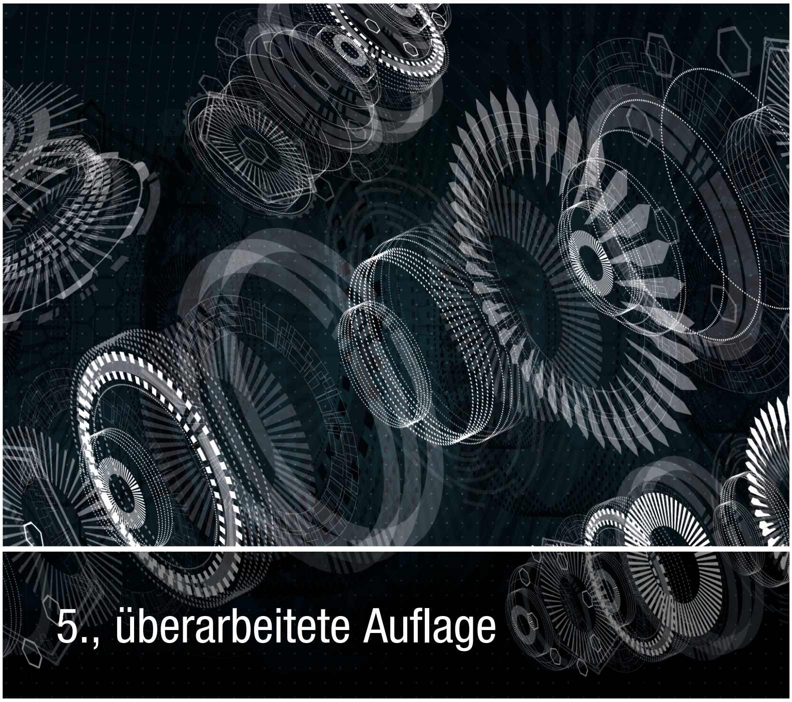
Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Für die BACHELOR-AUSBILDUNG geeignet

Technische Mechanik für Ingenieure



5., überarbeitete Auflage

HANSER

Müller / Ferber

Technische Mechanik für Ingenieure

Für R.H.

Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Technische Mechanik für Ingenieure

5., überarbeitete Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen sowie Aufgaben und Lösungen im Internet

HANSER

Die Autoren:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, Fachgebiet Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

PD Dr.-Ing. Ferdinand Ferber, Universität Paderborn, Fakultät für Maschinenbau, Lehrstuhl für Technische Mechanik

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg
Herstellung: Björn Gallinge
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelmotiv: © shutterstock.com/SergeyBitos
Coverrealisation: Max Kostopoulos
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46117-8
E-Book-ISBN: 978-3-446-46118-5

Vorwort zur 1. Auflage

Why, anybody can have a brain. That's a very mediocre commodity. Every pusillanimous creature that crawls on the Earth or slinks through slimy seas has a brain. Back where I come from, we have universities, seats of great learning, where men go to become great thinkers. And when they come out, they think deep thoughts and with no more brains than you have. But they have one thing you haven't got: a diploma.

Frank Morgan in 'The Wizard of Oz', 1939

Unser Buch zu den Grundlagen der Technischen Mechanik ist das Resultat von Vorlesungen über viele Jahre, die wir an der Universität Paderborn, der Heriot-Watt University in Edinburgh und seit neuestem auch an der Technischen Universität Berlin gehalten haben. Letztendlich jedoch geht der Text auf Ideen und Anregungen zurück, die aus den Notizen und Vorlesungen von Herrn Professor Helmut Wild / Paderborn stammen. Ihm sei an dieser Stelle besonders herzlich gedankt. Der hier präsentierte Stoff bietet Material für das Ingenieurgrundstudium an deutschsprachigen Universitäten und Technischen Hochschulen und deckt sich mit dem Inhalt der einsemestrigen Veranstaltungen Mechanik A (Statik) und Mechanik B (elementare Festigkeitslehre), wie sie an der Universität Paderborn Studenten des Maschinenbaus hören, sowie der einsemestrigen Vorlesungen Mechanik 1 (Einführung in die Statik und Festigkeitslehre), Mechanik 2 (Reibung, Stabilität, elementarer Energiesatz, Massenpunkt- und 2D-Starrkörperdynamik, Schwingungen) und schließlich Mechanik 3 (Kontinuumsmechanik, insbesondere Grundlagen der Elastizitätstheorie, Kontinuumsschwingungen und Hydromechanik sowie Energieprinzipe und höhere Dynamik), wie sie für Studenten des Maschinenbaus, des Verkehrswesens und der Physikalischen Ingenieurwissenschaft an der Technischen Universität in Berlin derzeit vorgeschrieben sind.

