

RESEARCH

Matthias C. Lehner

Mathematikaufgaben für Leistungserhebungen im universitären Kontext

Grundlegung und empirische
Untersuchung von
Aufgabenschwierigkeit und
individuellen Lösungsprozessen



Springer Spektrum

Mathematikaufgaben
für Leistungserhebungen
im universitären Kontext

Matthias C. Lehner

Mathematikaufgaben für Leistungserhebungen im universitären Kontext

Grundlegung und empirische
Untersuchung von
Aufgabenschwierigkeit und
individuellen Lösungsprozessen



Springer Spektrum

Matthias C. Lehner
München, Deutschland

Dissertation an der School of Education der Technischen Universität München

Erstgutachter: Prof. Dr. Kristina Reiss
Zweitgutachter: Prof. Dr. Bernd Wollring
Drittgutachter: Prof. Dr. Aiso Heinze

ISBN 978-3-658-24577-1 ISBN 978-3-658-24578-8 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-24578-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.

Ganz besonders bedanke ich mich bei meiner Betreuerin Prof. Dr. Kristina Reiss. Vielen herzlichen Dank für Ihre vielen Anregungen, die bereichernde Kritik, all die guten Ideen und Ihre konstruktive Rückmeldung. Danke für die beständige Unterstützung und die vielfältigen Möglichkeiten zur Weiterentwicklung. Weiter bedanke ich mich bei Prof. Dr. Bernd Wollring, der die Zweitbetreuung übernommen hat, und mich in den letzten Monaten vor der Abgabe dieser Arbeit mit wertvollen Anregungen unterstützt hat. Ferner bedanke ich mich bei meinem Drittprüfer Prof. Dr. Aiso Heinze.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kolleginnen und Kollegen am Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität München. Nicht nur für den fachlichen Austausch und viele wertvolle Anregungen möchte ich mich bedanken. Ganz besonders habe ich den freundschaftlichen Austausch in der Arbeitsgruppe zu schätzen gelernt. Danke für die vielen mitfühlenden Gespräche in einem äußerst positiven Arbeitsumfeld. Danke, dass ihr mich immer wieder für diese Arbeit motiviert habt. Ein besonderer Dank geht an meine Bürokolleginnen Jana und Angelika für den abwechslungsreichen Büroalltag mit unzähligen konstruktiven Diskussionen, das tolle Miteinander und all den Spaß, den wir zusammen hatten.

Der mathematikdidaktischen Arbeitsgruppe der LMU möchte ich für die wertvollen Anregungen im gemeinsamen Oberseminar danken. Ein weiteres Dankeschön gilt Marian Anguela-González, die eine perfekte Ansprechpartnerin für alle organisatorischen Anliegen ist. Ich bedanke mich bei meiner Mentorin Prof. Dr. Christine Sälzer, von deren Erfahrung ich immer wieder profitieren konnte. Herzlichen Dank an Prof. Dr. Gerd Fischer. Lieber Gerd, ohne dich hätte ich vielleicht nie erfahren, wie sehr ich das wissenschaftliche Arbeiten mag. Danke an Dr. Hannes Petermeier und Prof. Dr. Christina Kuttler für die unkomplizierte Zusammenarbeit bei der Erhebung der Daten in den Erstsemestervorlesungen.

Ich bedanke mich bei der Hans Seidel Stiftung für die Förderung meiner Dissertation. Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Hans-Peter Niedermeier, Dr. Rudolf Pfeifenrath und Dr. Andreas Burtscheidt für die hervorragende Betreuung.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Eltern und meinem Bruder Stefan. Vielen Dank für alles – ihr habt stets ein offenes Ohr und seid eine großartige Familie.

Zusammenfassung

Schwierigkeitsgenerierende Merkmale ermöglichen es, die Schwierigkeit von Mathematikaufgaben zur Leistungserhebung vorherzusagen. Für die Primarstufe sowie die Sekundarstufe I wurden schwierigkeitsgenerierende Merkmale wiederholt in der Forschung thematisiert. Aufgrund unterschiedlicher theoretischer Herangehensweisen ist das Gesamtbild der Forschung jedoch heterogen. Da für die Sekundarstufe II und im universitären Kontext in einer spezifischen Aufgabe häufig Inhalte verschiedener Themenbereiche relevant sind, und deswegen keine klaren Hierarchien der Inhalte aufgebaut werden können, ist es für die Sekundarstufe II und im universitären Kontext noch anspruchsvoller, die Schwierigkeit von Mathematikaufgaben zur Erfassung von Leistungen zu beschreiben.

