwei bereits existierende (seien sie A und B genannt) in gewissem Sinne vermittelnd tritt, sich neu etabliert, so schafft dies oft Raum für das Aufkommen von Parasiten, die unwissend sind in A und B, aber versuchen davon zu leben, indem sie die in A Tätigen einschüchtern, sie würden nichts von B verstehen und umgekehrt. Wir sehen leider, dass genau dies zurzeit passiert in der Geschichte der Mathematik. Lasst uns versuchen, diese Infektion zu stoppen, bevor sie unser Schicksal wird.

Unguru antwortet vier Jahre später in der Zeitschrift Isis[6]:

> Die Geschichte der Mathematik wurde in der Regel geschrieben, um das Sprichwort „Anachronismus ist keine Sünde" zu veranschaulichen. Die meisten zeitgenössischen Mathematikhistoriker, Mathematiker seit Studientagen, nehmen schweigend oder auch explizit an, dass mathematische Einheiten aus der Welt der Platonischen Ideen stammen, wo sie geduldig darauf warten, von dem genialen Geist eines tätigen Mathematikers entdeckt zu werden. Mathematische Konzepte sowohl konstruktive als auch rechnerische, werden als ewig und unveränderlich angesehen, unbeeinflusst von den ureigenen Merkmalen der Kultur, in der sie auftreten; jedes einzelne ist in seinen verschiedenen historischen Auftritten eindeutig identifizierbar, da alle diese Auftritte nur verschiedene Verkleidungen derselben platonischen Seinsstufe darstellen. [..] Verschiedene Formen desselben mathematischen Konzepts oder Vorgehens werden nicht bloß als mathematisch äquivalent, sondern auch als historisch gleichwertig betrachtet.

Einen Überblick über die damalige Auseinandersetzung bietet der Überblicksartikel[7] von D.E. Rowe. Andre Weil vertritt hier nach Rowes Ansicht die Philosophie des Bourbaki-Kreises. Er ist der Meinung, dass ein geringes Wissen über Gruppentheorie helfe, den Inhalt der euklidischen Proportionentheorie (und anderes nebenbei) verständlich zu machen. Sein Ziel ist ein völlig anderes als das, die komplexen Probleme, die in den Büchern V und VII von Euklids *Elementen* auftreten, aufzuzählen. Dieser mathematische Block liefert zahlreiche, subtile Schwierigkeiten für unser Verständnis von griechischen Bezeichnungen von Zahlen, Größen und Verhältnissen und ihren wechselseitigen Wirkungen, Schwierigkeiten, die auch heute noch Experten vor Rätsel stellen. Historiker neigen dazu sich zu fragen, ob mathematische Konzepte immer eine eindeutige Bedeutung haben – unabhängig von dem kulturellen Umfeld, in dem sie entstehen. Weil ist nicht nur davon überzeugt, sondern auch der Meinung, dass er und andere Talentierte mithilfe der modernen Algebra imstande sind, die rätselhaften Probleme der Mathematikgeschichte zu lösen. Unguru nennt dieses Verhalten *ahistorisch:*

[6]Unguru S.: History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of Art, Isis 70 (1979), 555–565.

[7]Rowe D.E.: New Trends and Old Images in the History of Mathematics, 1996; im Sammelband Calinger.

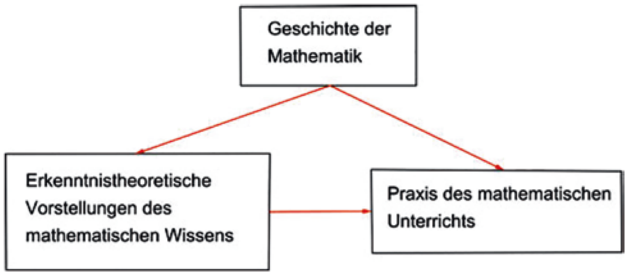

Abb. 1.1 Diagramm zur Mathematik-Rezeption

> Wenn Gelehrte fortfahren, die besonderen, spezifischen Eigenheiten einer mathematischen Epoche zu vernachlässigen, sei es aufgrund von explizit gegebenen oder als stillschweigend anerkannten Prinzipien, dann ist ihre Arbeit ahistorisch und sollte als eine solche von der Historikergemeinschaft gekennzeichnet werden.

Als Erwiderung von Unguru meldete sich I. Bashmakova[8] zu Wort, deren moderne Diophantos-Interpretation mehrfach kritisiert worden war. Nach einem Vergleich der chinesischen, indischen und griechischen Mathematik kommt sie mit van der Waerden zu dem Schluss, dass in *allen* erwähnten Mathematiken die binomischen Formeln stets in Form von geometrischen Flächenumwandlungen dargestellt worden sind, in Indien und China ohne Zusammenhang mit irgendwelchen geometrischen Theorema. Nur in Griechenland wurde die Geometrie auf Axiomen aufgebaut und weiter entwickelt, auch als Probleme mit der Inkommensurabilität auftauchten.

