

Marianne Nolte (Hrsg.)

**WAS MACHT MATHEMATIK AUS?
NACHHALTIGE PARADIGMATISCHE ANSÄTZE
FÜR DIE FÖRDERUNG
MATHEMATISCH BESONDERS BEGABTER
SCHÜLER**

Festschrift aus Anlass des 80. Geburtstags
von
Prof. Dr. Karl Kießwetter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

**SCHRIFTEN ZUR
MATHEMATISCHEN BEGABUNGSFORSCHUNG
1**

Marianne Nolte (Hrsg.)

**WAS MACHT MATHEMATIK AUS?¹
NACHHALTIGE PARADIGMATISCHE ANSÄTZE
FÜR DIE FÖRDERUNG
MATHEMATISCH BESONDERS BEGABTER
SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER**

Festschrift aus Anlass des 80. Geburtstages
von
Prof. Dr. Karl Kießwetter

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

¹ (Kießwetter in 2006)

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliogra-
fie; detaillierte Informationen sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes
darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet,
vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Münster 2015
ISBN 978-3-942197-65-6

Vorwort

Dieses Buch ist Herrn Prof. Dr. Karl Kießwetter zu seinem 80. Geburtstag gewidmet, dessen besonderer Schwerpunkt in seinem Lebenswerk die Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler ist.

Bereits als Lehrer (von 1954 bis 1965 in NRW) war ihm die Anleitung der Schüler zu produktivem mathematischen Arbeiten wichtig. Nicht allein die Beschäftigung mit mathematischen Ideen, für die der Artikel von Jörn Bruhn ein Beispiel gibt (Kießwetter-Funktion und Kießwetter-Fraktal)², faszinierte ihn, sondern die Menschen und ihre Weise mathematisch tätig zu werden. Dabei beobachtete er kognitive Komponenten, aus denen er günstige Handlungsmuster für Problemlöseprozesse zusammen stellte (siehe z. B. Kießwetter 1985). Diese bilden eine entscheidende Grundlage für die Entwicklung von Fördermaterialien und Testaufgaben. Neben den kognitiven Anforderungen an Problemlösesituationen sind ihm auch die dabei ablaufenden emotionalen Prozesse wichtig. Ausdauer und Durchhaltevermögen, das Umgehen mit Misserfolgen, allgemein die Begrenzungen, die wir als Menschen erfahren, wirken auf allen Ebenen auch in mathematische Tätigkeiten ein. Wie unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Gegenstand und Mensch Arbeitsumgebungen gestaltet werden können, die zu produktivem mathematischem Tätigsein herausfordern, wie Aufgaben gestaltet werden müssen, die Schülerinnen und Schüler anregen, welche Besonderheiten dabei auf den verschiedenen Entwicklungsstufen der Kinder und Jugendlichen zu beachten sind, ist seit vielen Jahren Schwerpunkt seiner Forschungen.

Diese Arbeit bestimmte seine Tätigkeit, der er sich im Rahmen der Lehrerbildung (ab 1965 in Münster, ab 1970 in Bielefeld, ab 1978 in Hamburg) und seit Beginn der 80er Jahre auch in der Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler widmete. Er gründete das „Hamburger Modell“, das im Rahmen der William-Stern-Gesellschaft (WSG), deren langjähriger Vorsitzender er ist, mathematisch besonders begabte Schülerinnen und Schüler der Mittel- und Oberstufe fördert (Kießwetter 1988). Auch nach seiner Pensionierung widmet er sich dieser Tätigkeit und bietet alle zwei Wochen samstags Fördergruppen an. Immer wieder werden seine Teilnehmer von der Arbeit so fasziniert, dass sie sich selbst in der Förderung engagieren. Inzwischen ist auf seine Anregung hin die Förderung auch auf den Grundschulbereich ausgeweitet worden. Wichtige Grundlage der Arbeit ist die Entwicklung geeigneter Materialien.

