Udo Beyer *Hrsg.*

# Die Basis der Vielfalt

## Geometrie als Grundlage und Anregung des Denkens

10. Tagung der DGfGG

Springer Vieweg

Die Basis der Vielfalt

Udo Beyer
(Hrsg.)

# Die Basis der Vielfalt

## Geometrie als Grundlage und Anregung des Denkens

10. Tagung der DGfGG

Springer Vieweg

*Herausgeber*
Udo Beyer
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-658-14125-7 ISBN 978-3-658-14126-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-14126-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg


Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

# Vorwort

Der Titel der 10. Tagung der Deutschen Gesellschaft für Geometrie und Grafik, DGfGG, thematisiert die umfassende Bedeutung der Disziplin als eine der ältesten Wissenschaften. Nach wie vor bietet die Geometrie Grundlagen für Anwendungen und Konzepte in nahezu allen Lebens- und Wissensbereichen und ist hochaktuell und unverzichtbar für das Vordringen in Gebiete modernster Erkenntnis.

Diese Vielfalt aufzuzeigen und lebendig werden zu lassen, war das Anliegen der Tagung, die vom 11.–13. März 2015 an der Architekturfakultät des Karlsruher Instituts für Technologie, KIT, stattfand. In den dokumentierten Vorträgen wird die Faszination komplexer Systeme, die sich aus einfachen Bausteinen und Grundregeln erzeugen lassen, beleuchtet. Dabei kommen Bedeutung und Einfluss der Geometrie als kulturgeschichtlich fundamentales Gedankengebäude in den unterschiedlichsten Wissens- und Anwendungsgebieten zum Ausdruck. Sowohl rein theoretische Fragestellungen als auch ganz aktuelle praktische Aufgaben lassen sich durch geschickte Anwendung einfacher Prinzipien zu innovativen neuen Lösungen führen. Eine große Bandbreite an Themen und Anwendungsbereichen der Geometrie wird angesprochen und durch anschauliche Beispiele erlebbar gemacht. Die Autoren kommen aus Praxis und Theorie verschiedener Disziplinen wie Architektur, Design, Kunst, Philosophie und Mathematik.

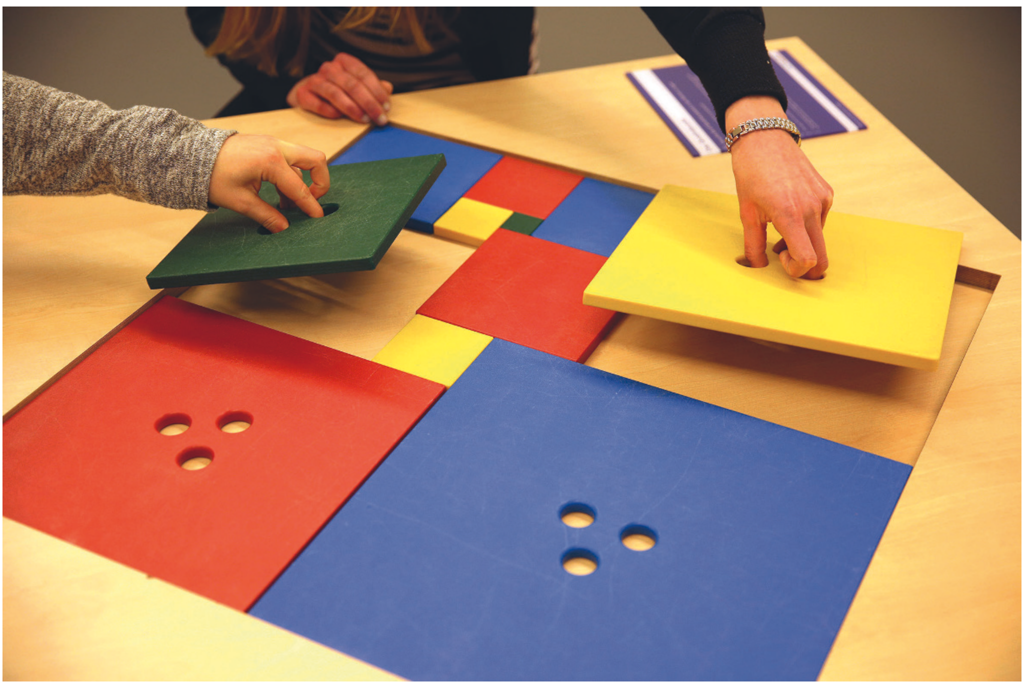
Eine besondere Belebung erhalten die Beiträge durch die Dokumentation der Ausstellung von Objekten der Künstlerin Sabine Classen, die in ihren Skulpturen rationale Bewegungsformen auf ganz unmittelbare Weise zur Anschauung und begreifbaren Erkenntnis bringt.

Die Durchführung der Tagung und die Realisierung des Tagungsbandes waren nur möglich durch großzügige finanzielle Unterstützung seitens des Präsidiums des KIT, speziell Vizepräsidentin Dr. Elke Luise Barnstedt, sowie der Karlsruher Universitätsgesellschaft, KUG, die sich zum wiederholten Male an den Druckkosten für Veröffentlichungen des Lehrgebietes substanziell beteiligt hat. Durch die DGfGG, die regelmäßig einen großen Teil ihres Budgets für die Finanzierung der Tagungen aufwendet, erhielt ich auch im Rahmen der Vorbereitung wichtige Hilfestellung in organisatorischen Belangen wie der Einrichtung der Tagungs-Webseite. Allen an diesem Projekt Beteiligten, sowohl den Vortragenden und Autoren als auch den wissenschaftlichen Hilfskräften und Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern in der Verwaltung, möchte ich an dieser Stelle noch einmal einen herzlichen Dank aussprechen.

Ich hoffe, der vorliegende Band kann etwas von der intensiven, anregenden Atmosphäre der Tagung konservieren und einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich machen.

Karlsruhe, Juni 2016 Udo Beyer

# Inhalt



# Dem Gemeinen einen hohen Sinn geben …

## Elementare geometrische Formen als Impulse zur Beschäftigung mit Mathematik

Das Mathematikum ist das erste mathematische „Mitmachmuseum" der Welt für Mathematik. Es zieht jährlich etwa 150.000 Besucher jeden Alters an und ist mittlerweile auch international eine Marke. Dieser Erfolg beruht ganz wesentlich darauf, dass das Mathematikum seinen Besuchern einen neuen Zugang zur Mathematik bietet, indem diese an interaktiven Exponaten selbständig mathematische Erfahrungen machen. Dadurch werden Vorstellungen angeregt und Einsichten erzeugt. Bei der Entwicklung und dem Umgang mit den Experimenten hat sich der Rückgriff auf einfache Formen als außerordentlich fruchtbar für den Erkenntnisprozess der Besucher herausgestellt.