Besonders I. Grattan-Guinness ging in einem Vortrag[9] mit Bashmakova hart ins Gericht, sie propagiere folgendes zweistufiges Vorgehen und widerspreche damit Unguru:

> Zuerst werde der [historische] Text in eine zeitgemäße mathematische Ausdrucksweise übersetzt; d.h. es wird ein äquivalentes Modell geschaffen. Dies sei absolut notwendig, um das eigentliche Verständnis des Textes zu entwickeln. Im nächsten Schritt sei es nötig, das betrachtete Werk in den mathematischen Kontext seiner Zeit einzubetten.

Die Bourbaki-Philosophie übte nicht nur Einfluss auf die Rezeption der hier behandelten Mathematikgeschichte aus, sondern bewirkte auch in den Siebziger und Achtziger Jahren eine beträchtliche „Modernisierung“ der Lehrpläne (vgl. Abb. 1.1). Besonders bekannt wurde der Vortrag von J. Dieudonné[10], der unter dem Motto stand: **Euclid must go!** und einige radikale Hypothesen enthält.

---

[8]Bashmakova I.: A new view of the geometric algebra of the ancients, im Sammelband Bashmakova.

[9]Grattan-Guinness I.: History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education, im Sammelband Van Brummelen.

[10]Dieudonné J.: *New Thinking in School Mathematics, Organization for European economic co-operation, 1961.*

(101) Diese Forderung mag vielleicht für einige ein Schock sein, aber ich möchte Ihnen mit einigen Details starke Argumente aufzeigen, die für diese These sprechen. Lassen Sie mich zuerst versichern, dass ich die tiefste Bewunderung für die Errungenschaften der griechischen Geometrie hege. Ich betrachte deren geometrischen Erfindungen als die vielleicht außergewöhnlichste intellektuelle Leistung, die je von der Menschheit erbracht wurde. Dank des griechischen Geistes waren wir imstande, den hochragenden Bau der modernen Wissenschaft zu überblicken.

(102) Bis heute sind die grundlegenden Begriffe der Geometrie selbst ausgiebig analysiert worden, besonders seit der Mitte des 19. Jahrhunderts. Dies ermöglichte uns für das euklidische Werk einfache und robuste Grundlagen zu schaffen und so deren Bedeutung in Bezug auf die moderne Mathematik neu zu formulieren; dabei werden ihre Fundamente getrennt von der ungeordneten Menge von Resultaten, die keinerlei Relevanz haben außer, dass sie verstreute Relikte von unzulänglichen Methoden oder einer veralteten Herangehensweise sind.

(103) Das Ergebnis mag vielleicht ein wenig bestürzend sein. Lasst uns annehmen – um die Argumentation zu vereinfachen -, dass die euklidische Geometrie der Ebene für Fremde aus einer anderen Welt gelehrt werden soll, die noch nie davon gehört haben oder nur Einblick haben wollen in mögliche Anwendungen der modernen Forschung. Dann denke ich, könnte der ganze Kurs in zwei bis drei Stunden in Angriff genommen werden- eine Stunde wird benötigt mit der Beschreibung des Axiomensystems, eine weitere mit nutzbaren Konsequenzen und die dritte möglicherweise mit einigen leichten, interessanten Übungen.

(104) Alles andere, das nun ganze Bände elementarer Geometrie füllt und dabei meine ich, zum Beispiel alles über Dreiecke (es ist vollkommen durchführbar und erwünscht die ganze Theorie zu erläutern, ohne dabei überhaupt ein Dreieck zu definieren!), fast alles über Kreisinversionen, Büschel von Kreisen und Kegelschnitten usw., all dies hat so viel Relevanz für das, was (reine und angewandte) Mathematik heute ausmacht, wie Magische Quadrate oder Schachprobleme!

Ergänzung zur 2. Auflage

Man will es kaum glauben, dass nach 45 Jahren die Diskussion über die sog. „geometrische Algebra“ immer noch voll im Gange ist; J. Høyrup[11] formuliert es härter: …*sometimes in disputes so hot that one would believe it to be blood.*

In seinem Grundsatz-Artikel nimmt Høyrup eine neutrale Stellung zwischen Unguru und den „Älteren“ Autoren, er prüft, ob die gemachten Zitate der verschiedenen Autoren korrekt sind und der Kontext verstanden wurde. Dabei stellt sich bei aller Kritik an Zeuthen heraus, dass niemand ernsthaft sein Buch über die Kegelschnitte gelesen und verstanden hat. Er erinnert an den Text von H. Freudenthal[12]:

---

[11] Høyrup J.: What is „geometric algebra“ and what has it been in historiography? AIMS Mathematics, 2(1): S. 128–160 (2017).