Viele waren an der Entstehung dieses Buches sowie der begleitenden Software aktiv beteiligt, Studenten, Assistenten, technisches und nicht-technisches Personal. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht vollendet worden. Ein besonderes Dankeschön gilt den Helfern aus jüngster Zeit, Karin Bethke, Dipl.-Ing. (FH) Guido Harneit, Berrit Krahl, cand. ing. Manuela Krüger sowie Ingenieur Hadi Sawan, cand. ing. Torsten Schneider und Ingenieur Firas Seifaldeen. Die Erstellung der CD erfolgte durch cand. Wirt.-Ing.'s Isabel Koke, Volker Huneke sowie Herrn Ludger Merkens. Aufgaben zum Dynamikteil sind auf der CD im Moment nur rudimentär vorhanden. Dass hierzu überhaupt Material existiert, ist Herrn Dipl.-Math. Stefan Neumann von der Universität Paderborn zu verdanken. Herrn Kollegen Prof. Dr.-Ing. Albert Duda ist für die kritische Durchsicht des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge zu danken.

Unter den angehenden Ingenieuren ist die Technische Mechanik ein notorisch unbeliebtes Studienfach. Nicht zuletzt aufgrund der ihr eigenen mathematisch-formalen Struktur gilt sie als „theoretisch“ und „unpraktisch“, ja, bei nicht wenigen ist sie sogar als „altmodischer“, den Erfordernissen modernen Ingenieurwesens nicht länger gerecht werdender Ballast verschrien. Dies ist jedoch ein Irrtum, denn die tägliche Ingenieurpraxis zeigt, dass neue Konstruktionen, im Mikro- wie im Makrobereich, zur Bestimmung ihrer Zuverlässigkeit die klassischen Konzepte der Mechanik benötigen und sich die Totgesagte somit bester Gesundheit erfreut und bei der Herstellung besserer technischer Produkte hilft. Die Konzepte der Technischen Mechanik zu kennen, zu beherrschen und anzuwenden ist leider nur durch Übung möglich. Dies erfordert Geduld und Ausdauer und zwar von beiden Seiten, den Lernenden *und* den Lehrenden. Zum

Trost sollten die Studenten bedenken, dass am Ende der geistigen Anabasis auch ihnen als Lohn ein Diplom winkt, dessen Bedeutung für unser Leben schon der Wizard of Oz richtig einzuschätzen wusste.

Überhaupt, dass der angehende Ingenieur es nicht immer leicht hat, wurde bereits von Thomas Mann in seinem Roman „Der Zauberberg" bemerkt. So erwähnt eine der Hauptfiguren des Romans, Hans Castorp, zu seinem behandelnden Arzt, Dr. Krokowski, beiläufig, dass er gerade sein Examen bestanden hätte: ***„Was für ein Examen haben Sie abgelegt, wenn die Frage erlaubt ist?" „Ich bin Ingenieur, Herr Doktor", antwortete Hans Castorp mit bescheidener Würde. „Ah, Ingenieur"! Und Dr. Krokowskis Lächeln zog sich gleichsam zurück, büßte an Kraft und Herzlichkeit für den Augenblick etwas ein. „Das ist wacker. Und Sie werden hier also keinerlei ärztliche Behandlung in Anspruch nehmen, weder in körperlicher noch in psychischer Hinsicht?" „Nein, ich danke tausendmal!" sagte Hans Castorp und wäre fast einen Schritt zurückgewichen.***

Eines darf abschließend ohne zu zaudern festgestellt werden: Das *rechtzeitige* Studium dieses Buches inklusive Bearbeitung der auf der CD angebotenen Übungen *vor* der Klausur, bewahrt vor dem Zauberberg und der Inanspruchnahme ärztlicher, insbesondere psychiatrischer Hilfe.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Sommer 2003

Vorwort zur 5. Auflage

Wenn dann die Schatten sich senken und all das Verfehlte und Ungeschehene und Ungetane mich ängstet ...

Thomas Mann, Rede an Katja Mann

Seit dem Erscheinen der vierten Auflage unseres Buches sind wieder viele tausend Studierende durch die Grundlagenveranstaltungen zur Technischen Mechanik gegangen. Dabei haben wir diverse Tippfehler entdeckt und nun eliminiert.

Außerdem, der mangelnden Unterrichtszeit und der Mode sei es geschuldet, wurde in der Neuauflage auf die Beschreibung diverser zeichnerischer Verfahren verzichtet und zwar insbesondere auf das Seileck und die MOHRsche Analogie bei der Bestimmung der Biegelinie. Interessierte sowie vehemente Verfechter dieser Methoden haben aber weiterhin die Möglichkeit, sich hierüber in den vorangegangenen Auflagen zu informieren.

Wie auch schon zuvor können mit grauer Berandung gekennzeichnete Seiten und Passagen beim ersten Lesen übergangen werden.

Abschließend gilt unser Dank noch allen unseren Assistenten Dr.-Ing. Emek Abali, Gregor Ganzosch, M.Sc., Sebastian Glane, M.Sc., Dr.-Ing Felix Reich, Wilhelm Rickert, M.Sc. und – seit Neuestem – Herrn Volker Herzberg vom Carl Hanser Verlag.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Statik

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Zum Kraftbegriff

Die Kraft ist eine sogenannte **primitive**, d. h. keiner weiteren Erklärung bedürfende Größe. Sie ist das Resultat geistiger Abstraktion, basierend auf unserer täglichen Erfahrung, wobei wir Kräfte nicht direkt beobachten können, sondern lediglich aus ihrer Wirkung auf ihre Existenz schließen. Man denke hierbei etwa an die Verformung einer Feder, an die Dehnung eines Stabes oder auch an die Muskelspannung, die wir fühlen, wenn wir Kräfte ausüben. Mit anderen Worten „Kraft“ ist der Name für die **Ursache** beobachteter **Wirkungen**.