Im theoretischen Teil dieser Forschungsarbeit werden schwierigkeitsgenerierende Merkmale aufgezeigt, die nachweislich das Lesen und Lösen von Mathematikaufgaben beeinflussen. Auf der Grundlage psychologischer Forschung werden weitere Aspekte benannt, die die Schwierigkeit von Mathematikaufgaben beeinflussen können. Daraus wird die Fragestellung abgeleitet, wie sich ein offener bzw. geschlossener Anfangszustand und Zielzustand einer Aufgabe sowie ein hoher bzw. niedriger Bekanntheitsgrad der Mittel auf die Schwierigkeit sowie die individuellen Lösungsprozesse auswirken.

Diese Fragestellung wurde im empirischen Teil dieser Forschungsarbeit mit den Daten aus einer papierbasierten Erhebung an insgesamt 756 Studierenden im ersten Semester untersucht. Es ergab sich dabei, dass ein offener Zielzustand die Schwierigkeit von Aufgaben zur Leistungserfassung tendenziell erhöht, während kein klarer Effekt der Offenheit des Anfangszustandes sowie des Bekanntheitsgrades der Mittel auf die Schwierigkeit einer Aufgabe nachgewiesen wurde. In Hinblick auf die individuellen Lernprozesse zeigte sich zusätzlich, dass einige Studierende zur Verwendung von Routineargumentationen neigen, selbst wenn diese zu komplexeren Lösungsalternativen führen oder die Argumente aufgrund fehlender Informationen eine erfolgreiche Durchführung von Routineargumentationen nicht zulassen. Analysen von Blickbewegungen zeigten ferner, dass die Erfahrung von Schülerinnen und Schülern oder Studierenden mit einem bestimmten Aufgabentyp oder einem konkreten Inhalt den Lösungsprozess beeinflusst. Insbesondere die Notwendigkeit, beim Lösen einer Aufgabe mit verschiedenen Repräsentationsebenen zu arbeiten, konnte als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal identifiziert werden. Damit wurden in dieser Forschungsarbeit schwierigkeitsgenerierende Merkmale für Aufgaben zur Leistungsmessung im universitären Kontext auf der Grundlage psychologischer Forschungsarbeiten spezifiziert.

Abstract

Difficulty generating aspects enable predictions of the difficulty of mathematical tasks for assessment. For primary and lower secondary school levels difficulty generating aspects have been a research topic for several years. Because of different theoretical approaches, research is heterogeneous though. At university level, it is even more challenging to describe the difficulty of mathematical tasks to assess performance of undergraduates, as undergraduates often have to use different contents in a specific task.

In the theoretical part of this research work difficulty generating aspects are described that affect reading and solving mathematical problems. Based on psychological research, further aspects are identified that might influence the difficulty of mathematical tasks for undergraduates. This leads to the research question, how an open or closed initial state and goal state of a task as well as little or well-known means affect the difficulty and the individual solution processes.