[12] Freudenthal H.: What Is Algebra and What Has It Been in History? *Archive for History of Exact Sciences* **16,** 189−200, 1977.

> Wer mit dem Lesen der griechischen Mathematik beginnt, ist beeindruckt von großen Teilen, die offenkundig algebraisch sind, sowie von anderen Teilen, in denen sich die Algebra scheinbar unter einer geometrischen Hülle verbirgt. […]. S. Unguru hat diese Ansicht kürzlich in Frage gestellt. Alle, die über griechische Mathematik geschrieben haben, haben sich geirrt, behauptet er. Aus welchen Gründen? Hat er sensationelle neue Fakten entdeckt? Nein, nichts! Er hat nicht einmal alte Tatsachen neu interpretiert. Er sagt einfach, dass sie falsch sind, und tut dies mit klarer rhetorischer Betonung. Wenn die Rhetorik nicht beachtet wird, besteht der Rest aus großen Auszügen aus der Arbeit anderer, die mit zahlreichen Ausrufezeichen und Fragezeichen versehen sind, und einigen präziseren Aussagen, die ordnungsgemäß einer Analyse unterzogen werden können.

Als Zitat Nr. 64 bringt er B. van der Waerden:

> Unguru bestreitet die Existenz einer babylonischen Algebra. Stattdessen spricht er unter Berufung auf Abel Rey von einer arithmetischen Stadium (der ägyptischen und babylonischen Mathematik), in der die Argumentation weitgehend elementar-arithmetisch verläuft oder auf empirisch paradigmatischen Regeln beruht, die aus erfolgreichen Versuchen als Prototyp abgeleitet wurden. Ich habe keine Ahnung, auf welchen Texten diese Aussage basiert. Für mich ist das Geschichtsschreibung in seiner schlimmsten Form: Meinungen anderer Autoren zu zitieren und sie so zu behandeln, als wären sie feststehende Tatsachen, ohne die Texte selbst zu zitieren. Bleiben wir bei den Fakten und zitieren einen Keilschrifttext BM 13901, der sich mit der Lösung quadratischer Gleichungen befasst. Problem 2 dieses Textes lautet: *Ich habe die (Seite) des Quadrats von der Fläche abgezogen, und 14,30 ist es.* Die Aussage des Problems ist völlig klar: Es ist nicht notwendig, es in moderne Symbolik zu übersetzen. Falls wir es übersetzen, erhalten wir die Gleichung $x^2 - x = 14{,}30$.

An anderer Stelle versucht van der Waerden seinen damaligen Widerspruch zu relativieren:

> Wenn diese Definition des „algebraischen Denkens“ akzeptiert wird, hat Unguru tatsächlich Recht, wenn er zu dem Schluss kommt, dass es „in der vorchristlichen Ära nie eine Algebra gegeben hat“ und dass die babylonische Algebra nie existiert hat und dass alle Behauptungen von Tannery, Zeuthen, Neugebauer und mir über „geometrische Algebra“ völliger Quatsch sind. Dies war natürlich in keiner Weise unsere Definition des algebraischen Denkens. Wenn ich von babylonischer, griechischer oder arabischer Algebra spreche, meine ich Algebra im Sinne von Al-Khwarizmi oder im Sinne von Cardanos „Ars magna“ oder im Sinne unserer Schulalgebra. Algebra ist also: Die Kunst, mit algebraischen Ausdrücken wie $(a + b)^2$ umzugehen und Gleichungen zu lösen wie $x^2 + ax = b$.

Høyrup liefert ein Zitat von D.E. Rowe[13], das belegt, Ungurus These ist inzwischen allgemein akzeptiert:

[13] Rowe, D.E.: Otto Neugebauer and Richard Courant: On Exporting the Göttingen Approach to the History of Mathematics, *The Mathematical Intelligencer* **34:**2, 29–37, 2012.

> Heute scheinen die meisten Historiker der Mathematik gekommen zu sein, um diesen zentralen Grundsatz [von Unguru] zu akzeptieren. In der Tat sagte mir A. Jones auf dem Symposium zu Ehren von Neugebauer am Institut für Altertumsforschung (NY), dass Ungurus Position nun als akzeptierte Orthodoxie angesehen werden könne. Unguru jedoch bittet darum zu differenzieren; er machte mich schnell auf die jüngsten Arbeiten von Experten der babylonischen Mathematik aufmerksam, die seiner Ansicht nach weiterhin die gleichen Arten von Sünden begehen, über die er sich so lange *geärgert* hat.