Beim Nachdenken über diesen Ansatz ist mir ein Satz des Romantikers Novalis (1772–1801) in den Sinn gekommen. In seinen Fragmenten (1800) schreibt er: *„Indem ich dem Gemeinen einen hohen Sinn, dem Gewöhnlichen ein geheimnisvolles Ansehn, dem Bekannten die Würde des Unbekannten, dem Endlichen einen unendlichen Schein gebe, so romantisiere ich es."* Selbst wenn man von dem schwierigen Begriff des Romantisierens absieht, bleibt noch viel Inhalt übrig, der meinem Eindruck nach sehr gut beschreibt, welches Potenzial es bei mathematischen Experimenten auszuschöpfen gilt. Wir geben dem Gemeinen (= Gewöhnlichen) einen hohen Sinn, wenn wir etwas als einzelnes Objekt ernst nehmen und ausstellen; das Gewöhnliche erhält ein geheimnisvolles Ansehn, wenn es eine Schlüsselrolle in einer komplexen Konstruktion hat; das Bekannte erlangt die Würde des Unbekannten, wenn es sich in unerwarteten Beziehungen zeigt und das Endliche leuchtet im unendlichen Schein, wenn wir es als Teil eines unendlichen Musters sehen.


U. Beyer (Hrsg), *Die Basis der Vielfalt*,
DOI 10.1007/978-3-658-14126-4_1

## Vom Komplizierten zum Einfachen

*Man soll die Dinge so einfach wie möglich machen …*
Albert Einstein, 1879–1955

Wenn man das Mathematikum besucht, ist man – bewusst oder unbewusst – von der Klarheit des Hauses beeindruckt.

Vielen fällt die helle und klare *Architektur* auf: In jedem der drei Stockwerke gehen vom Mittelgang vier quaderförmige aufgeräumte Räume ab, zwei rechts und zwei links, zwei vorne und zwei hinten. Die Besucher finden sich von selbst zurecht, die Orientierung ist kein Problem, ein explizites Leitsystem ist nicht notwendig. Diese Einfachheit der Architektur dient auch dazu, dass die Besucher den Kopf frei haben für den Inhalt des Hauses, also die Experimente.

Wenn man sich dann den Experimenten nähert, wird man – in der Regel unbewusst – das schlichte, aber effiziente *Design* der Experimente wahrnehmen. Die Tischplatten und Haltesysteme sind in der Regel aus Birke-Multiplex gefertigt, in Ausnahmefällen aus anthrazit beschichtetem Metall, während die Objekte, mit denen man experimentieren soll, die Grundfarben Rot, Gelb, Blau (und in Ausnahmefällen auch andere Farben) tragen. Diese Farbsprache dient dazu, dass die Besucher „automatisch“ das Richtige tun und genau wissen, für welche Objekte das *„bitte berühren“* gilt.

Die Experimente selbst sind geprägt durch einfachste Formen wie zum Beispiel Dreieck, Quadrat, Würfel, Quader. Dafür spricht zunächst ein pädagogischer Grund: Das Design der Experimente erzeugt keine Berührungsängste. Im Gegenteil, der niedrigschwellige Zugang vermittelt die Botschaft: *„Du kannst das schaffen!“*

Ein zweiter Grund ist subtiler: Wenn man anfängt, das Experiment durchzuführen, kommt man bald an einen kritischen (schwierigen, kniffligen) Punkt: das Experiment zeigt eine unerwartete Schwierigkeit, es bietet eine Überraschung, es zeigt, dass es mehr Dinge zwischen Dreieck und Quadrat gibt als Du Dir träumen lässt. Und genau das bringt unser Denken in Bewegung.

Diese Spannung zwischen den einfachsten Formen, die „jedes Kind“ kennt, und der unerwarteten Komplexität der Aufgabe trägt entscheidend zu dem Reiz und der Attraktivität der Exponate bei. In der Tat ist die ständige Frage bei der Entwicklung von Experimenten: Geht es noch einfacher?

Ein überraschend schwieriges Experiment besteht darin, aus drei kongruenten symmetrischen Trapezen ein Dreieck zusammenzusetzen. Dieses Experiment befindet sich im Mini-Mathematikum, der Abteilung für 4- bis 8-jährige Kinder. Dieses Experiment passt sehr gut in diesen Bereich, weil es für Erwachsene schwieriger zu sein scheint als für Kinder. Selbst wenn zwei Trapeze schon richtig liegen, fragen sich manche Besucher noch, wie das dritte Trapez dazu passen soll. Wenn die Figur dann vollständig ist, sieht es ganz einfach aus.