This was analysed in the empirical part of this research work with the data of a paper-and-pencil-test of 756 students in their first semester. The results show that an open goal state increases the difficulty of tasks for assessment of mathematical performance. By contrast, no clear effect of an open initial state or little known means on the difficulty of tasks was found. Considering individual solution processes, the results show that some students tend to use routine argumentations. This even holds if routine argumentations cause more complex solutions or if routine arguments fail because of missing information. Additionally, the analysis of eye movements showed that students' experience with a mathematical content or a specific type of task affects the solution process. In particular, the need to work with different representations in a task was identified as a difficulty generating aspect. Thus, in this research difficulty generating aspects in tasks for the assessment of mathematical performance of undergraduates were identified based on psychological research.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Theoretischer Teil	5
1 Mathematische Kompetenz	7
1.1 Kompetenz	9
1.2 Erfassung mathematischer Kompetenz in der Primarstufe	11
1.3 Erfassung mathematischer Kompetenz in der Sekundarstufe	16
1.4 Erfassung mathematischer Kompetenz auf universitärem Niveau	23
1.5 Zusammenfassung	27
2 Lösungsprozess bei mathematikbezogenen Items	29
2.1 Problemlöseschritte nach George Pólya	30
2.2 Modellierungskreislauf	31
2.3 Prozesse beim Lesen von Aufgaben (Erstellen des Situationsmodells)	36
2.4 Zusammenfassung	39
3 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale	41
3.1 Grundvorstellungintensität	43
3.2 Dekomprimierung von Aufgaben	45
3.3 Komplexität des Modellierungsprozesses	46
3.4 Komplexität von Denkprozessen	48
3.5 Grundvorstellungen, Modellierung und Denkprozesse	50
3.6 Kompetenzbasierte Schwierigkeitseinschätzung	51
3.7 Vergleichsarbeiten in Berlin	53
3.8 Zusammenfassung	54
4 Psychologische Grundlagen	57
4.1 Grundlagen der Problemforschung	58
4.2 Kategorisierung von Problemen	61
4.3 Cognitive Load Theory	64
4.4 Strukturen im Langzeitgedächtnis	68
4.4.1 Concept Image	72
4.4.2 Repäsentationsformen	74
4.4.3 Fehlvorstellungen	77

4.4.4	Routineargumentationen	78
4.5	Zusammenfassung	81
5	Zusammenfassung und Desiderate	83
II Empirischer Teil		87
6	Methodische Grundlagen	89
6.1	Parameterschätzung mit dem Rasch-Modell	89
6.2	Analyse von Blickbewegungen	98
7	Analysen zur Schwierigkeit von Mathematikaufgaben	101
7.1	Ziele und Fragestellungen	101
7.2	Studie 1: Komplexität von Mathematikaufgaben im universitären Kontext	103
7.2.1	Vorstellung der Instrumente	104
7.2.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	106
7.2.3	Auswertungsmethoden	106
7.2.4	Ergebnisse	106
7.2.5	Diskussion	107
7.3	Studie 2: Variation von Anfangszustand und Zielzustand	108
7.3.1	Vorstellung der Instrumente	108
7.3.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	113
7.3.3	Auswertungsmethoden	114
7.3.4	Ergebnisse	115
7.3.5	Diskussion	120
7.4	Studie 3: Variation von Anfangszustand und Bekanntheit der Mittel	122
7.4.1	Vorstellung der Instrumente	123
7.4.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	126
7.4.3	Auswertungsmethode	127
7.4.4	Ergebnisse	128
7.4.5	Diskussion	132
7.5	Zusammenfassung	134
8	Analysen zu individuellen Lösungsprozessen	135
8.1	Ziele und Fragestellungen	136
8.2	Studie 4: Untersuchung der Lösungswege	138
8.2.1	Methode	138
8.2.2	Ergebnisse	139
8.2.3	Diskussion	146
8.3	Studie 5: Auswertung von Notizen beim Lösen von Aufgaben	148
8.3.1	Methode	149
8.3.2	Ergebnisse	149
8.3.3	Diskussion	150

8.4	Studie 6: Auswertung von Blickbewegungen beim Lösen von Aufgaben I	151
8.4.1	Vorstellung der Instrumente	151
8.4.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	153
8.4.3	Auswertungsmethoden	153
8.4.4	Ergebnisse	154
8.4.5	Diskussion	156
8.5	Studie 7: Auswertung von Blickbewegungen beim Lösen von Aufgaben II	157
8.5.1	Vorstellung der Instrumente	158
8.5.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	158
8.5.3	Auswertungsmethoden	159
8.5.4	Ergebnisse	160
8.5.5	Diskussion	163
8.6	Studie 8: Auswertung von Blickbewegungen beim Lösen von Aufgaben III	165
8.6.1	Vorstellung der Instrumente	166
8.6.2	Stichprobe und Erhebungsdesign	166
8.6.3	Auswertungsmethoden	167
8.6.4	Ergebnisse	167
8.6.5	Diskussion	171
8.7	Zusammenfassung	172
9	Diskussion und Ausblick	175
9.1	Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse	176
9.2	Ausblick und Implikationen	180
	Literaturverzeichnis	183
A	Testhefte	203
B	Codierschema	213