² Die Beiträge in diesem Buch sind in alphabetischer Reihenfolge der Autorinnen und Autoren aufgelistet.

Es gibt sehr viele elementarmathematische Inhalte, aus denen sich ein komplexes Problemfeld entwickeln lässt, in dem Kinder und Jugendliche mathematisch tätig sein können. Karl Kießwetter hat aus solchen Inhalten mit beeindruckender Kreativität Arbeitsmaterial für verschiedene Altersgruppen kreiert. Reiner Lauterbach und Jan Henrik Sylvester geben mit ihrem Artikel „Selbstbezügliche Sätze – Diskrete Dynamik nicht nur für Schüler“ ein Beispiel für ein Arbeitsmaterial, das in der Sekundarstufe I erprobt wurde. In der gleichen Altersgruppe setzte Philipp Sprüssel Fragen zur Graphentheorie „Die Welt in Farben – Graphentheorie für Schüler“ ein.

Aus der langjährigen Beobachtung von Schülerinnen und Schülern beim Problemlösen erwachsen Ansätze, Materialien so aufzubereiten, dass sie sich in verschiedenen Alterstufen einsetzen lassen. Im Grundschulalter werden dabei Grundlagen gelegt, die in der Mittel- und Oberstufe zu ersten Theoriebildungsprozessen führen können. Marianne Nolte und Kirsten Pamperien gehen in ihrem Artikel auf Fragen zur Konzeption der Förderung im Grundschulalter ein. Siegbert Schmidt zeigt an einem Beispiel die Heranführung von Grundschulkindern an Theoriebildungsprozesse auf. Hartmut Rehlich regt mit seinem Beitrag dazu an, sich auf die Entwicklung einer „Mini-Theorie“ einzulassen. Wie Freude am mathematischen Denken, am Problemlösen anhand eines Schulbuchs geweckt werden kann, greift Bernd Zimmermann auf. Er geht gleichzeitig darauf ein, wie die geschichtliche Entwicklung mathematischer Begriffe einen Zugang zu mathematischen Denkprozessen gewähren kann.

Auch nach vielen Jahren der Erprobung der Materialien entwickeln Kinder und Jugendliche Gedanken, die unerwartet sind. Offen sein für die darin liegende Kreativität, sich darum bemühen, diese Gedanken zu verstehen, ist ein Anliegen von Karl Kießwetter. Diesen Ansatz hat er auch in die Ausbildung der Studierenden sowie Lehrerinnen und Lehrer einfließen lassen. Dass auch etwas „Verbotenes“ mit Schülerinnen und Schülern zu untersuchen, wie die Addition von Bruchzahlen nach der Regel „Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner“, nicht zwingend falsch sein muss, greift Jochen Engel in seinem Artikel auf.

Im Leben von Karl Kießwetter steht immer die Sache im Mittelpunkt. Er forderte von sich einen großen Einsatz für Kinder und Jugendliche und arbeitet immer noch, 15 Jahre nach seiner Pensionierung, ehrenamtlich als Leiter des Hamburger Modells an der Förderung von mathematisch besonders begabten Schülerinnen und Schülern mit.

Sein Engagement für Mathematik und mathematisches Lernen zeigt sich auch in seinen regelmäßigen Vorträgen für Eltern, Lehrkräfte und mathematisch Interessierte, die er gemeinsam mit der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, deren Ehrenmitglied er ist, anbietet.

Karl Kießweters Arbeit hat die Förderung mathematisch besonders begabter Kinder und Jugendlicher weit über die Grenzen Hamburgs hinaus entscheidend geprägt.

Er betont immer wieder, wie wichtig jede einzelne Person für das Gelingen der gemeinsamen Arbeit ist. Motiviert durch sein Vorbild wurden viele Menschen dazu angeregt, selbst mathematisch tätig zu werden und die Freude an diesen Prozessen Schülerinnen und Schülern zu vermitteln. Viele seiner heutigen Tutorinnen und Tutoren wurden selbst von ihm gefördert.