> Eine Kraft ist durch **drei** Eigenschaften bestimmt, durch ihren **Betrag**, ihre **Richtung** und ihren **Angriffspunkt**.

Der **Betrag** ist ein Maß für die Größe der wirkenden Kraft. Ein qualitatives Gefühl hierfür vermittelt die unterschiedliche Muskelspannung, die wir empfinden, wenn wir zum Beispiel verschiedene Körper heben. Wir bezeichnen den Betrag der Kraft mit dem Symbol F (von englisch *force*). Gemessen werden kann der Betrag F einer Kraft, indem man ihn mit der Schwerkraft, etwa mit geeichten Gewichten, vergleicht. Als Maßeinheit für den Betrag der Kraft verwendet man das **Newton** mit dem Kurzzeichen N. In der Technik benutzt man gern auch Vielfache der Einheit, wie beispielsweise das Kilonewton kN, was 1000 N entspricht.

Dass eine Kraft eine **Richtung** hat, ist auch intuitiv klar. Schließlich wirkt z. B. das Gewicht eines Körpers immer lotrecht nach unten, und es macht sicher einen Unterschied, mit welchem Winkel man bei betragsmäßig gleich bleibender Kraft auf einen Körper **drückt** oder an ihm **zieht** (siehe Abbildung 1.1.1).

Außerdem ist der **Angriffspunkt** der Kraft von Bedeutung, wie exemplarisch in Abbildung 1.1.1 zu sehen ist: Abhängig davon, wo sich der Angriffspunkt A der Kraft an der Kiste befindet, wird, trotz betragsmäßig gleich bleibender Kraft, eine unterschiedliche Wirkung auf die Kiste erzeugt.

Wir fassen diese intuitiv klaren Aussagen in folgendem Satz zusammen:

> Die Kraft ist ein gebundener Vektor.

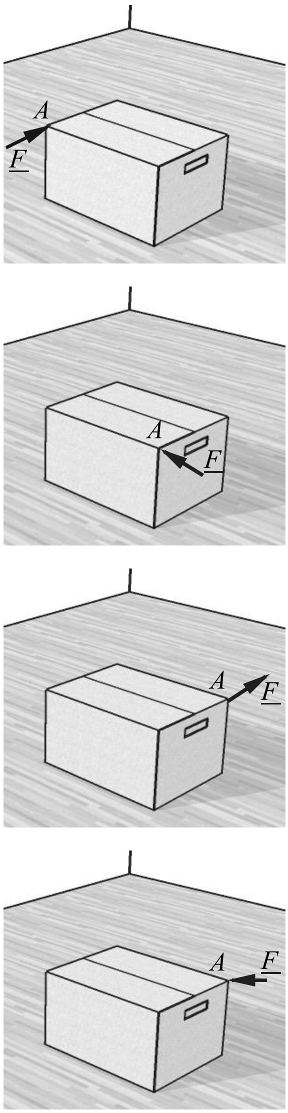
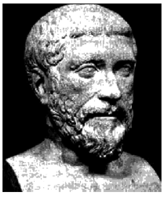


Abb. 1.1.1: Richtung und Angriffspunkt einer Kraft.

Statik



Pythagoras von Samos (580 – 500 v.u.Z.) war vornehmlich Philosoph und Mystiker mit einer starken Neigung zu Mathematik, Astronomie, Musik, Heilkunde, Ringkampf und der Politik. Durch Letzteres ereilt ihn im Jahre 532 vor Christus das Schicksal eines politischen Flüchtlings. Er verlässt Samos, um der dortigen Tyrannei zu entgehen, und zieht nach Süditalien. In Croton gründet er seine berühmte philosophische und religiöse Schule, und er schart Anhänger um sich, die sogenannten Pythagoreer. Der nach ihm benannte Satz war tausend Jahre zuvor bereits den Babyloniern bekannt gewesen und diente diesen praktischen Leuten zur Feldvermessung. Pythagoras jedoch war vielleicht einer der Ersten, die sich auch für einen Beweis „seines" Satzes interessierten. Über Details seiner eigenen wissenschaftlichen Arbeiten ist nicht allzu viel bekannt, denn die pythagoreische Schule gab sich erstens nach außen hin verschlossen und zweitens ist es bei Teams ja ohnehin nicht immer einfach, den konkreten Beitrag des Einzelnen auszumachen. Überhaupt glaubten die Pythagoreer zunächst einmal an die „Kraft der ganzen Zahl" und hofften, Naturvorgänge durch harmonische Zahlenverhältnisse darstellen zu

Das Adjektiv **gebunden** bedarf einer näheren Erklärung: Einen **freien** Vektor kann man im Raum zu sich selbst beliebig parallel verschieben. Dieses ist bei einem Kraftvektor nicht erlaubt. Die Kraft ist an ihre **Wirkungslinie** gebunden und besitzt darüber hinaus einen klar zu spezifizierenden **Angriffspunkt**.