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der Festlegung von Kompetenzstufen (nach Pant, Böhme, Stanat, Schipolowski & Köller, 2017)	11
1.2	Kompetenzbereiche im Fach Mathematik für die Primarstufe nach den Bildungsstandards (nach Winkelmann & Robitsch, 2009)	12
1.3	Kompetenzstufenmodell aus dem IQB-Ländervergleich und illustrierende Aufgaben im Fach Mathematik für die Primarstufe (Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller, 2017)	15
1.4	Kompetenzbereiche im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss nach den Bildungsstandards Kultusministerkonferenz, 2003; Darstellung adaptiert nach Winkelmann und Robitsch, 2009)	17
1.5	Kompetenzstufenmodell aus dem IQB-Ländervergleich und illustrierende Aufgaben im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss (aus Blum, Roppelt & Müller, 2013)	20
1.6	Kompetenzstufen aus TIMSS/III und illustrierende Aufgaben im Fach Mathematik für den voruniversitären Mathematiktest (aus Klieme, 2000)	25
2.1	Modellierungskreislauf aus der Rahmenkonzeption von PISA (OECD, 2013a; Sälzer, Reiss, Schiepe-Tiska, Prenzel & Heinze, 2013)	33
2.2	Modellierungskreislauf in der Darstellung von Blum und Leiss (2005)	33
3.1	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Grundvorstellungsintensität (Blum, vom Hofe, Jordan & Kleine, 2004)	44
3.2	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Dekomprimierung von Aufgaben (Ostermann, Leuders & Nückles, 2015)	45
3.3	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Komplexität der Modellierung (M. Neubrand, Klieme, Lüdtke & Neubrand, 2002)	47
3.4	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Komplexität von Denkprozessen (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004)	49
3.5	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Grundvorstellungsintensität, zur Modellierung und zur Komplexität von Denkprozessen (N. Sommer, 2005)	50
3.6	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur kompetenzbasierten Schwierigkeitseinschätzung (Turner, Dossey, Blum & Niss, 2013)	52
3.7	Schwierigkeitsgenerierende Aufgabenmerkmale im Modell zur Erklärung der Schwierigkeiten in den Vergleichsarbeiten in Berlin (Levin, 2009)	53

4.1	Charakterisierung von Aufgabenstellungen (aus Frensch & Funke, 1995, S.22) . . .	59
4.2	Modell einer komplexen Problemsituation (Frensch & Funke, 1995, S. 22)	60
4.3	Klassifikation von Problemen mittels der Offenheit des Zielzustandes und dem Bekanntheitsgrad der Mittel nach Doerner (1987)	63
4.4	Klassifikation von Problemen mittels der Offenheit von Anfangszustand und Zielzustand nach Pehkonen (1997)	63
4.5	Klassifikation von Problemen	64
4.6	Hypothetische Struktur eines Netzwerks von Gedächtnisinhalten. Adaptiert nach Collins und Quillian (1969) und T. Gruber (2011).	70
4.7	Hypothetische Struktur eines Netzwerks mathematischer Gedächtnisinhalte 71	
4.8	Verschiedene Repräsentationen einer Funktion	75
6.1	Graph einer logistischen Funktion	92
6.2	Beispiel für eine Item Characteristic Curve	93
6.3	Beispiel für Item Characteristic Curves mehrerer Items unterschiedlicher Schwierigkeit	94
6.4	Beispiel für einen graphischen Modelltest	97
7.1	Beispielaufgaben aus dem Themenbereich Ableiten von Funktionen	110
7.2	Klassifikation von Problemen mittels Offenheit von Anfangszustand und Zielzustand nach Pehkonen (1997)	111
7.3	Variationen von Aufgabe 4 in Studie 2	112
7.4	Graphischer Modelltest für Studie 2	116
7.5	Item Characteristic Curves für die Aufgaben in Studie 2	117
7.6	Klassifikation von Problemen mittels der Offenheit des Anfangszustandes und dem Bekanntheitsgrad der Mittel	124
7.7	Variationen von Aufgabe 4 in Studie 3	125
7.8	Graphischer Modelltest für Studie 3	129
7.9	Item Characteristic Curves für die Aufgaben in Studie 3	130
8.1	Relative Häufigkeit syntaktischer und semantischer Antworten in den Testheften aus Studie 2	140
8.2	Relative Häufigkeit syntaktischer und semantischer Antworten in den Testheften aus Studie 3	144
8.3	Zwei Beispielitems aus Studie 6	152
8.4	Visualisierung der Blickbewegungen zweier Studierender in einer <i>Heat Map</i> . . .	155
8.5	<i>Sequence Charts</i> zur Visualisierung der Blickbewegungen an den Items aus Studie 8 (Teil 1)	169
8.6	<i>Sequence Charts</i> zur Visualisierung der Blickbewegungen an den Items aus Studie 8 (Teil 2)	170