Wir danken Herrn Kießwetter für seinen unermüdlichen Einsatz. Insbesondere danken wir ihm für das große Vertrauen, das er durch das Gewähren von Freiräumen gibt. Sein Ansatz der Selbstorganisation sozialer Prozesse bei gleichermaßen kritischer und unterstützender Haltung vermittelt seinen teilweise schon langjährigen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern Sicherheit und Anerkennung.

Marianne Nolte und Kirsten Pamperien

Wir danken auch allen beteiligten Autoren für ihre Beiträge und stellvertretend für unsere Mitarbeiter Pakize Camkiran für ihre Unterstützung bei der Erstellung dieses Buches.

Literatur

Kießwetter, K. (1985). "Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem." Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht **38. Jg., Heft 5**: 300-306.

Kießwetter, K. (1988). "Das Hamburger Modell. Zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern." Berichte aus der Forschung . Universität Hamburg, Fachbereich Erziehungswissenschaften **Heft 2**.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren - und was kann man von mathematisch besonders begabten Grundschulern erwarten, und was noch nicht? Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? - Ein Buch aus der Praxis für die Praxis - H. Bauersfeld und K. Kießwetter. Offenburg, Mildenerger Verlag: 128-153.

Inhalt	Seite
Kießwetter-Funktion und Kießwetter-Fraktal	
Jörn Bruhn	6-21
Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner	
Hans-Joachim Engel	22-26
Gedankensplitter zum „Umkehren mentaler Prozesse“ – gedacht zur Anregung weiterer Diskussionen	
Torsten Fritzlär	27-39
Was der indische Mathematiker Ramanujan und mathematisch begabte Kinder gemeinsam haben	
Friedhelm Käpnick	40-53
Selbstbezügliche Sätze: Diskrete Dynamik nicht nur für Schüler	
Reiner Lauterbach & Jan Henrik Sylvester	54-66
Bausteine zur Konzeption eines Förderkonzepts – Aufgabengestaltung und Anregungen zum propädeutischen forschenden Lernen	
Marianne Nolte & Kirsten Pamperien	67-78

Spiegelzahlteiler - eine Einladung zur Entwicklung einer Mini-Theorie zu speziellen arithmetischen Symmetrien in verschiedenen Stellenwertsystemen	
Hartmut Rehlich	79-92
Rechendreiecke und Rechenvierecke	
Siegbert Schmidt	93-107
Die Welt in Farben – Graphentheorie für Schüler	
Philipp Sprüssel	108-113
Verstehen und Förderung mathematischer Denkprozesse – Anregungen aus dem Hamburger Modell zur mathematischen Begabtenförderung für Untersuchungen, die sich auf die Geschichte der Mathematik beziehen sowie für die Entwicklung eines Schulbuches	
Bernd Zimmermann	114-135
Autorenverzeichnis	136

Jörn Bruhn

Kießwetter-Funktion und Kießwetter-Fraktal

Die Kießwetter-Funktion

1966 gab KARL KIEßWETTER „ein einfaches Beispiel für eine Funktion, welche überall stetig und nicht differenzierbar ist“.

Er betrachtet zuerst nur x -Werte zwischen 0 und 1: $x \in [0, 1)$ und wählt für x eine Darstellung im Vierersystem:

$$x = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x_v}{4^v} \quad \text{mit } x_v = \{0, 1, 2, 3\}$$

Die zugeordneten Funktionswerte sind

$$k(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N_v} \cdot U(x_v)}{2^v}$$

mit $U(x_v) = x_v - 2$ für $x_v > 0$ und $U(x_v) = 0$ für $x_v = 0$ sowie $N_v = \text{Anzahl der } x_k \text{ mit } x_k = 0 \text{ und } k < v$.