Entsprechend der in der Vektorrechnung üblichen Symbolik wollen wir für den Kraftvektor das Symbol $\underline{F}$ verwenden. Der Betrag der Kraft ist durch das Symbol F (ohne Unterstrich) gekennzeichnet.

In Abbildung 1.1.2 ist ein Kraftvektor $\underline{F}$ zu sehen, der in einem Punkt A eines Körpers im Raum angreift. Außerdem ist ein **rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem** eingezeichnet, das durch Einheitsvektoren $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ und $\underline{e}_z$ aufgespannt wird. Die Indizes x, y und z kennzeichnen dabei die drei Raumrichtungen. Man sieht, dass der Kraftvektor gegen die drei Koordinatenachsen unter den Winkeln α, β und γ geneigt ist. Aus rechentechnischen Gründen ist es sehr oft günstig, den Kraftvektor hinsichtlich eines Koordinatensystems darzustellen, also aufzuspannen. Dazu projiziert man den Kraftvektor $\underline{F}$ auf die drei aufeinander senkrecht stehenden Achsenrichtungen und erhält so die drei Vektoren $\underline{F}_x$, $\underline{F}_y$ und $\underline{F}_z$. Hierfür kann man mit den zuvor erwähnten Einheitsvektoren $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ und $\underline{e}_z$ schreiben:

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = \left(F_x, F_y, F_z\right). \qquad (1.1.1)$$

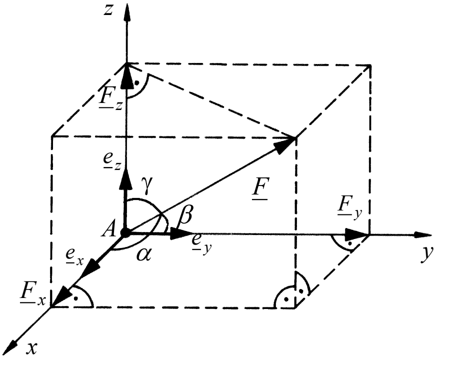


Abb. 1.1.2: Kraftvektor, im Raum aufgespannt im kartesischen Dreibein.

Dabei befolgen wir eine **Grundregel der Vektoraddition**, wonach gilt, dass Vektoren (hier $\underline{F}_x$, $\underline{F}_y$ und $\underline{F}_z$) dadurch addiert werden, dass man bei der Addition das Ende des Vektors an den Kopf desjenigen Vektors hängt, zu dem er addiert werden soll. Man nennt die Größen F_x, F_y und F_z auch die **kartesischen Komponenten** des Vektors $\underline{F}$. Es ist üblich, sie in einer Zeile (F_x, F_y, F_z) (manchmal auch als Spalte geschrieben) zusammenzufassen. Merke, dass es sich dabei lediglich um alternative Schreibweisen ein- und desselben Objekts $\underline{F}$ handelt. Man beachte, dass die Reihenfolge, in der das Aneinanderketten der Teilvektoren $\underline{F}_x$, $\underline{F}_y$ und $\underline{F}_z$ erfolgt, beliebig ist und immer zum gleichen Endresultat führt. Dies entspricht dem **Kommutativ**-(=Vertauschbarkeits-) **Gesetz** der Vektoraddition.

Nach dem **Satz des** PYTHAGORAS im Raum lässt sich der Betrag F des Vektors $\underline{F}$ wie folgt durch die kartesischen Komponenten ausdrücken:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ . \tag{1.1.2}$$

Schließlich kann man die Richtungswinkel α, β und γ mit den Komponenten und dem Betrag des Kraftvektors $\underline{F}$ in Verbindung bringen:

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F}\ ,\ \cos(\beta) = \frac{F_y}{F}\ ,\ \cos(\gamma) = \frac{F_z}{F}\ . \tag{1.1.3}$$

Beide Gleichungen lassen sich mithilfe der Abbildung 1.1.2 beweisen.

können, gleichgültig ob es sich dabei um astronomische oder musikalische Probleme handelte. Leider entdeckten sie bei ihren Forschungen, dass die Diagonale eines Quadrates nicht als rationales Vielfaches darstellbar ist, d. h., sie wurden plötzlich mit dem Phänomen der irrationalen Zahl konfrontiert. Dies gab bei ihnen und anderen griechischen Mathematikern zu größerer Unruhe Anlass, wie es bei Menschen, die mit Neuem konfrontiert werden, auch heute noch durchaus geschieht. Bemerkenswert scheint, dass die Ideen oder besser gesagt die Wunschvorstellungen der Pythagoreer bis zum Beginn der modernen Naturwissenschaften ihre Kraft behielten. So versuchte noch KEPLER in seinem Werk „Harmonices Mundi“ der Natur zunächst menschliche Harmonievorstellungen zu oktroyieren, verschrieb sich aber schließlich dann doch einer mehr rational geprägten Weltsicht, wie seine Auswertung experimenteller Daten Tycho DE BRAHES bezeugt, was ihn schließlich auf die Bewegungsgesetze der Planeten brachte.