Tabellenverzeichnis

2.1 Erläuterung des Modellierungskreislaufes anhand der Beispielaufgabe <i>Climbing Mount Fuji</i> (orientiert an Leiss, Schukajlow, Blum, Messner & Pekrun, 2010).	35
3.1 Zusammenfassung der in Kapitel 3 beschriebenen Schwierigkeitsmodelle	54
6.1 Datenmatrix eines Tests mit drei Items, an dem zwei Personen teilgenommen haben	90
6.2 Datenmatrix eines Tests mit m Items, an dem n Personen teilgenommen haben	91
7.1 Bewertungsschema für die Einschätzung der Komplexität in Studie 1 (basierend auf Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer, 2004)	105
7.2 Einschätzung der Komplexität der Aufgaben von Studie 1	107
7.3 Zusammensetzung der Stichprobe von Studie 2	113
7.4 Itemschwierigkeitsparameter der vier Varianten der neun Aufgaben aus Studie 2	119
7.5 Vergleich der Itemschwierigkeitsparameter aus Studie 2 mit einer zweifaktoriellen Varianzanalyse	120
7.6 Zusammensetzung der Stichprobe von Studie 3	127
7.7 Itemschwierigkeitsparameter der vier Varianten der neun Aufgaben in Studie 3	131
7.8 Vergleich der Itemschwierigkeitsparameter aus Studie 3 mit einer zweifaktoriellen Varianzanalyse	132
8.1 Ergebnisse des exakten Tests nach Fisher zur Signifikanzprüfung des Unterschieds verschiedener Lösungsalternativen in den Daten aus Studie 2	142
8.2 Ergebnisse des exakten Tests nach Fisher zur Signifikanzprüfung des Unterschieds verschiedener Lösungsalternativen in den Daten aus Studie 3	145
8.3 Relative Häufigkeit der Aufgabenbearbeitungen mit zusätzlichen Aufzeichnungen in den Testbögen von Studie 2	150
8.4 Mittelwerte und Standardabweichungen für die Fixationszeiten auf Graph, Ableitungsterm und Funktionsterm in Aufgaben mit geschlossenem und offenem Anfangszustand in Studie 6	155
8.5 Mittelwerte und Standardabweichungen für die Anzahl der Fixationen auf Graph, Ableitungsterm und Funktionsterm in Aufgaben mit geschlossenem und offenem Anfangszustand in Studie 6	156
8.6 Mittelwerte und Standardabweichungen für die Bearbeitungszeit sowie für die Fixationszeiten auf Graph, Ableitungsterm und Funktionsterm in Aufgaben mit geschlossenem und offenem Anfangszustand in Studie 7	161

8.7 Mittelwerte und Standardabweichungen für die Bearbeitungszeit sowie für die Fixationszeiten auf Ableitungsterm, Graph und Funktionsterm sowie dem Antwortfeld in Aufgaben mit geschlossenem und offenem Anfangszustand in Studie 8 . . .	168
8.8 Mittelwerte und Standardabweichungen für die Revisits auf Ableitungsterm, Graph und Funktionsterm in Aufgaben mit geschlossenem und offenem Anfangszustand in Studie 8	171