Erweitert wird dann der Definitionsbereich der Funktion auf alle reellen Zahlen, indem das ausgewählte Intervall immer wieder stetig rechts und links ergänzt wird:

$$K(x) = [x] + k(x - [x]).$$

Die Kießwetter-Funktion steht einerseits in der mathematischen Tradition der Klärung der Beziehungen zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit [1] und andererseits zu dem späteren Hauptwerk von Karl Kießwetter, dem Lernen von Mathematik eine wissenschaftliche Grundlage zu geben [2].

Einige Bemerkungen zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Der Begriff der Stetigkeit durchzieht die Geschichte der Mathematik. Während in der Scholastik Stetigkeit als „Nichtunterscheidbarkeit von Grenzstellen verbunden mit der Möglichkeit abzugrenzen“ (zitiert nach Cantor, M. (1892). Geschichte der Mathematik, B d. II. S. 67. Leipzig: Teubner) angesehen wurde, erkannte ROGER BACON (1214 – 1294), dass stetige Größen nicht aus diskreten Punkten hergestellt werden könnten. NICOLAUS CUSANUS (1401 – 1464) sieht Linien, Oberflächen und Körper als „Arten des Seins für das Stetige“, d.h. Stetigkeit und



Abb. 1: Karl Kießwetter
(*1930)

Geometrie gehören also für ihn eng zusammen. Bei CHRISTOPH CLAVIUS (1537 – 1612) findet man erste Ansätze zu einer Grenzwertbetrachtung im Zusammenhang mit der Stetigkeit. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY und BERNARD BOLZANO gaben dann Anfang des 19. Jahrhunderts unabhängig voneinander der Stetigkeit von Funktionen eine exakte Definition: Eine Funktion ist stetig an einer Stelle x , wenn hinreichend kleine Änderungen des Arguments x nur beliebig kleine Änderungen des Funktionswerts nach sich ziehen. Das zugehörige heute allgemein benutzte ε - δ -Kriterium wurde dann von KARL WEIERSTRAB am Ende des 19. Jahrhunderts formuliert.

Die Aufgabenstellung der Differentialrechnung war als *Tangentenproblem* seit der Antike bekannt. Ein Lösungsansatz war die Approximation der Tangente als Sekante über einem endlichen, aber beliebig kleinen Intervall. Die mathematische Schwierigkeit bestand darin, mit derartigen *infinitesimal* kleinen Intervallen zu rechnen. Ende des 17. Jahrhunderts gelang es ISAAC NEWTON UND GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ unabhängig voneinander, widerspruchsfrei funktionierende Kalküle zu entwickeln. Während NEWTON das Problem physikalisch über die Momentangeschwindigkeit eines Körpers löste, benutzte LEIBNIZ den geometrischen Ansatz über das Tangentenproblem. Anfang des 19. Jahrhunderts gab Augustin Louis Cauchy der Differentialrechnung die heute übliche Grundlage, indem er die Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen definierte. Die heute allgemein benutzte Formulierung wurde ebenso wie bei der Stetigkeit von KARL WEIERSTRAB am Ende des 19. Jahrhunderts eingeführt.