Den Autoren M. Sialoros und J. Christianides[14] ist es gelungen, eine gültige Definition von „Was ist die Vorstufe von Algebra", nunmehr *vormoderne Algebra* genannt, zu finden; Unguru hat das Manuskript gebilligt. Die „Vormoderne" wird erkannt an einem fünfstufigen Vorgehen:

- (1) Alle Variablen erhalten einen Namen
- (2) Alle Operationen werden nur mit benannten Variablen ausgeführt
- (3) Als Resultat werden eine oder mehrere Gleichungen erstellt
- (4) Diese Gleichungen werden umgeformt und schließlich gelöst
- (5) Die Lösung beantwortet die Problemstellung

Sie illustrieren dies an einem Beispiel von al-Khwārizmī: *Summe zweier Zahlen ist 10, ihr Produkt 21*

1. $A = x$; $B = 10 - x$
2. $x(10 - x) = 10x - x^2$
3. $10x - x^2 = 21$
4. $10 \div 2 = 5$; $5 \times 5 = 25$; $25 - 21 = 4$; $\sqrt{4} = 2$; $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$
5. $A = 7$; $B = 3$ oder umgekehrt

An einem Beispiel aus Abū Kāmils *Algebra* soll die Unterscheidung von „Arithmetik" und „Algebra" gezeigt werden: $x^2 + 10x = 39$. Abū Kāmil rechnet *arithmetisch:* $\frac{10}{2} = 5$; $5^2 = 25$; $39 + 25 = 64$; $\sqrt{64} = 8$; $8 - 5 = 3$. R. Rashed[15] erklärt den Rechengang in einer Fußnote mittels quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + 10x = 39 \Rightarrow (x + 5)^2 = 64 \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$$

Dies ist eine *algebraische* Vorgangsweise.

[14] Sialaros M., Christianidis J.: Situating the Debate on „Geometrical Algebra" within the Framework of Premodern Algebra, Science in Context 29(2), S. 129–150 (2016).

[15] Rashed R.: Abū Kāmil. Algèbre et analyse Diophantienne, de Gruyter 2012, S. 250.

Literatur

Grattan-Guinness, I.: History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. Am. Math. Mon. **111**(1), 1–12 (2004) (im Sammelband Van Brummelen)

Neugebauer, O.: Zur geometrischen Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B3; Springer (1936)

Rowe, D.E.: New Trends and Old Images in the History of Mathematics; im Sammelband Calinger: Vita Mathematica, MAA, Washington DC (1996)

2 Wie die griechische Wissenschaft begann

Das Staunen ist die Einstellung eines Menschen,
der die Weisheit wahrhaft liebt,
ja es gibt keinen anderen Anfang der Philosophie *als diesen*
(Platon: Theaitetos 155)

Um 1400 v. Chr. wurden die mächtigen Paläste der mykenisch-minoischen Kultur wie Mykene, Tirnys und Knossos zerstört und verlassen, die genaue Ursache kennt man nicht. Um 1200 v. Chr. kam es zu einer Welle von Einwanderungen indogermanischer Stämme der Ionier, Achäer und Dorer, vermutlich aus dem Balkan. Unklar ist, ob eine zweite Welle der Zerstörung (um 1200 v. Chr.), ausgelöst durch die sog. Seevölker, damit zusammenhängt, jedenfalls wurde eine Reihe von kleinasiatischen Stätten (wie Troja) und Inselsiedlungen (wie Kreta) vernichtet. Kenntnisse von diesen Angriffen vermitteln die ägyptische Papyri und Darstellungen an Tempelwänden.

Der Historiker *Thukydides* [I, 12] setzt in seinen *Historiae* die beiden ersten Einwanderungswellen auf 60–80 Jahre nach dem Trojanischen Krieg an, also auf etwa 1120 v. Chr. Die Dorer eroberten mit Eisenwaffen einen Großteil des griechischen (noch in der Bronzezeit lebenden) Festlands und gründeten Sparta. Dabei vertrieben sie die auf dem Festland lebenden Achäer und Ionier auf die griechischen Inseln und an die kleinasiatische Küste, die damals von Persern, Lydern und Medern bewohnt war. Herodot berichtet über diese Völkerwanderung, dass die Ionier

> ihre Städte in einer Gegend gegründet hätten, die das angenehmste Klima im ganzen bekannten Erdkreis hätten.

D. Herrmann, *Die antike Mathematik,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-61395-5_2

Abb. 2.1 Ausschnitte aus griechischen Vasenbildern

Pausanias bemerkt in seiner *Beschreibung Griechenlands:*

> Das Land der Ionier erfreut sich des günstigsten Klimas; es hat Heiligtümer, wie man sie nirgends findet. … Die Wunderwerke in Ionien sind zahlreich und stehen denen im (sonstigen) Griechenland kaum nach.