Einleitung

Für viele Studienanfängerinnen und Studienanfänger ist der Übergang von der Schule an die Hochschule eine Herausforderung. Insbesondere im Fach Mathematik beklagen Studierende und Lehrende Schwierigkeiten in den ersten Wochen des Studiums. Erhebungen des Deutschen Zentrums für Hochschul- und Wissenschaftsforschung verdeutlichen zudem, dass vor allem in den Bachelorstudiengängen in der Fächergruppe Mathematik/Naturwissenschaften sowie in den Ingenieurwissenschaften die Studienabbruchquoten hoch sind (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2014). Zum Beispiel erreichten von den Studienanfängerinnen und Studienanfängern des Jahrgangs 2008/2009 an Universitäten in der Fächergruppe Mathematik/Naturwissenschaften 39 % keinen Abschluss, in den Ingenieurwissenschaften 36 %, während über alle Fächergruppen hinweg nur 33 % der Studienanfängerinnen und Studienanfänger keinen Abschluss erreichten (Heublein u. a., 2014). Die Gründe für diese hohen Studienabbruchquoten sind vielfältig, doch werden von Exmatrikulierten am häufigsten Leistungsprobleme als Ursache für den Studienabbruch benannt (Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer & Besuch, 2010).

Um Studierenden den Einstieg in ihr Mathematikstudium zu erleichtern und sie an die Hochschulmathematik heranzuführen, wurden an einigen Hochschulen Unterstützungsmaßnahmen etabliert und Curricula überarbeitet (Bausch u. a., 2014). Beispielsweise wurde in Kooperation der Lehrstühle für Mathematikdidaktik an der Ludwig-Maximilians-Universität (LMU) und der Technischen Universität München (TUM) ein Brückenkurskonzept entwickelt, das einen Schwerpunkt auf die Einführung und die Vermittlung von Lernstrategien legt, die für die Begriffsbildung der akademischen Mathematik geeignet sind (Reichersdorfer, Ufer, Lindmeier & Reiss, 2014). Zusätzlich wird mit dem Kurs eine Einführung in die authentischen Arbeitsweisen der Mathematik angestrebt. Die Ergebnisse der Evaluation zeigen, dass der Brückenkurs den Studieneinstieg erleichtert und begründet den Schwierigkeiten entgegenwirken kann, die durch Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik bedingt sind (Reichersdorfer u. a., 2014).

Um Unterstützungsangebote für Studienanfängerinnen und Studienanfänger oder Curricula weiterzuentwickeln oder zu evaluieren, ist es notwendig, mathematikbezogene Kompetenzen und Mathematikleistungen von Studierenden zu erfassen. Beispielsweise kann eine empirische Untersuchung des Vorwissens von Studienanfängerinnen und Studienanfängern dabei helfen, Unterstützungsmaßnahmen oder Curricula für das erste Studienjahr anzupassen.

Die empirische Forschung zur Erfassung von mathematikbezogenen Kompetenzen konzentriert sich überwiegend auf die Primarstufe sowie die Sekundarstufen. Vor allem im Rahmen nationaler und internationaler Schulleistungstudien wurden theoretisch fundierte und empirisch abgesicherte Kompetenzmodelle entwickelt. Hingegen ist die Ausbildung auf universi-

tärem Niveau in der empirischen Forschung unterrepräsentiert (Zlatkin-Troitschanskaia, Shavelson & Kuhn, 2015).

Eine besondere Herausforderung bei der Erfassung mathematikbezogener Kompetenzen im universitärem Kontext besteht darin, dass in vielen Aufgaben auf universitärem Niveau Wissen aus verschiedenen Bereichen einbezogen werden muss. Das führt dazu, dass für die mathematischen Inhalte auf Universitätsniveau keine klaren Hierarchien aufgebaut werden können.

Unabhängig vom konkreten mathematischen Inhalt einer Aufgabe findet man eine Reihe von Kriterien, mit denen Aufgaben beschrieben werden können. Beispielsweise werden in der psychologischen Forschung die Offenheit des Anfangszustandes und des Zielzustandes eines Problems zu dessen Charakterisierung verwendet. Zur Beschreibung von Unterricht wurden darüber hinaus verschiedene Aufgabenklassifikationsschemata entwickelt, mit denen Aufgaben charakterisiert werden können. Jedoch ist unklar, welche Merkmale einer Aufgabe neben ihrem mathematischen Inhalt zu ihrer Schwierigkeit beitragen oder den Lösungsprozess beeinflussen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, den Einfluss von beobachtbaren Aufgabenmerkmalen auf die Schwierigkeit von Mathematikaufgaben im universitären Kontext sowie auf den individuellen Lösungsprozess dieser Aufgaben zu untersuchen.