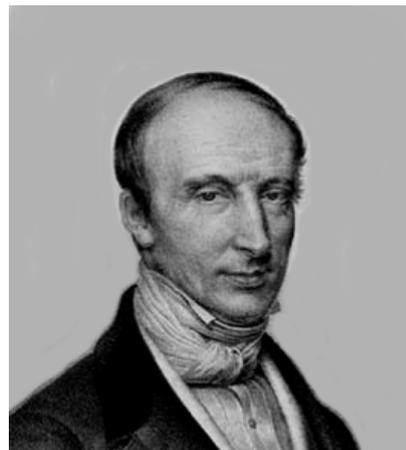


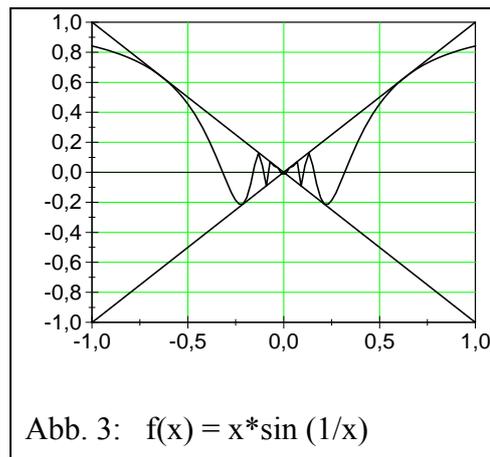
Abb. 2: Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Stetig aber nicht differenzierbar. Intuitiv wurde lange Zeit angenommen, dass eine stetige Funktion eine Ableitung haben muss oder dass zumindest die Menge der Punkte, in denen sie nicht differenzierbar ist, endlich ist. Bei all den Kurven, mit denen man sich seit altersher beschäftigte, wie Kreisen, Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, Zykloiden usw., ist es tatsächlich so. Aber es ist nicht bei jeder Kurve der Fall.

Die Funktion

$y = x \sin(1/x)$ mit $f(0) = 0$.

ist stetig an der Stelle $x = 0$. Aber dieses Beispiel zeigt, „dass der bloße Begriff der Stetigkeit noch allerlei merkwürdige und der naiven Anschauung fremdartige Möglichkeiten offen lässt“ (zitiert nach: Courant, R. (1930). Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I, S. 41, Berlin: Springer).



Um die Steigung dieser Kurve im Punkte $P = (0;0)$ zu ermitteln, lassen wir einen zweiten Punkt P' auf der Kurve gegen den Punkt P heranrücken. Dabei schwankt die mittlere Steigung unablässig zwischen 1 und -1 hin und her; sie nähert sich also nicht unbeschränkt einem bestimmten Grenzwert; es kann daher nicht von einer bestimmten Steigung der Kurve im Punkte P die Rede sein.

Es war ein spannender Augenblick in der Geschichte der Mathematik, als entdeckt wurde, dass es, in offenbarem Gegensatz zu dem, was man anschauungsmäßig als sicher angenommen hatte, Kurven gibt, die in *allen* Punkten stetig sind, aber in *keinem* Punkte eine Tangente besitzen.

Weierstraß- und Bolzano-Funktion. Eine der ersten „Monsterfunktionen“ [3] dieser Art wurde von KARL WEIERSTRAB in einer Arbeit publiziert, die am 18. Juli 1872 bei der Königlichen Akademie der Wissenschaften eingereicht und von P. DU BOIS-REYMOND 1875 in „Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente“ veröffentlicht wurde.



Abb. 4: Karl Th. W. Weierstraß (1815-1897)

Historisch gesehen liegt ihre Bedeutung darin, dass sie das erste von Fachkollegen wirklich beachtete Beispiel dafür ist, dass nicht jede stetige Funktion differenzierbar bis auf eine Menge isolierter Punkte ist [4].

In WEIERSTRAB' Originalarbeit wurde die Funktion definiert durch:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \text{ mit } 0 < a < b \text{ und } b \in \mathbb{N} \text{ und } a b > 1 + \frac{3}{2} \pi$$