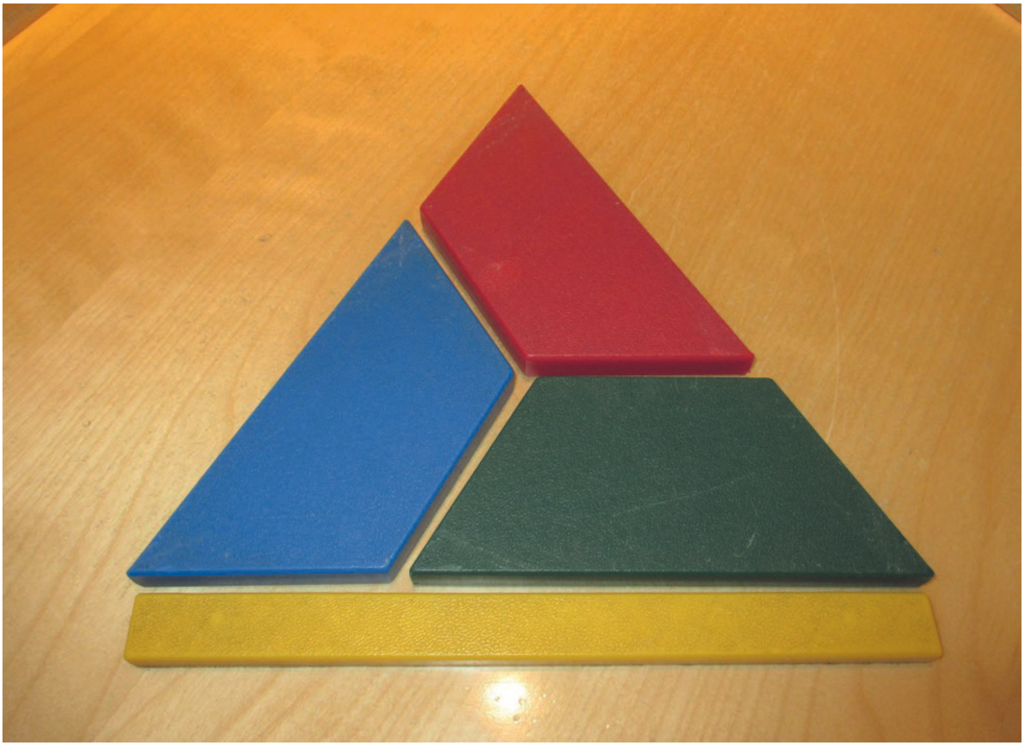


Bild 1: Dreieck aus Trapezen

## Formen

*Dem Gemeinen einen hohen Sinn geben*

Ein wesentlicher Aspekt der Ausstellung von Objekten in einem Museum besteht darin, einen alltäglichen Gegenstand in eine Vitrine zu legen, ihn auf den Sockel zu stellen, kurz: ihn zu präsentieren. Dadurch wird dieser in den Mittelpunkt gerückt, er wird ein Objekt des Interesses, er wird mit Bedeutung versehen. Dies geschieht auch im Mathematikum: wenn wir ein Objekt herausheben und durch die Gestaltung des Exponats klar machen, dass die Besucher es mit der „mathematischen Brille“ anschauen sollen, dann wird auch der normalste Gegenstand interessant und zeigt oft bislang verborgene Seiten.

Dies wird zum Beispiel deutlich an den Experimentgruppen „Formenschrank“ bzw. „Zahlenschrank“. Man steht in beiden Fällen vor einem Schrank mit vielen geschlossenen Schubladen, auf deren Frontseiten man jeweils eine Zeichnung einer Form (von Punkt und Gerade über ebene Formen wie Quadrat und Raute zu räumlichen Objekten wie Würfel und Kugel) beziehungsweise eine Zahl lesen kann. Wenn man die Schublade aufzieht, erkennt man ein


Bild 2: Zahlenschrank

Objekt, das – so die klare Botschaft – irgendetwas mit der Information auf der Vorderseite der Schublade zu tun haben soll. Was verbindet ein Fünfeck mit einem Apfel? Was hat der Kronkorken in der Schublade mit der Nummer 21 zu suchen?

Das Experiment ist aus mindestens drei Gründen interessant.

- Das Experiment zeigt, dass Mathematik überall vorkommt und – wenn man nur richtig hinschaut – überall zu finden ist.

- Die Beziehungen zwischen Gegenstand und abstrakter Form sind oft überraschend, so dass die Besucher wirklich neugierig werden, alle Schubladen öffnen und womöglich selbst neue Schubladen entwickeln oder sich Alternativen für die Bestückung überlegen.

- Die Alltagsgegenstände werden wertiger, ja: schöner, wenn man weiß, dass sie auch(!) mathematische Formen in sich tragen.

## Beziehungen

*Dem Gewöhnlichen ein geheimnisvolles Ansehn geben*

Manchmal stehen zwei geometrische Objekte in einer ganz speziellen Beziehung. Diese ist mathematisch bedeutsam, weil sie uns nicht nur etwas über diesen Zusammenhang verrät, sondern auch neue Seiten der Objekte ins rechte Licht rückt.

Dies sieht man besonders schön an den dualen platonischen Körpern. Durch einfaches Abzählen können auch schon junge Kinder feststellen, dass die Anzahl der Ecken des Würfels (8) gleich der Anzahl der Flächen des Oktaeders ist und dass die Anzahl der Flächen eines Würfels (6) gleich der Anzahl der Ecken des Oktaeders ist. Außerdem haben beide gleichviele Kanten (12). Diese Beziehungen sind nicht numerische Zufälligkeiten, sondern sie deuten auf tiefe geometrische Zusammenhänge hin: Wenn man benachbarte Seitenmittelpunkte des Würfels miteinander verbindet, erhält man ein Oktaeder und umgekehrt. Die Gleichheit der Anzahlen der Kanten zeigt sich so, dass man Würfel und Oktaeder größenmäßig so aufeinander abstimmen kann, dass jede Kante des einen Körpers rechtwinklig von einer Kante des anderen Körpers geschnitten wird.

Sehr schön zeigt sich die Dualität am Tetraeder, das zu sich selbst dual ist. Die Vereinigung der beiden ist der Keplerstern (stella octangula).

Eine besonders fruchtbare Beziehung herrscht zwischen Tetraeder und Würfel, also den beiden einfachsten platonischen Körpern. Das Experiment im Mathematikum besteht darin, ein Tetraeder in einen oben offenen Glaswürfel einzupassen. Die Aufgabe ist klar – aber schwierig! Denn es geht weder, wenn man eine Seitenfläche unten hat noch wenn man es mit einer Spitze nach unten versucht. Man muss schon auf die Idee kommen, das Tetraeder so zu halten, dass eine Kante unten ist – dann klappt es aber „wie von alleine“.

An dieses Experiment schließt sich eine ganze Reihe von mathematischen Erkenntnissen an. Hier soll nur auf einen Aspekt eingegangen werden. Wenn der Würfel fixiert ist und das Tetraeder einfarbig ist, dann gibt es genau zwei Weisen, das Tetraeder in den Würfel einzusetzen: Die untere Kante des Tetraeders ist eine Diagonale der Würfelseite; da ein Quadrat zwei Diagonalen hat, gibt es zwei Möglichkeiten für das Tetraeder.

Zwei herausfordernde Vorstellungsübungen sind die folgenden: (a) Was ist die Vereinigung der beiden Tetraeder? (b) Was ist der Durchschnitt der beiden Tetraeder?

Der ersten Frage kann man sich durch eine grobe Analyse nähern: Jedes Tetraeder hat vier Ecken, also haben beide zusammen acht Spitzen, in jeder der acht Würfelecken eine. Es liegt nahe, an einen Stern zu denken. Tatsächlich ergibt sich der Keplerstern. Den Durchschnitt kann man sich auch so vorstellen, dass man bei dem Keplerstern alle acht Spitzen abschneidet. Da die Spitzen dreieckige Pyramiden sind, muss sich ein Körper aus acht Dreiecken ergeben – das Oktaeder.

Bild 3: Tetraeder im Würfel

Man erkennt sehr klar, dass auch einfachste Formen Geheimnisse enthalten, die sich zu entdecken lohnen. Noch fruchtbarer ist eine Beziehung zwischen zwei – scheinbar simplen – Objekten. Wenn man sie zusammenbringt, dann schlagen sie mathematische Funken und dem Experimentator geht ein Licht auf.

## Zerlegungen

Man zerlegt ein Objekt, um es neu oder zu etwas Neuem zusammenzusetzen, oder um Strukturen freizulegen, die sonst unter der Oberfläche verborgen blieben.