Bis etwa 700 v. Chr. waren die meisten Stadtstaaten *(polis)* gegründet, die im Laufe der Zeit zu wirtschaftlichen und kulturellen Zentren heranwuchsen. Zunächst war Sparta führend im Peloponnesischen Bund. Erfindungsreichtum und handwerkliche Geschicklichkeit, sowie die Verfügbarkeit von Sklaven, ermöglichten den Griechen, Schiffbau, Bergbau, Metallverarbeitung, Töpferei und Weberei zu betreiben. Dies geschah so erfolgreich, dass die Produktion den Eigenverbrauch überstieg. Abb. 2.1 zeigt mithilfe von Vasenbildern die Vielfalt des griechischen Lebens: Männer am Schmelzofen, beim Faustkampf, bei der Jagd und bei Festgelagen, Frauen bei der Viehzucht, beim Musizieren, bei der Totenklage, Kindererziehung und beim Schmücken der Braut.

Als Folge entwickelte sich eine rege Handelstätigkeit im Mittelmeerraum, die zur Gründung von Niederlassungen und Kolonien an den Küsten des Schwarzen Meeres, in Süditalien und sogar in Südfrankreich führte. (Platon sagte humorvoll darüber: *Die Griechen sitzen um das Mittelmeer herum wie die Frösche am Rand eines Teiches.*) Der englische Historiker W.G. Forrest nannte folgende Gründe für den sozialen und geistigen Umbruch im 7. und 6. Jahrhundert:

- Ausweitung des Handels und Kolonisierung im Mittelmeerraum
- Die dadurch erfolgte Steigerung der handwerklichen und landwirtschaftlichen Produktion für den Export
- Das Erwachen der Philosophie, die sich mit der Natur der Dinge beschäftigte und die Freiheit und Individualität des Einzelnen forderte

T. Gomperz schreibt in seinem Werk „Aus der Hekale des Kallimachos“ (1893):

> Die Kolonien waren das große Experimentierfeld des hellenischen Geistes, auf welchem dieser unter der denkbar größten Mannigfaltigkeit von Umständen erproben und die in ihm schlummernden Anlagen entfalten konnte.

Neben den Kolonien im Mittelmeerraum wurden auch wichtige Handelsvertretungen in Persien, Ägypten und Nordafrika gegründet. Konkurrenten waren insbesondere die Phöniker, die im Gebiet des heutigen Libanon lebten und ebenfalls den Mittelmeerraum kolonisierten. Handelszentrum der Phöniker war Tyros. Das um 900 v. Chr. als Kolonie gegründete Karthago übernahm später die phönizischen Besitzungen und wurde so mächtig, dass es erst nach drei Punischen Kriegen von den Römern besiegt wurde (Ende 146 v. Chr.).

Neben dem kaufmännischen Gewinn kam es auch zu einem regen Kulturaustausch mit den genannten Völkern. So übernahmen die Griechen die erfolgreichste Erfindung der Phöniker, nämlich die Schriftzeichen des Alphabets. Im Gegensatz zu den semitisch-arabischen Sprachen, die nur Konsonanten schreiben, glänzte das Griechische durch seine Vokalisierung. Die Dichtungen des *Homer,* entstanden im Ionien des achten und siebten Jahrhunderts v. Chr. wurden zunächst nur mündlich überliefert, sorgten aber später bei ihrer Aufzeichnung für eine einheitliche Sprache. Bei den Olympischen Spielen, die zunächst unregelmäßig ab 776 stattfanden, gab es einen Sängerwettbewerb mit der Darbietung der *Ilias* und *Odyssee.*

Man schätzt, dass von der Athener Bevölkerung zur Zeit des *Themistokles* (um 500) nur etwa die Hälfte, im juristischen Sinne betrachtet, Freie waren; von diesen wiederum hatte nur ein knappes Drittel das athenische Bürgerrecht. Nur diese Minderheit konnte das Wahlrecht ausüben und politische Ämter übernehmen. Wie in der Polis, so bildete sich auch in den griechischen Kolonien eine Oberschicht heraus, die aufgrund ihres Einflusses und ihres Reichtums nicht mehr von ihrer Hände Arbeit leben musste. Diese privilegierte Schicht hatte Zeit und Geld, um sich mit Kunst, Kultur und Philosophie zu beschäftigen.