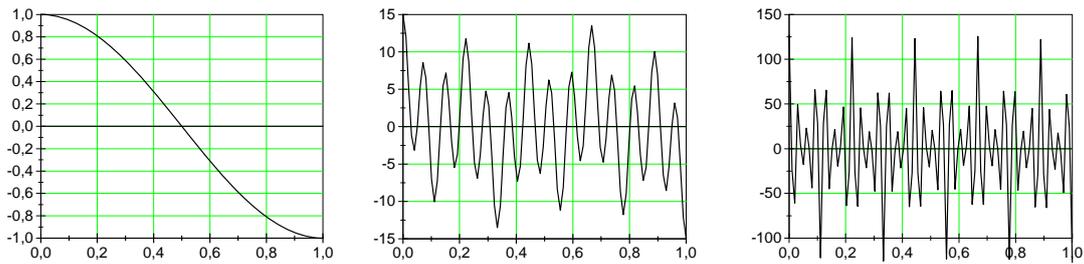


Abb. 5: Weierstraß-Funktion, 0. Iteration, 3. Iteration und 6. Iteration

BERNARD BOLZANO gab schon in den 1830er Jahren eine entsprechende „Monsterfunktion“ [5] an, die folgendermaßen konstruiert werden kann³: Ausgangspunkt ist die Strecke mit

$$f(x) = x \text{ im Intervall } [0; 1).$$

Nun wird folgende Iteration durchgeführt: Mit jedem Schritt wird der Graph in Drittel geteilt. Dabei

- ist der Graph f_i des mittleren Sektors gleich dem Graphen f_{i-1} von $[0, 1)$, horizontal verkürzt auf $1/3$ und vertikal gespiegelt.
- sind die Graphen der beiden äußeren Drittel gleich dem Graphen von f_{i-1} von $[0, 1)$ horizontal verkürzt auf $1/3$ und vertikal verkürzt auf $2/3$ [6].



Abb. 6: Bernard Bolzano (1781-1848)

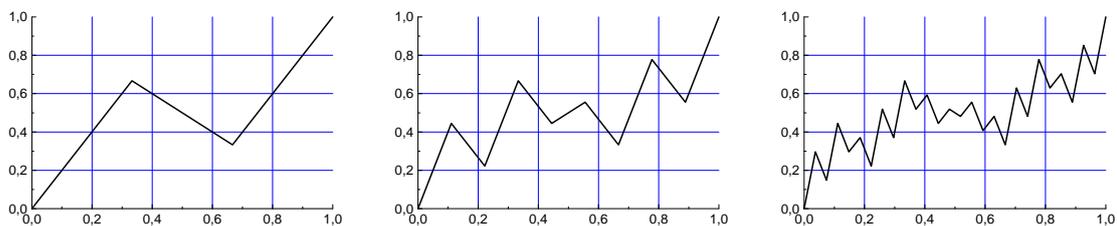


Abb. 7: Bolzano-Funktion, 1. Iteration, 2. Iteration und 3. Iteration

³ Die ursprüngliche Definition von Bolzano findet man in der Veröffentlichung von Jarník (1981).

Einige Bemerkungen zu klassischen Kurven und Fraktalen

Kurven. K. KIEßWETTER gibt in seiner o. a. Arbeit an, wie die ersten drei Schritte auf dem Weg zum Graphen der Kießwetter-Funktion aussehen (Abb. 8). Ist der vollständige Graph eine Kurve?

Jeder hat eine anschauliche Vorstellung davon, was eine Kurve ist, und seit altersher glaubte man, diese Vorstellung durch Definitionen einfangen zu können: Die Beschreibung einer Kurve in Euklids „Elemente der Mathematik“ als „breitenlose Länge“ oder als „Ende einer Fläche“ ist anschaulich, aber als Definition weniger brauchbar, da sie Begriffe enthält, die vorher definiert werden müssten. RENÉ DESCARTES (1596-1650) gab im Rahmen der analytischen Geometrie eine erste exakte Definition, die wir heute etwa in der Form „Eine Kurve ist die Menge aller Punkte, deren Koordinaten eine Gleichung der Form $f(x,y) = 0$ erfüllen“, angeben können. Mit dieser Definition können wir beispielsweise nicht nur Geraden, sondern auch die Kegelschnitte, also Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel sowie zahlreiche andere Kurven erfassen.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838-1922) gab dann die lange Zeit allgemein akzeptierte umfassendere Definition „Eine Kurve ist die Menge aller Punkte, deren Koordinaten stetige Funktionen $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ eines Parameters t mit $0 \leq t \leq 1$ sind“. Hinter dieser Definition steht die anschauliche Vorstellung, dass Kurven diejenigen geometrischen Gebilde sind, die durch Bewegung eines Punktes erzeugt werden können [7].