Eine wichtige Anwendung dieses Prinzips ist die Flächenberechnung: Man zerlegt eine komplizierte Figur in Teile, so dass man entweder den Flächeninhalt der Teile direkt bestimmen

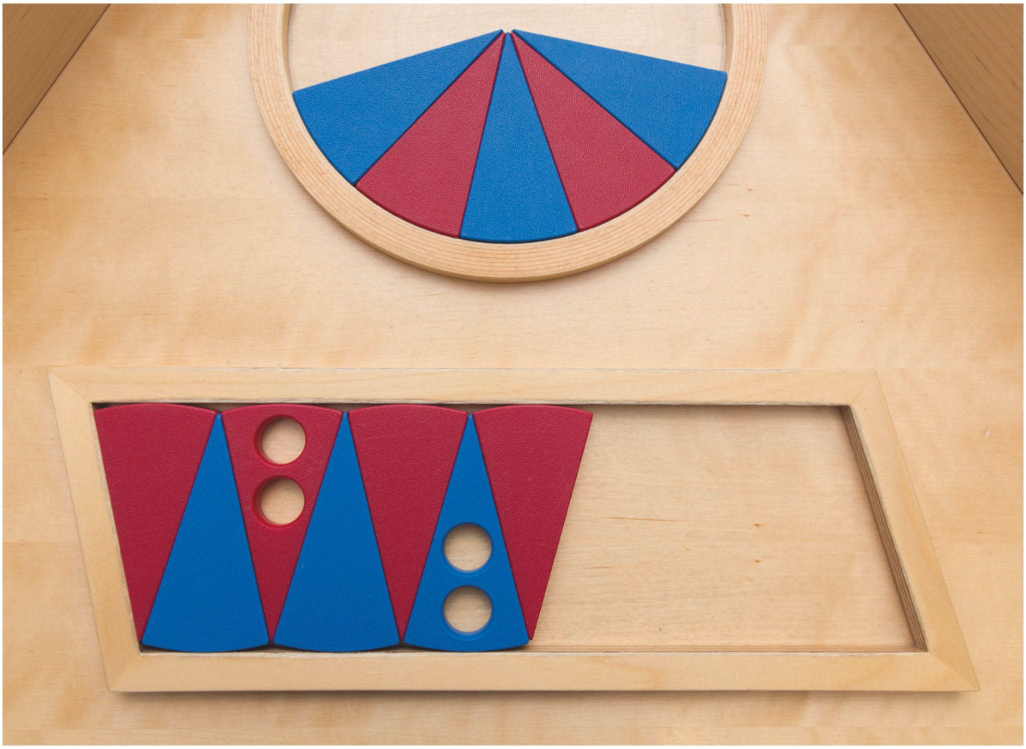


Bild 4: Kuchenstückexperiment

kann, oder so, dass man die Teile zu einer neuen Figur zusammensetzt, deren Flächeninhalt man schon kennt. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die Berechnung der Kreisfläche, die auf Archimedes (287–212 v. Chr.) zurückgeht. Man teilt die Kreisfläche in viele „Kuchenstücke" ein, und legt diese so zusammen, dass sie (fast) ein Rechteck ergeben. Dieses Rechteck hat als eine Seitenlänge den Radius $r$ und als andere den halben Umfang $\mathrm{U}/2 = \pi r$ des Kreises. Somit hat das Rechteck (und damit der Kreis!) den Flächeninhalt $r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Weitere Beispiele sind die zum Teil herausfordernden Zerlegungen einer Figur, aus der man eine andere herstellen kann. Das berühmteste Beispiel ist das von Henry Ernest Dudeney (1857–1930) im Jahre 1902 erfundene „Quadreieck" (Haberdasher's Puzzle), mit dem man ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat verwandeln kann.

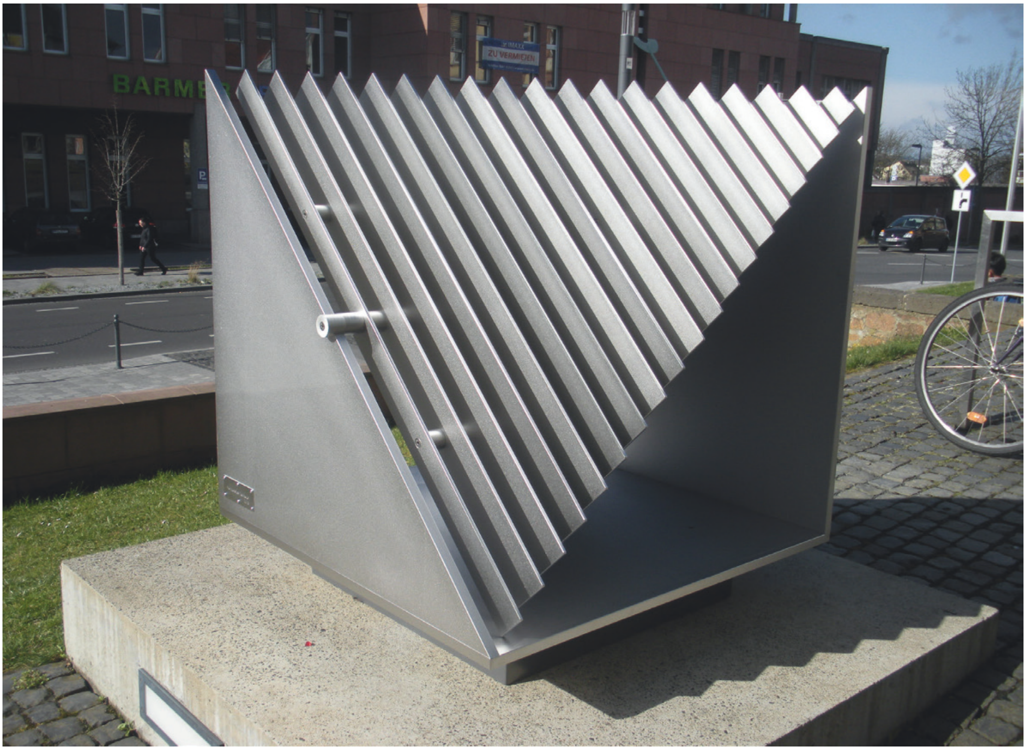


Bild 5: Friedhelm Kürpig – Außenskulptur

In eine ganz andere Richtung zielen die faszinierenden „Kürpigschen Schichtkörper“, mit denen sich der Künstler Friedhelm Kürpig seit geraumer Zeit beschäftigt. Dabei wird ein Körper, etwa ein Tetraeder, weder als Volumen noch als Oberfläche noch als Kantenmodell dargestellt, vielmehr erscheint der Körper aus vielen parallelen Schnittebenen zusammengesetzt. Diese durchschneiden den Körper nun nicht in einer beliebigen Richtung, sondern so, dass jeweils eine Symmetrie des Körpers sichtbar wird. Die Schnittebenen stehen senkrecht auf einer Symmetrieachse und die Skulptur suggeriert unmittelbar die entsprechenden Drehungen um 180°, 120°, 90° oder 72°. Hier kommen künstlerische Gestaltung und mathematische Einsicht in vorbildlicher Weise zusammen. (Siehe [4] S. 20 ff.)