Unter den Städten, die am meisten vom Handel profitierten, war Milet, das in Ägypten sogar über eine eigene Handelsniederlassung namens Naukratis verfügte. Milet bildete mit Chios, Ephesus, Samos und anderen den sog. *Ionischen Bund.* Dessen bekannteste Siedlungen in Süditalien (Magna Graeca) waren Kroton, Metapont und Tarent, die später die Wirkungsstätten der Pythagoreer wurden. Die Seeleute und Händler Milets konnten daher ein reiches Wissen an Seefahrt, Astronomie, Länder- bzw. Völkerkunde und Geografie erfahren. Während der Perserkriege (500–479) wurde Milet zunächst noch geschont, sodass es weiterhin lukrativen Handel treiben konnte. Nach dem Ionischen Aufstand unter der Führung Milets gegen die Perser wurde die Stadt 496 jedoch dem Erdboden gleichgemacht. Nach dem Wiederaufbau war Milets Vormachtstellung gebrochen, und es wurde im gegen Persien gerichteten Ersten Attischen Seebund tributpflichtig gegen Athen (ab 477).

In dem oben geschilderten günstigen Umfeld trat in der *Ionischen Phase* (7. bis 5. Jahrhundert) eine Gruppe von herausragenden Persönlichkeiten an der ionischen Küste auf, deren Weltbild nicht länger durch die überlieferten Göttermythen bestimmt wurde. Vielmehr versuchten sie, durch rationales Denken eine umfassende Erklärung der irdischen und astronomischen Naturerscheinungen zu geben; dies war die Geburtsstunde der Naturphilosophie, in der englischen Literatur *The Greek Miracle* genannt. Warum dieses Ereignis dort und zu diesem Zeitpunkt stattfand, hat eine Unzahl von Kommentaren hervorgebracht, mit denen man ganze Bibliotheken füllen könnte. Der berühmte Philosoph und Mathematiker B. Russell[1] beginnt seine *Philosophie des Abendlandes* mit den Worten:

> In der ganzen Weltgeschichte ist nichts so überraschend oder so schwer erklärlich wie das plötzliche Aufblühen der Kultur in Griechenland. Vieles, was zum Begriff der Kultur gehört, hatte es Jahrtausende zuvor in Ägypten und Mesopotamien gegeben; seither hatte es sich in den benachbarten Ländern ausgebreitet. Aber gewisse, bislang fehlende Elemente trugen erst die Griechen bei. Was sie im Reich der Kunst und Literatur geschaffen haben, ist allgemein bekannt; was sie auf dem Gebiet des reinen Denkens geleistet haben, ist einzigartig.

In seiner Schrift *Vom Ursprung und Ziel der Geschichte* (1949) geht K. Jaspers von der Annahme aus, dass es einen empirisch abgrenzbaren Zeitabschnitt gebe, in dem annähernd gleichzeitig die Grundkategorien des Denkens und die Ansätze der Weltreligionen entstanden sind, in denen die Menschen bis heute leben. Jaspers nennt diesen Zeitabschnitt, den er von ca. 800 bis 200 vor Christus ansetzt, die *Achsenzeit der Weltgeschichte.* In dieser Zeit seien unabhängig voneinander in China (Konfuzius und Laotse), in Indien (Buddha, Upanischaden), im Abendland (Homer, Thukydides) und in Palästina (jüdische Propheten wie Elias, Jesaias) bedeutsame kulturelle Grundlagen und Denkkategorien geschaffen worden, die auch heute noch aktuell sind und es erlauben, von einer gewissen Einheit der Weltgeschichte zu sprechen. Eine *Achse* der Weltgeschichte scheine um 500 v. Chr. zu liegen, in dem zwischen 800 und 200 v. Chr. stattfindenden geistigen Prozess. Dort liege der tiefste Einschnitt der Geschichte; es sei der Mensch entstanden, mit dem wir heute leben.

Die (griechischen) Philosophen dieser Zeit werden heute als *Vorsokratiker* bezeichnet. Unter diesen weisen Männern befanden sich Thales von Milet und Pythagoras von Samos, die der Überlieferung nach die Anfänge der Mathematik begründeten. Über die Babylonier und Ägypter hinausgehend, die Tontafeln und Papyri mit bloßen Zahlenbeispielen füllten, versuchten sie, Lehrsätze aufzustellen und allgemeine Zusammenhänge zu finden.

Nach dem Ende der Perserkriege konnte Athen eine führende Stellung unter den griechischen Städten einnehmen. Während der Zeit des Perikles (ca. 495–429) war Athen nicht nur politisch, militärisch und wirtschaftlich führend, sondern es bildete

[1]Russell B.: Philosophie des Abendlandes, Piper 2004, S. 25.

auch ein Zentrum der Kunst und Wissenschaft. Es kam hier zur Gründung der Akademie und zum Bau der Akropolis. Die wissenschaftliche Lehre findet in diesem Zeitraum in der Akademie des Platon bzw. des Lykeion des Aristoteles statt; er wird daher die sog. *Athenische Phase* genannt. Die Machtstellung Athens forderte Sparta heraus. Der mit den Spartanern geführte Peloponnesische Krieg schwächte Athen so sehr, dass es ab 338 unter makedonischen Einfluss geriet.