1.1.2 Einteilung der Kräfte, das Schnitt- und das Wechselwirkungsprinzip

In der Mechanik ist es üblich, Kräfte nach verschiedenen Gesichtspunkten einzuteilen. Entsprechend haben sich diverse Begriffe eingebürgert, die man kennen sollte, um die einschlägige Literatur zu verstehen, und die im Folgenden erläutert werden (vgl. auch Abbildung 1.1.3).

Die **Einzellast**: Hierunter versteht man das idealisierte Konzept einer punktförmig angreifenden Kraft. Man könnte sie dadurch näherungsweise erzeugen, dass man den Körper mit einer Nadelspitze oder über einen dünnen Draht belastet.

Die **Linienkraft** oder **Streckenlast**: Hierbei handelt es sich um Kräfte, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sind. Näherungsweise erzeugen lassen sie sich dadurch, dass man etwa mit

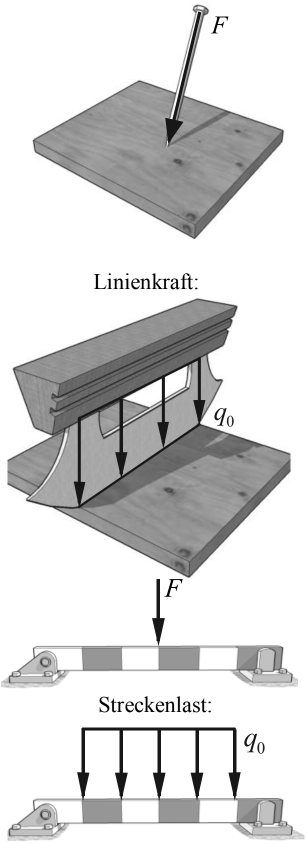


Abb. 1.1.3: Zum Begriff der Einzellast oder Linienkraft.

einer dünnen Schneide oder einem Draht gegen einen Körper drückt.

Die **Volumenkraft**: Hierunter versteht man Kräfte, die über das Volumen eines Körpers angreifen, wie zum Beispiel das Gewicht oder elektromagnetische Kräfte.

Die **Oberflächenkraft**: Diese tritt in der Berührungsfläche zweier Körper auf. Beispiele sind der Wasserdruck auf eine Staumauer oder der Druck einer Panzerkette auf den Boden.

Eingeprägte Kräfte: Diese greifen in **vorgegebener** Weise an einem physikalischen System an, wie etwa das Gewicht oder der Druck einer Nadel auf die Oberfläche eines Körpers bzw. eine Schneelast auf einem Dach usw.

Reaktions- oder **Zwangskräfte**: Diese entstehen, wenn man einem durch eingeprägte Kräfte beeinflussten System seine Bewegungsfreiheit nimmt. Man denke an einen fallenden Stein, auf den nur sein eigenes Gewicht wirkt. Hält man den Stein in der Hand, so ist seine Bewegungsfreiheit eingeschränkt, indem man durch die Hand eine dem Gewicht entgegengesetzte Reaktions- bzw. Zwangskraft ausübt.

Reaktionskräfte lassen sich dadurch sichtbar machen, dass man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst, ihn sozusagen **freimacht** bzw. **freischneidet**. Diese in der Mechanik überaus wichtige Technik des Freischnitts soll im Folgenden an einem Beispiel erläutert werden.

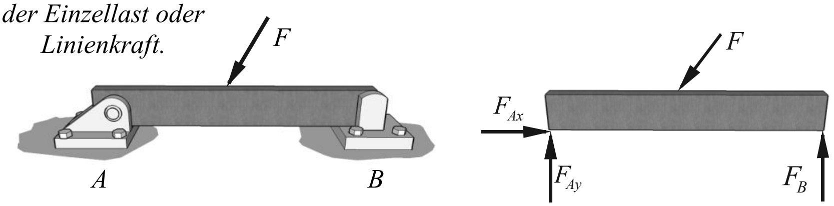


Abb. 1.1.4: Zum Begriff des Freischnitts.

Betrachte den in Abbildung 1.1.4 dargestellten Balken, der durch eine eingeprägte Kraft F belastet ist und auf zwei Stützen, den sogenannten Auflagern, ruht. Diese sind offensichtlich Bindungen, die den Balken an der Bewegung hindern, und wir befreien uns von ihnen, indem wir an ihrer Stelle zwei Reaktions- bzw. **Freischnittskräfte**, genannt $\underline{F}_A = (F_{Ax}, F_{Ay})$ und $\underline{F}_B = (0, F_B)$, anbringen. Dieses führt auf das **Freikörperbild** oder auch kurz den **Freischnitt**, der rechts in Abbildung 1.1.4 zu sehen ist.