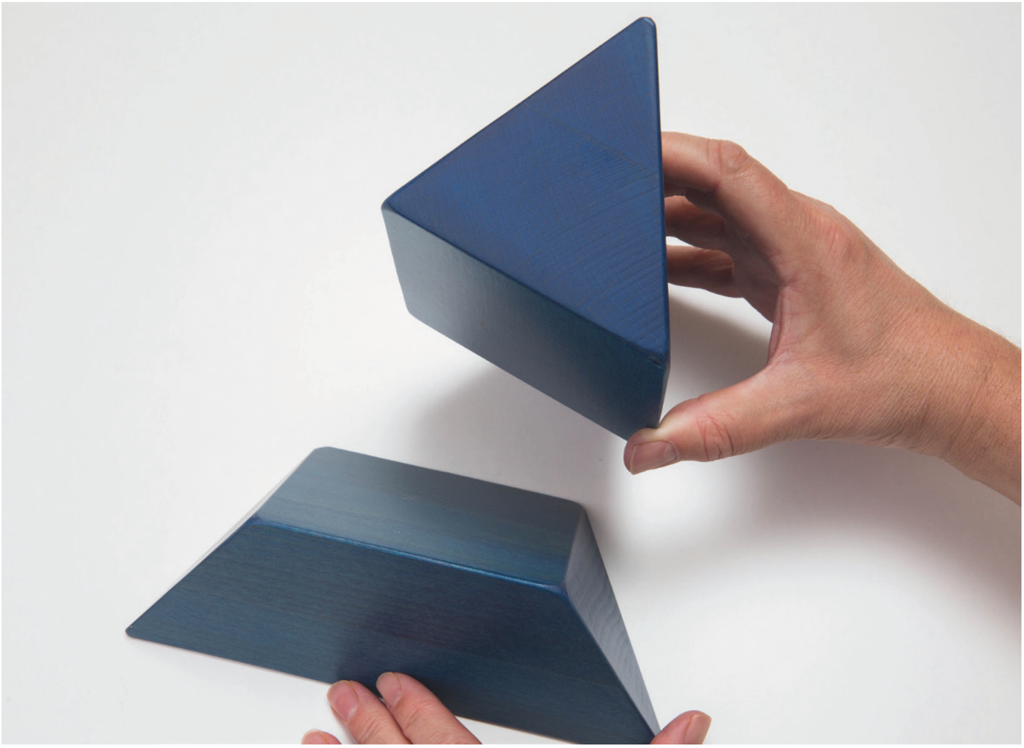


Bild 6: 2er-Pyramide

## Zusammensetzen

*Dem Bekannten die Würde des Unbekannten geben*

Beim Zusammensetzen eines Puzzles ergeben sich oft überraschende Einsichten: Die Teile, die zur Verfügung stehen, sind visuell einfach erfassbar, die Zielfigur steht einem klar vor Augen – und dennoch will es nicht gelingen, mit den Teilen auch nur annähernd das gewünschte Objekt zusammenzubauen – bis einem irgendwann ein Licht aufgeht. Dann sieht man plötzlich, wie es sein muss und die Teile fügen sich fast von alleine zusammen.

Dieser Aha-Moment kann spontan erfolgen, man kann ihm aber durch einige mathematische Überlegungen näher kommen. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden.

Ein schönes Experiment ist die 2er-Pyramide. Das Puzzle besteht aus zwei Teilen, aus denen eine Pyramide entstehen soll. Kaum haben die Besucher die Aufgabe verstanden, setzen sie die beiden Teile zusammen, allerdings so, dass Spitze an Spitze ist. Da dies offensichtlich keine Pyramide ergibt, wird zunächst ziellos weiterprobiert.

Wenn man weiß, dass die entstehende Pyramide ein Tetraeder ist, das heißt, nur dreieckige Seitenflächen hat, dann stellt sich zwingend der Gedanke ein, dass die Quadratflächen an den beiden Teilen durch das Zusammenlegen verschwinden müssen. Bei zwei Teilen gelingt das nur, wenn man diese so zusammenfügt, dass die beiden Quadrate aufeinanderliegen.

In vielen Fällen machen die Besucher das so, dass zwar eine symmetrische Figur entsteht, die aber nicht an eine Pyramide erinnert. Mit einer Drehung um 90 Grad entsteht aber – fast wie durch ein Wunder – die Pyramide.

Die beiden Puzzleteile sind eher unscheinbar, sie erschließen sich jedenfalls nicht unmittelbar, so dass man sie reproduzierbar im Kopf hätte. Aber dadurch, dass sie sich zu einem Tetraeder zusammensetzen lassen, gewinnen sie Bedeutung und Ansehen.

Bei einem weiteren Beispiel geht es um den Würfel, ein geometrisches Objekt, das sich vermutlich jeder ohne Schwierigkeiten vorstellen kann. Auch die Teile, aus denen man den Würfel zusammensetzen soll, sind alles andere als aufregend: drei kleine Würfelchen und sechs Quader mit den Kantenlängen 1, 2, 2. Man kann sich leicht überlegen, dass die Teile zusammen das Volumen 27 haben, so dass der ins Auge gefasste Würfel ein $3\times3\times3$-Würfel sein muss.

Die vielen Teile finden sich aber nicht leicht zu einem Würfel zusammen. Um die Struktur zu erkennen, muss man die Größe der Seitenflächen als Zahlen betrachten. Die Würfelchen haben Seitenflächen der Größe 1, während die Quader Seitenflächen der Größen 2 und 4 haben. Bei dem Zielwürfel hat jede Fläche (vorne, hinten, oben, unten, rechts, links, in der Mitte) jeweils den Flächeninhalt 9. Keine solche Fläche kann man nur mit Quaderflächen überdecken; denn diese haben alle einen geraden Flächeninhalt, und 9 ist keine Summe aus geraden Zahlen. Also muss jede Ebene des Würfels ein kleines Würfelchen enthalten. Daraus ergibt sich die Vorstellung, dass die drei Würfelchen auf einer Raumdiagonale angeordnet sein müssen – und damit lässt sich der Würfel dann wirklich leicht bauen.

Bei diesem Exponat erhalten die banalen Einzelteile durch die Struktur, mit der sie im Würfel angeordnet sein müssen, eine ganz bestimmte Rolle und, indem sie diese Rolle perfekt ausfüllen, auch ihre Würde.