Die Bedingungen der Kurvendefinition nach DESCARTES oder JORDAN erfüllen viele der klassischen Kurven (Abb.9).

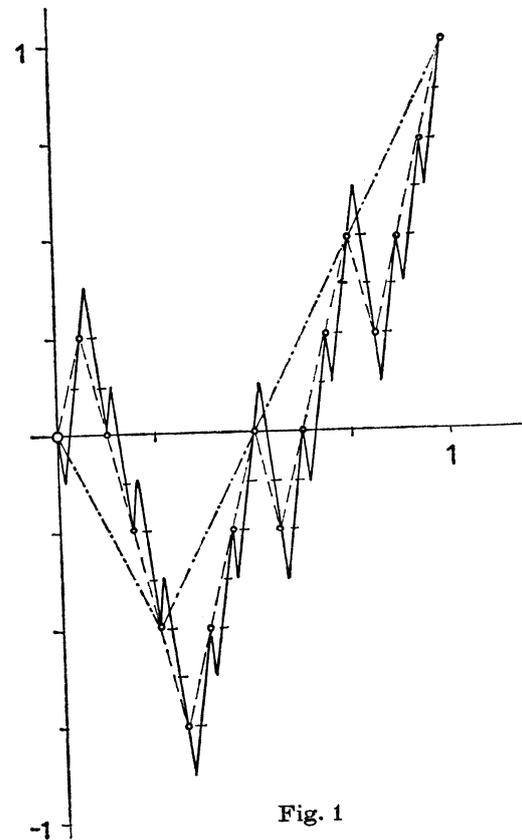
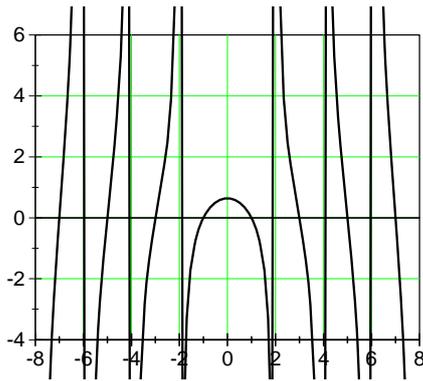
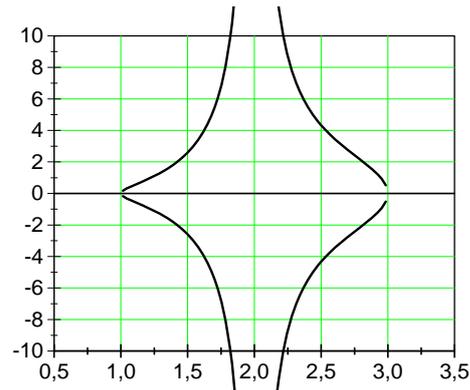


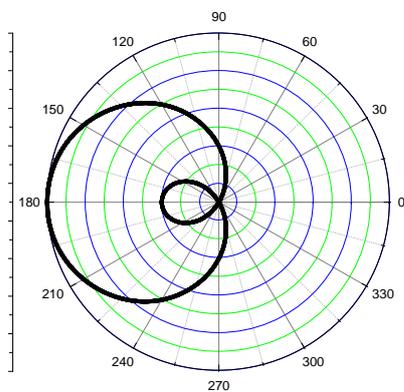
Abb. 8: Graph der Kießwetter-Funktion



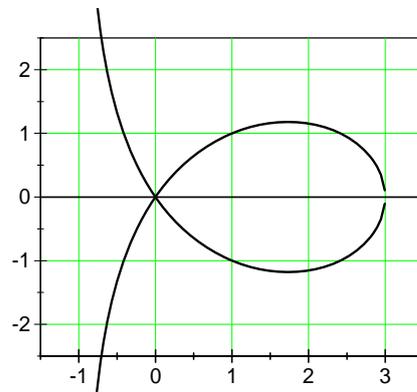
a) Quadratrix des Dinostratus (etwa 390 – etwa 320 v. Chr.)