Äußere und **innere** Kräfte: Wie der Name sagt, wirkt eine äußere Kraft von außen auf ein mechanisches System. Sowohl ein-

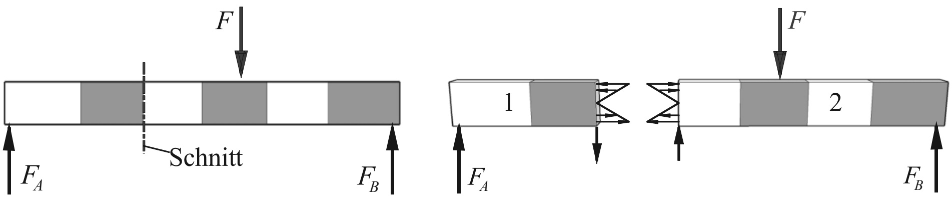


Abb. 1.1.5: Zum Begriff der inneren Kraft und des Schnittprinzips.

geprägte als auch Reaktionskräfte sind Beispiele äußerer Kräfte. Innere Kräfte erhält man durch gedankliches Zerteilen bzw. Schneiden des Körpers. Dieses ist in Abbildung 1.1.5 erläutert: Führt man durch den belasteten Körper einen Schnitt, so ist es, um das Gleichgewicht zu wahren, nötig, an Stelle der inneren Bindung durch das Material geeignete, flächenförmig verteilte, eben innere Schnittkräfte aufzuprägen.

Man beachte, dass die Einteilung in innere und äußere Kräfte davon abhängt, welches System untersucht wird. Fassen wir etwa den Gesamtkörper in Abbildung 1.1.5 als ein System auf, so sind die durch den Schnitt freigelegten Kräfte innere Kräfte. Betrachten wir dagegen die gezeichneten Teilkörper 1 oder 2 jeweils als ein System, so sind alle dargestellten Kräfte äußere Kräfte.

Abb. 1.1.6: Zum Wechselwirkungsgesetz, actio = reactio-Prinzip.

Im Zusammenhang mit dem Freischnitt von Kräften bzw. mit dem Schnittprinzip ist das sogenannte **Wechselwirkungsgesetz**, auch **actio** = **reactio-Prinzip**, von entscheidender Bedeutung. Es besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große, aber entgegengesetzte **Gegen-** bzw. **Reaktionskraft** gehört. Dieses aus der Erfahrung begründete Prinzip ist in Abbildung 1.1.6 illustriert: Der gezeigte Drucklufthammer übt auf eine Wand eine Kraft F aus. Eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft wird aber auch von der Wand auf den Hammer ausgeübt. Beide Kräfte kann man dadurch sichtbar machen, dass man, wie gezeigt, an der Kontaktstelle freischneidet. Ein anderes Beispiel für das actio = reactio-Prinzip ist in Abbildung 1.1.7 gezeigt: Aufgrund der Gravitation hat ein Körper auf der Erde ein Gewicht G. Dieses ist die Anziehungskraft, welche die Erde auf ihn ausübt. Umgekehrt wirkt auch der Körper mit einer gleich großen, aber entgegengerichteten Kraft auf die Erde, beide Körper ziehen einander an.

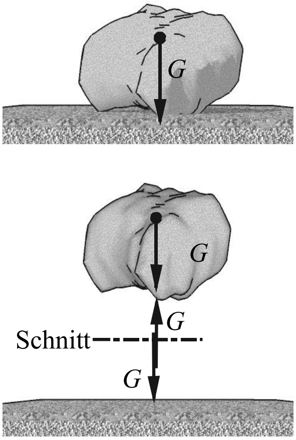


Abb. 1.1.7: Zum Wechselwirkungsgesetz, actio = reactio-Prinzip.

> actio = reactio: Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.

Wir fassen zusammen: Im Folgenden stellen wir uns die Aufgabe, Reaktions- und Schnittkräfte für mechanische Systeme zu berechnen, um danach die ihnen unterworfenen Körper entsprechend ihrer Materialfestigkeit korrekt dimensionieren zu können.

1.2 Kräfte in einem Angriffspunkt

1.2.1 Zusammensetzen von Kräften

Betrachte Abbildung 1.2.1. Zwei Kraftvektoren, genannt $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$, greifen in einem Punkt A eines Körpers an. Die Erfahrung zeigt, dass diese Kräfte durch einen einzigen Kraftvektor $\underline{R}$, die sogenannte **Resultierende**, ersetzt werden können. Dieselbe ermittelt man dadurch, dass man, wie in Abbildung 1.2.1 zu sehen, die Kräfte zu einem Parallelogramm ergänzt. Die Diagonale des Parallelogramms ist dann die erwähnte Ersatzkraft $\underline{R}$. Alternativ zur **Parallelogrammkonstruktion** ist die Vektoraddition der Kräfte $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ zu sehen. Diese ist rechts in Abbildung 1.2.1 dargestellt. Wie zuvor erwähnt, gilt die Grundregel, Vektoren bei der Addition aneinanderzuketten, indem man den Fuß des einen Vektors an den Kopf des anderen hängt. Dabei ist es gleichgültig, welche Reihenfolge man wählt. Auch das ist aus Abbildung 1.2.1 ersichtlich.