Dieses Puzzle geht auf den englischen Mathematiker John H. Conway (geb. 1937) zurück. (Siehe [1].)

## Muster

*Dem Endlichen einen unendlichen Schein geben*

Wenn man nicht wenige Teile in spezifischer Weise, sondern (unendlich) viele Objekte in systematischer Weise aneinanderfügt, erhält man ein Muster. Dieser Begriff ist ein Zentralbegriff der Mathematik (manche Mathematiker sagen sogar, Mathematik sei die Wissenschaft von den Mustern ([3] S. 10)), aber er weist auch weit über die Mathematik hinaus.

An Beispielen aus dem Alltag herrscht definitiv kein Mangel: Wir denken vielleicht zunächst an Strickmuster oder die Muster aus Pflastersteinen in den Fußgängerzonen, aber auch Zebrastreifen, Schachbretter, französische Gärten bilden Muster. Ins Auge springen uns Muster bei verpackten Waren: Eierkarton, Würfelzucker, ... – aber auch jegliche Art von Stapelware.

All diesen Mustern ist eigen, dass sie aus einer Sorte von Objekten (manchmal auch mehr als einer) bestehen, und dass diese Objekte in vollkommen regelmäßiger Weise aneinandergesetzt werden. Man kann diese Vorstellung auch mathematisch präziser ausdrücken: Man geht von einem Teil (oder einem festen Set von Teilen) aus. Auf dieses Teil (bzw. das Set) wendet man nun eine bestimmte Verschiebung an, und zwar nicht nur einmal, sondern immer und immer wieder. So erhält man einen Streifen, ein „eindimensionales Muster“. Nun wendet man eine zweite Verschiebung (in eine andere Richtung) auf diesen Streifen an, und setzt auch diesen Prozess ohne Aufzuhören fort. So ergibt sich ein zweidimensionales Muster. Mit einer dritten Verschiebung würde man ein dreidimensionales Muster erhalten. Man muss also das Ausgangsobjekt nur in zwei bzw. drei Richtungen verschieben, um das gesamte Muster zu erhalten.

Ein zweidimensionales geometrisches Muster, das in der beschriebenen Weise durch Verschiebungen entstanden ist, hat folgende Eigenschaft: Wenn man sich vorstellt, über das unendliche Muster eine durchsichtige Folie zu legen, auf die ebenfalls das Muster aufgezeichnet ist, dann kann man die gesamte Folie ein Stückchen verschieben, so dass sie mit dem Muster auf dem Untergrund wieder perfekt zur Deckung kommt.

In der Mathematik werden diese Muster in der Regel unendlich groß gedacht. Reale Muster sind natürlich beschränkt und sind somit nur „Anfänge des echten Musters“.

Vorteile von Mustern sind u.a.:

- Etwas Großes wird in kalkulierbarer Weise aus Kleinem aufgebaut. Um das Große zu beherrschen, muss ich nur das Kleine gut verstehen. Muster sind ein wunderbares Mittel, die Unendlichkeit zu erfassen.

- Umgekehrt: Wenn man ein Muster entdeckt, bedeutet das, dass man etwas potentiell sehr Komplexes zurückgeführt hat auf etwas ganz Einfaches, nämlich den Ausgangsbaustein und die Verschiebungen.

- Ein Muster ist etwas Ganzheitliches, es reagiert empfindlich auf kleinste Änderungen und Fehler. Jede kleinste Unregelmäßigkeit, jeden Fehler und jedes Fehlen eines Teils erkennt man „auf einen Blick“. Das zeigt sich auch in dem Gedicht „ordnung“ von Timm Ulrichs, einem Beispiel der „konkreten Poesie“:

```
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung unordn   g
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
ordnung   ordnung
```

- Endliche Muster werden – auch im Schulunterricht – oft benutzt, um Multiplikation und die Gesetze der Multiplikation klar zu machen. (a) Wenn Objekte in einem rechteckigen Muster angeordnet sind, kann man unschwer deren Anzahl bestimmen, indem man Länge und Breite miteinander multipliziert. So kann man auch sehr große Anzahlen auf kleine Zahlen reduzieren und so die große Zahl sicher bestimmen. (b) Man kann Gesetze der Multiplikation, insbesondere das Kommutativgesetz erfahren.

Bild 7: Gespensterpuzzle

Im Mathematikum findet man zahlreiche Experimente, bei denen es darum geht, ein Muster herzustellen. Das einfachste dieser Experimente ist das „Gespensterpuzzle“, bei dem man die Gespenster lückenlos aneinanderfügen muss. Interessant ist, dass die Kinder von sich aus die Gespenster, die entweder blau oder grün sind, so legen, dass auch ein Farbmuster entsteht.

Aber auch Kreispackungen ergeben wunderbare Muster. Dichteste Kreispackungen sind die hexagonalen Packungen, deren mathematische Bedeutung und Schönheit Johannes Kepler (1571–1630) als Erster erkannt hat.