Nach Alexanders Tod (323 v. Chr.) wurde das eroberte Reich aufgeteilt; die Ptolemäer übernahmen die Herrschaft in Ägypten. Sie machten Alexandria (eine der elf von Alexander gegründeten Städte gleichen Namens) zur Hauptstadt, das nun Zentrum des Handels und der Gelehrsamkeit im Mittelmeerraum wurde. Hier wirkten am Museion und am Nachfolgeinstitut die Mathematiker *Euklid, Eratosthenes* und Apollonius. Archimedes arbeitete zwar in Syrakus, stand aber in engem Kontakt mit Alexandria. Der Zeitraum von 300–190, also bis zum Tod des Apollonius, wird die *Alexandrinische Phase* genannt.

Nach dem Ende der Ptolemäer-Herrschaft wurde Ägypten römische Provinz, konnte aber noch lange Zeit seine führende Rolle als Zentrum der Wissenschaft weiterhin ausfüllen. In den folgenden vier Jahrhunderten wirkten dort namhafte Mathematiker wie *Heron, Klaudios Ptolemaios, Pappos, Diophantos* und *Theon* mit Tochter *Hypatia* (Letztere um 415). In Athen ist als Mathematiker noch *Proklos Diadochos (Nachfolger)* zu nennen, der mit seinen Euklid- und Platon-Kommentaren wertvolle mathematische Hinweise gibt (um 480). Damit endet die *Phase der hellenistischen Mathematik;* die Antike war mit dem Zusammenbruch des Römischen Reiches im Jahre 476 beendet.

Das *Erbe der hellenistischen Mathematik* wurde in Rom, Konstantinopel und Bagdad verwaltet. Rom lernte die Arithmetik des Spätpythagoreers *Nikomachos* in der lateinischen Übersetzung des Boethius kennen. In Konstantinopel ließ *Leon, der Geometer,* alle erreichbaren Werke des Archimedes vervielfältigen. In Rom zehrten die Landvermesser vom griechischen Wissen, insbesondere von den Lehren des Heron. In Bagdad ließen die Kalifen wichtige Werke von Euklid, Archimedes, Apollonius und Ptolemaios ins Arabische übersetzen und bewahrten damit wertvolle Schriften, deren griechische Originale im Laufe der Jahrhunderte verloren gingen. Ein Großteil dieser arabischen Schriften wurde später im Mittelalter bzw. in der Renaissance ins Lateinische übersetzt und somit für die Gelehrtenwelt Europas zugänglich. Dieser Vorgang ist noch nicht beendet; auch heute findet man arabische Manuskripte, die Inhalte verlorener griechischer Schriften aufzeigen.

2.1 Die Entstehung der Mathematik

Als der sokratische Philosoph Aristippos bei einem Schiffbruch
an die Küste von Rhodos geworfen, dort geometrische Figuren
hingezeichnet sah, soll er seinen Gefährten zugerufen haben:
Lasst uns guten Mutes sein, ich sehe Spuren von Menschen!
(Marcus Vitruvius Pollio: *De Architectura*, Vorwort Buch VI)

Die Mathematik entstand ursprünglich als Teil der Philosophie. Den Anfang der Philosophie schildert Aristoteles [Metaphysik 982B] so:

> Denn Verwunderung war den Menschen jetzt wie vormals der Anfang des Philosophierens, indem sie sich anfangs über das nächst liegende Unerklärte verwunderten, dann allmählich fortschritten und auch über Größeres Fragen aufwarfen, z. B. über die Erscheinungen an dem Mond und der Sonne und den Gestirnen und über die Entstehung des Alls. Wer sich aber über eine Sache fragt und verwundert, der glaubt sie nicht zu kennen.
>
> Wenn sie [die Alten] daher philosophierten, um der Unwissenheit zu entgehen, so suchten sie das Erkennen offenbar um des Wissens wegen, nicht um irgendeines Nutzens willen. Das bestätigt auch der Verlauf der Sache; denn als so ziemlich alles zur Annehmlichkeit und (höheren) Lebensführung vorhanden war, da begann man diese Art der Einsicht zu suchen.

An späterer Stelle kommt er auf die Mathematik zu sprechen:

> Alle nämlich beginnen, wie gesagt, mit der Verwunderung, dass die Dinge so sind, wie sie sind, angesichts sich selbst bewegender Marionetten, der Sonnenwende oder der Inkommensurabilität der Diagonalen …. Über nichts geriete nämlich ein Geometer mehr in Erstaunen, als wenn die Diagonale kommensurabel wäre.