b) Konchoide des Nikomedes (um 180 v. Chr.)



c) Pascal-Schnecke⁴



d) Trisektrix von MacLaurin (1742)

Abb. 9: Klassische Kurven, die zur Lösung des elementar mit Zirkel und Lineal nicht lösbaren Problems der Winkeldreiteilung herangezogen wurden [8]

Die Kurvendefinition nach JORDAN ist einerseits zu eng, denn sie enthält nicht alle Kurven, die man zu den Kurven zählen möchte, und andererseits zu umfassend. Daher bemühte man sich seit den 20er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts, Kurven über den Dimensionsbegriff zu definieren.

Eine Punktmenge wird als *nulldimensional* bezeichnet, wenn es zu jedem ihrer Punkte beliebig kleine Umgebungen gibt, deren Begrenzung keinen Punkt der Menge enthält. Jede aus endlich vielen Punkten bestehende Menge ist daher nulldimensional. Der triadische CANTOR-Staub (Abb. 10), der aus unendlich vielen Punkten besteht, hat dagegen die HAUSDORFF-Dimension $\log 2 / \log 3 = 0,6309\dots$ [9].

⁴ Nach Etienne Pascal (1588 – 1651), Vater von Blaise Pascal (1623 – 1662)

Die Iterationsvorschrift für den triadischen CANTOR-Staub⁵ lautet (Abb. 10): Eine Strecke wird in drei gleichlange Teile geteilt. Der mittlere Teil wird gelöscht. Dieser Vorgang wird bei den entstehenden Teilstrecken immer wieder wiederholt.

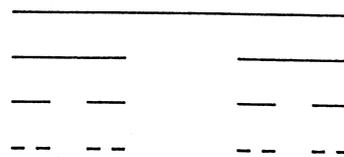


Abb. 10: Iterationen, die zum triadischen Cantor-Staub führen.

Nach K. MENGER und P. UREYSON liefert der Dimensionsbegriff eine befriedigendere Definition des Begriffes *Kurve*: *Eine Kurve ist ein eindimensionales Kontinuum*, also ein Kontinuum, dessen Punkte vollständig in beliebig kleinen Umgebungen liegen, deren Rand kein Kontinuum besitzt, das aus mehr als einem Punkt besteht. Alle geometrischen Figuren, die man üblicherweise als Kurven bezeichnet, sind es auch nach dieser Definition, beispielsweise Geraden, aus endlich vielen geradlinigen Strecken zusammengesetzte Figuren, Kreislinien, Ellipsen usw.



Abb. 11: Pavel S. Ureyson (1898-1924)

FASS-Kurven. Im Jahre 1890 zeigte der italienische Mathematiker GIUSEPPE PEANO, dass zu den durch Bewegung eines Punktes erzeugbaren geometrischen Gebilden auch ganze Flächenstücke gehören können. Es ist beispielsweise möglich, dass ein bewegter Punkt sämtliche Punkte einer Quadratfläche oder eines Würfels durchläuft.

Bei der PEANO-Kurve – Peano selber hinterließ jedoch keinerlei Illustrationen, sondern gab nur an, wie die Kurve rein analytisch konstruiert werden kann. - erfolgt eine Verfeinerung des Weges auf der Basis von 9 Quadraten (Abb. 13). Die erste Teilabbildung zeigt den sogenannten Generator. Die zweite und die dritte Teilabbildung zeigen die ersten beiden Iterationen der PEANO-Kurve. Die PEANO-Kurve hat die HAUSDORFF-Dimension 2.



Abb. 12: Karl Menger (1902 – 1985)

⁵ nach Georg Cantor (1845 – 1918)