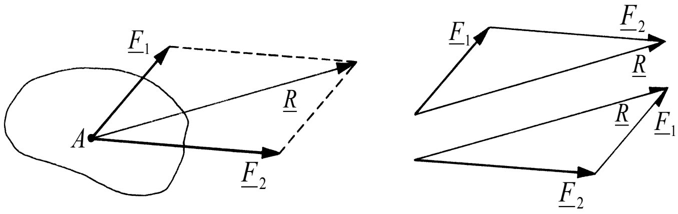


Abb. 1.2.1: Zum Begriff der resultierenden Kraft.

Wir verallgemeinern unser Ergebnis auf die Vektorsumme von n Stück Kraftvektoren, die alle in einem gemeinsamen Punkt angreifen: Abbildung 1.2.2. Ihre Resultierende erhält man durch Vektoraddition gemäß der Gleichung:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \ldots + \underline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \ . \qquad (1.2.1)$$

Wieder gilt die Grundregel, dass die Addition dadurch vorzunehmen ist, dass man die Vektoren $\underline{F}_i$ in beliebiger Reihenfolge, Pfeilende auf Pfeilspitze folgend, aneinanderkettet.

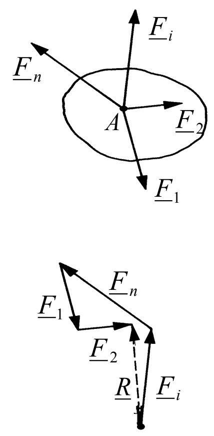


Abb. 1.2.2: Zur Kräftesumme.

Nun langt es im Allgemeinen nicht, diese Regel zu kennen, ohne sie zahlenmäßig auszuwerten. Man will eben exakt wissen, wie lang die Resultierende ist und in welchem Winkel sie am Punkt A angreift. Um dieses herauszubekommen, können verschiedene Verfahren angewendet werden, die **rechnerischer** oder **zeichnerischer** Natur sind.

a) Zeichnerische Lösung

Wir wollen diese Verfahren anhand von zwei Beispielen näher kennenlernen. Betrachte dazu zunächst Abbildung 1.2.3:

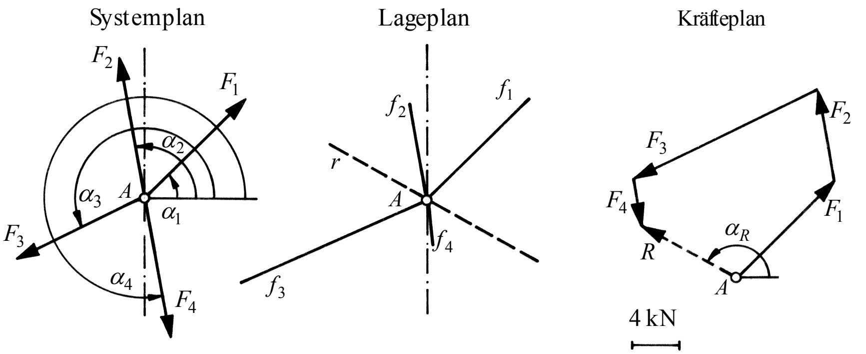


Abb. 1.2.3: Zum Begriff des Kräfte- und Lageplans.

An einem Punkt A eines Körpers (etwa der Spitze einer Fahnenstange) wirken vier Kräfte $F_1 = 12\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 8\,\mathrm{kN}$, Statik

Isaac NEWTON (1642 – 1727) war unzweifelhaft eines der größten naturwissenschaftlichen Genies. Um seine Entdeckungen zu würdigen, ist kein Superlativ zu gewagt, und sein soeben zitiertes Prinzip actio = reactio ist in der Tat nur *ein* Stein in dem unendlich großen Ozean der Wahrheit, der vor ihm lag und den er entdeckte, um seine eigenen Worte zu paraphrasieren. Auch seine menschlichen Qualitäten genügen Superlativen, allerdings wohl eher im negativen Sinne. Dem Internet entnehmen wir: „NEWTON was rigorously puritanical: When one of his few friends told him "a loose story about a nun," he ended their friendship. He is not known to have ever had a romantic relationship of any kind, and is believed to have died a virgin. Furthermore, he had no interest in literature or the arts, dismissing a famous collection of sculpture as "stone dolls." In short, NEWTON was a mathematical mystic, convinced that he shared a privileged relationship with God, and obsessively devoted to finding how He had constructed the universe. He thought of himself as the sole inventor of the calculus, and hence the

$F_3 = 18\,\text{kN}$ und $F_4 = 4\,\text{kN}$ unter vorgegebenen Richtungen zur Horizontalen, gekennzeichnet durch die vier Winkel $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 100°$, $\alpha_3 = 205°$ und $\alpha_4 = 280°$. Wir wollen die Größe und die Richtung der Resultierenden zeichnerisch bestimmen. Dazu zeichnen wir uns zunächst, wie in der Abbildung dargestellt, den sogenannten **Lageplan**, in dem die Wirkungslinien $f_i,\ i = 1, \cdots, 4$ der vier Kräfte eingetragen werden. Diese sind für die Auswertung im sogenannten **Kräfteplan** wichtig (siehe unten in Abbildung 1.2.3). Für den Kräfteplan wählen wir zunächst einen Maßstab und fügen dann alle Kräfte unter Berücksichtigung der Additionsregel maßstäblich aneinander. Dabei übertragen wir mit dem Geodreieck die jeweiligen Kraftrichtungen durch Parallelverschiebung aus dem Lageplan. Wir lesen dann im Rahmen der Zeichengenauigkeit als Ergebnis für den Betrag und die Richtung der Resultierenden ab:

$$R = 10{,}0\,\text{kN}, \quad \alpha_R = 147°. \tag{1.2.2}$$

b) Rechnerische Lösung mit Winkelfunktionen

Betrachte nun die Situation in Abbildung 1.2.4.