Mathematik bedeutete ursprünglich *Das, was man lernen muss* (μἄθεσις oder μἄθεμα); Wortstamm ist μανθάνειν (lernen). Platon verwendet den Begriff [Timaios 88c] teilweise noch in der ursprünglichen Bedeutung. Unter den Pythagoreern und später unter Aristoteles gewinnt das Wort *Mathematik* die speziellere Bedeutung von heute. Ein Zitat von *Anatolius* ist bei den Definitionen Herons[2] überliefert:

> Warum hat Mathematik diesen Namen? Die Peripatetiker [Schüler des Aristoteles] sagen, während man die Rhetorik, die Dichtung und die populäre Musik praktizieren könne, ohne sie studiert zu haben, so könne niemand das, was Mathematik genannt wird, verstehen, ohne es zuerst zu studieren. So erklären sie, warum die Theorie dieser Gegenstände Mathematik genannt wird.

Über die Entstehung der Mathematik berichtet Aristoteles [Metaph. 891B]

> Und werden dann mehrere Künste erfunden, die einen für die unumgänglichen Notwendigkeiten des Lebens, andere aber für eine gehobene Lebensführung, so halten wir die letzteren gerade deshalb, weil ihr Wissen nicht auf den Nutzen abzielt, für weiser als die ersteren. Erst als bereits alle derartigen Künste entwickelt waren, entdeckte man die Wissenschaften, die sich nicht allein auf die Lust und die Lebensnotwendigkeiten bezogen, und das erstmals in den Gebieten, wo man sich Muße leisten konnte. Daher entstanden auch die mathematischen Wissenschaften in Ägypten, denn dort gestattete man dem Priesterstand, Muße zu pflegen.

[2]Heroninis Alexandrini opera quae supersunt omnia, Buch IV, Teubner 1914.

Heron schlüsselt die mathematischen Wissenschaften auf:

> Mathematik ist eine Wissenschaft, die sowohl durch Denken wie auch durch die Sinne das Fassbare untersucht, um das in ihr Gebiet fallende festzulegen.[…] Der edleren und höchsten gibt es zwei Hauptteile, Arithmetik und Geometrie, der mit dem Sinnlichen sich beschäftigenden aber sechs: Rechenkunst, Feldmessung, Optik, Musiktheorie, (theoretische) Mechanik und Astronomie. Weder die sog. Taktik, noch die Baukunst, noch die populäre Musik oder das Kalenderwesen sind Teile der Mathematik, auch nicht die (praktische) Mechanik.

Die griechische Mathematik war vor allem Geometrie, systematisch angeordnet von Euklid und auf Kegelschnitte erweitert durch Apollonius. Das Rechnen mit Ganzzahlen diente vor allem den Pythagoreern als Schlüssel zur Erklärung der Welt. Eine Vorstufe des Gebiets, das später Algebra bzw. Zahlentheorie genannt wird, findet sich bei Diophantos. Arithmetik im Sinne der Pythagoreer wird von Nikomachos von Gerasa betrieben. Numerische Rechnungen im großen Umfang werden im babylonischen Hexagesimalsystem ausgeführt, bei der Wurzelrechnung des Heron von Alexandria und bei Berechnung der Sehnentafel von Klaudios Ptolemaios. Über die Geometrie berichtet Heron im Vorwort zu seiner Schrift *Geometrica:*

> Wo die Grundlagen der Geometrie herstammen, lässt sich mithilfe der Philosophie zeigen. Damit wir nicht gegen die Grundsätze verstoßen, ist es angebracht, die Definition der Geometrie zu erläutern. Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen und ihr Zweck ist, diese zu bewerkstelligen; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch: Sie beginnt mit dem Punkt, der ohne Ausdehnung ist, und geht über Linie und Fläche in den Raum.
>
> Die Geometrie erreicht ihre Darstellung durch Abstraktion; sie behandelt zunächst den physikalischen Körper und seinen stofflichen Inhalt; durch Entfernen der Stofflichkeit erhält sie den mathematischen Körper, der räumlich ist. Durch fortgesetzte Abstraktion erreicht sie wieder den Punkt.

Die Entwicklung der Geometrie schildert Heron im Vorwort seiner *Metrica*[3]:

> In ihren Anfängen beschäftigt sich die Geometrie, wie die Erzählung der Alten uns lehrt, mit den Landvermessungen und Landteilungen, wovon sie aus Geometrie genannt ward. Da dies Geschäft für die Menschen nützlich war, wurde sein Gattungsbegriff erweitert, sodass die Handhabung der Messungen und Teilungen auch zu den festen Körpern fortschritt und da die zuerst gefundenen Sätze nicht ausreichten, so bedurften jene Operationen noch weiterer Forschung, sodass sogar bis zum gegenwärtigen Moment manches davon noch ungelöst ist, obwohl Archimedes und Eudoxos den Gegenstand trefflich behandelt haben.

[3]Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, Band III, Teubner 1914.