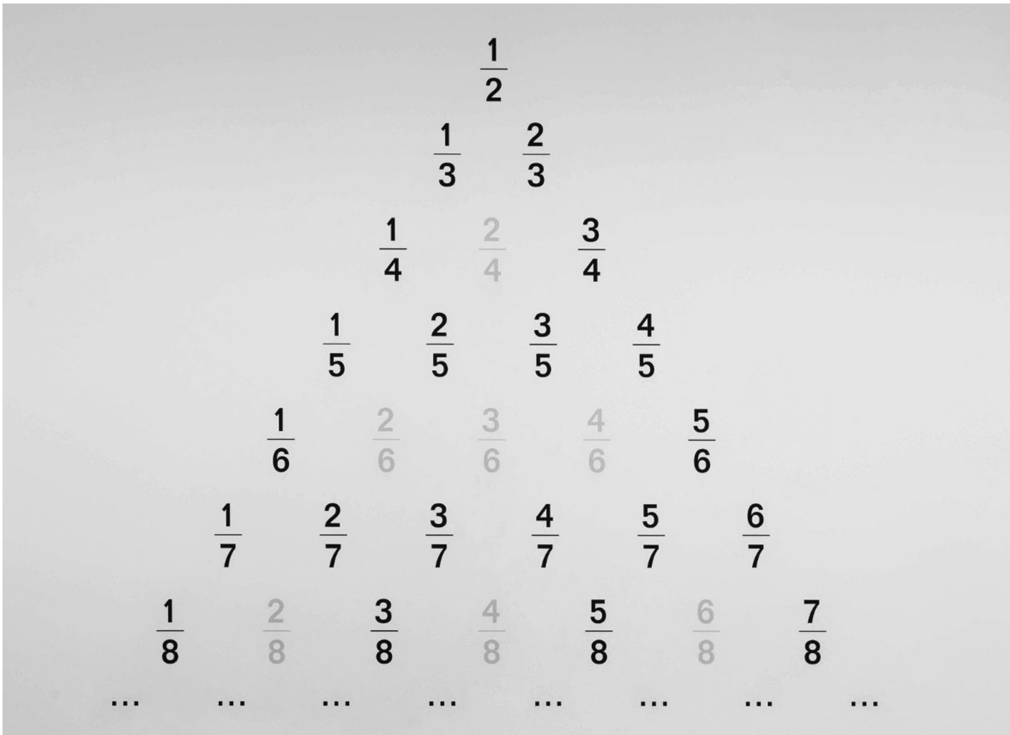



Bild 8: Rationale Zahlen

Etwas abstrakter kann man auch von Zahlenmustern sprechen. Man kann etwa die Zahlen einer Folge, wie zum Beispiel die Fibonacci-Zahlen, als ein (eindimensionales) Muster bezeichnen. Zweidimensionale Zahlenmuster sind zum Beispiel das Pascalsche Dreieck, aber auch die Anordnung der Bruchzahlen, an der man die Abzählbarkeit der Bruchzahlen erkennen kann. Dieses Muster hat zuerst Georg Cantor (1845–1918) gesehen.

## Schlussbemerkungen

Die Mathematik insgesamt lebt von der Sehnsucht nach Einfachheit. Selbst in den kompliziertesten Strukturen, bei den vertracktesten Konstruktionen, bei den ungelösten Problemen zielt die Forschung darauf ab, die einfache Grundstruktur, die schlagende Erklärung, den Schlüssel zum Geheimnis zu finden. Auch für die Besucher des Mathematikums oder ähnlicher Einrichtungen, die einen ersten Schritt in die Mathematik wagen, ist die Einfachheit der Objekte und der Strukturen und Muster wichtig. Sie ist ein Mittel, um auf sehr direktem Weg Geheimnisse der Mathematik zu entdecken.

## Referenzen

[1] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 2.
Academic Press 1982.

[2] Albrecht Beutelspacher: Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten.
C.H. Beck 2015.

[3] Devlin, K.: Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2002.

[4] F. Kürpig, U. Mikloweit, R. Roelofs, U. Wittorf: Ecken und Kanten – europaweit. Mathematikum Gießen 2014.

Fotos:
Mathematikum Gießen e.V. (Bild 2, 3, 4, 6, 7, 8 und Hauptbild: Fotograf Rolf K. Wegst).

# Beobachtungen zur Beweisart in Euklids Elementen

In einem bestimmten Sinn, den ich gleich erläutern werde, ist der unter dem Namen Euklids überlieferte Text mit dem lapidaren Titel ›Tà stoicheîa‹ – *Die Elemente* – das Grund- und Hauptbuch jenes europäischen Konzepts von Wissenschaft, in dessen Zentrum der folgende Gedanke steht: Wissen, das des Namens einer Wissenschaft würdig sein soll, muß beweisbares Wissen sein, *apodiktisches* Wissen also, wie wir nach dem griechischen Wort für einen Beweis – ›apódeixis‹ – zu sagen pflegen. Formuliert hatte dieses Konzept etwa ein halbes Jahrhundert vor Euklid kein Geringerer als Aristoteles im I. Buch seiner *Analytica posterioria*.[1] Die nachgerade magisch erscheinende Kraft, die ein Beweis auf das Gemüt einer Person auszuüben vermag, die ihn – den Beweis – verstanden hat, stellt kaum ein Text der europäischen Ideengeschichte seinerseits schlagender unter Beweis als die genannten *Elemente* Euklids. Das glaubten jedenfalls in der frühen Neuzeit – der Zeit zwischen Kopernikus und Newton – viele mehr oder weniger gelehrte Enthusiasten der Wissenschaften. Bezeichnend für die hohe Wertschätzung des Euklid in jener Zeit ist eine Thomas Hobbes betreffende Anekdote, die John Aubrey, eine Art Klatschkolumnist der Gelehrtenwelt im England des 17. Jahrhunderts, in seinen *Brief Lives* (1669-96) kolportiert hat:

»Der Geometrie wandte er [*scil.*, Hobbes] sich nicht vor dem 40ten Lebensjahr zu: das geschah durch Zufall. Als er sich in eines Gentlemans Bibliothek aufhielt, lagen da aufgeschlagen Euklids *Elements*, und zwar 47 *El. libri* 1. Er las die Proposition. *Bey G—*, sagte er (dann & wann pflog er, *qua emphasis*, vehement zu fluchen), *das ist unmöglich!* Also liest er die Beweisführung, die ihn zu einer Proposition zurückführte. Welchselbige er las. Dies leitete ihn zu einer weiteren zurück, die er gleichfalls las. *Et sic deinceps*, so daß er zuletzt von jener Wahrheit *qua demonstratione* überzeuget ward. Also verliebte er sich in die Geometrie.« (Aubrey 1994, 185, [1])

1 Ich kann es nicht kürzer und schon gar nicht besser sagen als Barnes 1975 [2], xi: »What Euclid later did, haltingly, for geometry, Aristotle wanted done for every branch of human knowledge. The sciences are to be axiomatized: that is to say, the body of truth that each defines is to be exhibited as a sequence of theorems inferred from a few basic postulates or axioms.«


U. Beyer (Hrsg), *Die Basis der Vielfalt*,
DOI 10.1007/978-3-658-14126-4_2

Der §47 im I. Buch der *Elemente* enthält übrigens just den Lehrsatz, den man gemeinhin als den »Satz des Pythagoras« bezeichnet. Das wirft ein seltsames Licht entweder auf Hobbes oder auf Aubrey. Konnte es wirklich sein, daß ein 40 Jahre alter Gelehrter, der immerhin bereits dem Lordkanzler Francis Bacon bei der Herstellung der lateinischen Fassung seiner Schriften zur Hand gegangen war, über den »Satz des Pythagoras« wie ein kleines Kind staunte, weil er in seiner Ausbildung davon noch nie gehört hatte? Oder hat Aubrey sich hier einen subtilen Scherz auf Hobbes' Kosten erlaubt. Möglich ist indes auch, daß Aubrey derjenige war, der es zuvor nicht besser wußte und sein eigenes kindliches Erstaunen auf einen ungleich berühmteren Zeitgenossen projiziert hat. Was nun wirklich der Fall war, wir wissen es nicht.