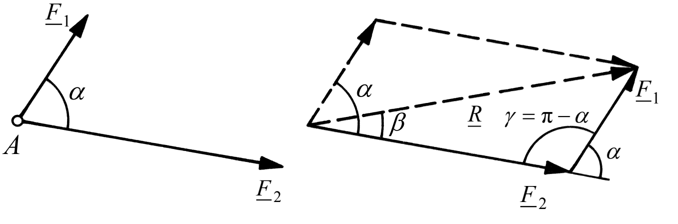


Abb. 1.2.4: Resultierende zweier Kräfte.

An einem Körper greifen in einem Punkt A zwei Kräfte $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ an. Der Winkel zwischen ihren Wirkungslinien sei α. Wir addieren beide Kräfte gemäß der Grundregel der Vektoraddition, konstruieren also eine Hälfte des Kräfteparallelogramms, so wie in der Abbildung rechts gezeigt. Bekannt sind die Seitenlängen F_1 und F_2 sowie der Winkel α. Damit können wir den **Kosinussatz** verwenden, um die Länge der Resultierenden $\underline{R}$ zu berechnen:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)}\,. \tag{1.2.3}$$

Um den Winkel β zu bestimmen, der die Richtung der Wirkungslinie von $\underline{R}$ bestimmt, verwenden wir vorzugsweise den **Sinussatz**:

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{F_1}{R}. \tag{1.2.4}$$

Indem wir hierin die Gleichung (1.2.3) für R einsetzen und außerdem beachten, dass gilt:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha), \tag{1.2.5}$$

folgt für den Winkel β:

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{F_1 \sin(\alpha)}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)}}\right). \tag{1.2.6}$$

1.2.2 Zerlegen von Kräften in der Ebene: Komponentendarstellung

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, wie man mithilfe des Sinus- bzw. des Kosinussatzes die Richtung und den Betrag der Resultierenden zweier Kräfte bzw. durch konsequente Fortsetzung auch mehrerer Kräfte berechnen kann. Eine äußerst wirksame Alternative zu diesem Berechnungsschema ist die Berechnung mithilfe von **Kraftkomponenten in rechtwinklig-kartesischen Koordinaten**. Wir wollen diese Alternative zunächst für den Fall von Kraftsystemen kennenlernen, die in der Ebene angreifen, und werden die resultierenden Gleichungen danach auf den Fall dreier Dimensionen verallgemeinern.

Betrachte den in Abbildung 1.2.5 gezeigten Kraftvektor $\underline{F}$ und seine Zerlegung in Komponenten F_x und F_y durch Projektion auf die x- bzw. y-Achse eines rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystems. Analog zum Abschnitt 1.1 lässt sich schreiben:

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y. \tag{1.2.7}$$

Die nachstehenden Gleichungen folgen aus einfachen trigonometrischen Überlegungen:

$$F_x = F\cos(\alpha),\ F_y = F\sin(\alpha),\ F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$
$$\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x}. \tag{1.2.8}$$

greatest mathematician since the ancients, and left behind a huge corpus of unpublished work, mostly alchemy and biblical exegesis, that he believed future generations would appreciate more than his own.“ Besonders berüchtigt ist sein Prioritätsstreit mit LEIBNIZ, die Entdeckung der Differenzial- und Integralrechnung betreffend, worauf auch das Zitat anspielt. So wurde LEIBNIZ von der Royal Society aufgefordert, seine Ansprüche vorzutragen und zu begründen, aber NEWTON (als wichtigstes Mitglied und Präsident) sorgte dafür, dass die Karten „richtig“ gemischt wurden, indem er das Untersuchungskomitee mit seinen Anhängern besetzte und zur Sicherheit den Endbericht selber schrieb. Angeblich sei es sein schönster Tag gewesen zu sehen, wie LEIBNIZ seelisch zerbrach, was zeigt, dass man auch ohne „romantic relationships“ seinen Spaß haben kann. In diesem Sinne stand er auch dem Geld nicht feindlich gegenüber, denn er wurde in seinen späteren Jahren Warden and Master of the Mint, eine recht lukrative Stellung neben seiner Position als Cambridge Professor. Von jeder geprägten Münze erhielt er nämlich seinen Anteil, was sich in einem Jahr zu 1000 Pfund akkumulierte. NEWTON starb als reicher, allerdings dem Bericht nach geiziger Mann. Abschließend sei bemerkt, dass NEWTONS Charakter auch für den Psychoanalytiker von Interesse sein könnte, denn wir