Wir wissen jedoch, daß in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts im Rahmen der *postum* veranstalteten Ausgabe seiner nachgelassenen Werke eine *Ethica ordine geometrico demonstrata* erschienen ist, die einen fast ebenso großen Skandal machte wie Hobbes' berüchtigter *Leviathan*. Ich spreche von der *Ethik* des Niederländers Baruch Spinoza. Diese beiden – Spinoza und Hobbes – standen bei Frommen und Frömmlern aller Konfessionen unter dem Verdacht, heimlich Atheisten zu sein. Das war aber nur ein kleiner Teil, höchstens ein Drittel, des Skandals. Ein zweiter Teil des Ärgernisses bestand darin, daß man ihnen dies dem Wortlaut ihrer Schriften nach nicht ohne weiteres nachweisen konnte, weil beide sich einer ostentativ theistischen Rhetorik bedienten. Komplettiert wurde der Skandal im Falle Spinozas dann – drittens – dadurch, daß er seine *Ethik* in der Tat exakt so aufgebaut hatte, wie die *Elemente* Euklids aufgebaut waren: Jedem ihrer fünf Teile waren *ordine geometrico* Definitionen, Axiome und Postulate vorangestellt, und die eigentliche Argumentation wurde in einer Folge numerierter Theoreme, Lemmata und Korollare präsentiert, deren jedes mit einem *prima facie* schlüssigen Beweis versehen war. Unangreifbar war diese Argumentation deshalb naturgemäß nicht. Aber sie anzugreifen, den maskierten Atheisten zu entlarven, war ungleich lästiger, als es gewesen wäre, wenn der Gegner sich nicht mit diesem Panzer gerüstet gehabt hätte.

Selbstverständlich haben seine Gegner den Vorwurf erhoben, der *ordo geometricus* Spinozas sei ein bloß äußerliches Nachäffen der Ordnung in Euklids *Elementen* und weit davon entfernt, dieselbe Überzeugungskraft zu entfalten wie diese, und das deshalb, weil die zugrundegelegten Definitionen, Axiome und Postulate anders als bei Euklid eben nicht *per se nota*, also nicht selbstverständlich seien, sondern willkürlich aufgestellt, mit Zweideutigkeiten gespickt und so weiter und so fort. Der Vorbildcharakter, den der *ordo geometricus* für ein wahrhaft wissenschaftliches Vorgehen hatte, sollte durch die freche Usurpation der zugehörigen Darstellungsart in dieser Ethik nicht im mindesten angetastet werden. Im Gegenteil, der *ordo* oder *mos geometricus* war und blieb das weithin akzeptierte Paradigma der Wissenschaftlichkeit auch jenseits einer nicht eigentlich geometrisch oder mathematisch bestimmten Thematik. Wenn zu Beginn des 18. Jahrhunderts Christian Wolff – auch er übrigens ein scharfer Kritiker Spinozas, obwohl oder gerade weil er zeitweilig verdächtigt wurde, selber Spinozist zu sein – wenn dieser nachmals so »berühmte Wolff«, wie Kant ihn meist zu nennen pflegt, im Untertitel eines seiner zahlreichen Werke etwas ausdrücklich als *methodo scientifica pertractatum* annoncierte, dann stieß man auf einen Text, der ähnlich gegliedert und eingeteilt war wie Spinozas *Ethik*, ohne daß man dies vom Gegenstand her ebenso hätte erwarten dürfen, wie etwa im Fall von Newtons *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Man kannte Euklid auch im Mittelalter, zumindest dem Namen nach. So trifft Dante ganz am Anfang seiner in der *Göttlichen Komödie* geschilderten Jenseitsreise neben vielen anderen Ungetauften im *limbo* auch auf *»Euclide geomètra«* (Inf. IV.142). Nicht immer konnten frühneuzeitliche Humanisten es indes vermeiden, diesen mit dem Plato-Schüler Euklid von Megara zu verwechseln. Dem letzteren hat auch Pierre Bayle in seinem berühmten *Dictionnaire historique et critique* ([3], 1720, 1123 ff.) einen kürzeren Artikel gewidmet, aber nicht »unserem« Euklid, dem Geometer, über den es am Schluß des Artikels zu Euklid von Megara lediglich heißt: *»Je renvoie au Supplément Euclide le Géometre«*. (Ebd. 1125) Zu diesem *Supplément* ist es nur nie gekommen. Immerhin hat Bayle die beiden Euklide nicht verwechselt.

In welchem Sinn die *Elemente* Euklids als das Grund- und Hauptbuch eines europäischen Konzepts der Wissenschaft und der Wissenschaftlichkeit angesprochen werden können, habe ich durch diese rhapsodisch aufgesammelten ideengeschichtlichen Splitter – das war zumindest meine Absicht – zumindest angedeutet: Der mit viel Glück auf uns gekommene Text der *Elemente* – vergleichbare antike Texte, die es mit einiger Sicherheit gegeben haben dürfte, sind verschollen – wurde zu einem unverzichtbaren Requisit jener europäischen Großerzählung, nach der die Entwicklung der modernen Wissenschaften mit einer Rückbesinnung auf das begonnen habe, was in der Antike an wissenschaftlichem Wissen schon einmal vorhanden gewesen sei. So wurde der *ordo* oder *mos geometricus*, paradigmatisch verwirklicht in den *Elementen*, zum *methodus scientifica* schlechthin – jedenfalls für die Mandarine der Aufklärung. »Hat man je einen Geometer sich ›Euklidisten‹ nennen hören?« so fragte Voltaire ([10], M XXIII 517) in seiner *Éloge* auf die Newton-Übersetzerin Emilie du Chatelet. Das war eine gegen Platonisten, Aristoteliker, Cartesianer und andere Vertreter einer Schule gerichtete Spitze. Um jeden Zweifel auszuschließen, wie diese gemeint war, fügte Voltaire grimmig hinzu: *»c'est le privilège de l'erreur de donner son nom à une secte.«* Gerade weil das vorbildliche Werk Euklids einen direkten Weg zur Wahrheit weist – so darf man Voltaires Aperçu paraphrasieren –, ist es kontraindiziert, die konkrete Person als Autorität zu bemühen.

So weit, so gut. Aber wie wird in den *Elementen* bewiesen und vor allem was wird dort so bewiesen, wie es bewiesen wird? Kann das wirklich das Paradigma für die Präsentationsform eines jeden Wissens sein, das als Wissenschaft soll auftreten können?

Zweifel können einen schon deshalb beschleichen, weil der Einwand der Spinoza-Kritiker, dieser habe die literarische Form der *Elemente* nur äußerlich »nachgeäfft«, in einer Hinsicht nicht von der Hand zu weisen ist. Es fehlt in Spinozas *Ethik* wie auch in den, verschiedenen Branchen der Philosophie gewidmeten, Werken Wolffs, die ebenso arrangiert sind, an der Anschauung, die den Anfängen oder »Prinzipien« der Beweise in den *Elementen* ihre überwältigende Überzeugungskraft verschafft. Es gibt in diesen axiomatisch-deduktiv