Im theoretischen Teil dieser Forschungsarbeit wird dazu der derzeitige Stand der Forschung berichtet. Ausgangspunkt dafür ist die Messung von mathematikbezogener Kompetenz. Dabei wird in Kapitel 1 herausgearbeitet, dass bislang kaum Forschung zur Untersuchung mathematischer Kompetenz im universitären Kontext vorliegt. Das liegt unter anderem daran, dass für die mathematischen Inhalte der Sekundarstufe II sowie auf Universitätsniveau keine klaren Hierarchien aufgebaut werden können. Ausgehend davon wird hinterfragt, welche Aspekte neben dem Inhalt zur Schwierigkeit mathematikbezogener Aufgaben beitragen können. Es zeigt sich in Kapitel 2, dass Schwierigkeiten sowohl beim Lesen und Verstehen von Mathematikaufgaben als auch bei der weiteren Verarbeitung der Aufgabenstellung auftreten können. In den Kapiteln 2 und 3 werden beide Aspekte weiter ausdifferenziert und dabei Forschungsarbeiten zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen vorgestellt. Ergänzend werden in Kapitel 4 psychologische Aspekte vorgestellt, die ebenfalls zur Schwierigkeit von Aufgaben beitragen können. Insbesondere werden dabei die Offenheit des Anfangs- und Zielzustand einer Aufgabe sowie die Bekanntheit der Mittel, die zur Lösung einer Aufgabe verwendet werden können, als Charakteristika zur Beschreibung von Aufgaben vorgestellt. Darüber hinaus ist zentral, dass sich neben den Charakteristika einer Aufgabe die individuellen Voraussetzungen auf das Lösen einer Aufgabe auswirken können. Aus dem theoretischen Teil dieser Forschungsarbeit wird in Kapitel 5 die Forschungsfrage abgeleitet, wie ein offener bzw. geschlossener Anfangs- und Zielzustand sowie eine niedriger bzw. hoher Bekanntheitsgrad der Mittel die Schwierigkeit von Aufgaben sowie den individuellen Lösungsprozess beeinflussen.

Ziel des empirischen Teils dieser Arbeit ist es, diese Forschungsfrage zu klären. Dazu werden in Kapitel 6 zunächst die methodischen Grundlagen vorgestellt. In Kapitel 7 wird der Einfluss der Aufgabenmerkmale auf die Schwierigkeit der Aufgaben mit drei Studien untersucht. Kapitel 8 fokussiert auf der Analyse von Einflüssen der Aufgabenmerkmale auf die individuellen

Lösungsprozesse. Abschließend werden in Kapitel 9 die Ergebnisse diskutiert und dabei Implikationen für die weitere Forschung und die Lehre an Hochschulen abgeleitet.

Teil I

Theoretischer Teil



1 Mathematische Kompetenz

Zusammenfassung. Kompetenzen sind nach Franz E. Weinert kognitive Fähigkeiten sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften, diese Fähigkeiten zu nutzen. Der Erfassung mathematischer Kompetenzen liegen theoretisch gesicherte und empirisch bestätigte Kompetenzstufenmodelle zugrunde, die durch eine konkrete Beschreibung von Anforderungssituationen eine Graduierung mathematischer Kompetenz ermöglichen. Während Kompetenzstufenmodelle für die Primarstufe sowie die Sekundarstufen im Rahmen der nationalen und internationalen Bildungsvergleichsstudien erarbeitet wurden, gibt es bislang kaum Literatur zur mathematischen Kompetenz auf universitärem Niveau.

Die Ergebnisse von TIMSS (Baumert u. a., 1997) und PISA (Baumert u. a., 2001; Baumert u. a., 2002) lösten in Deutschland verstärkte Diskussionen über den Zustand und die Entwicklungsperspektiven des Bildungssystems aus (Klieme u. a., 2007). In den Studien wurden Defizite von Schülerinnen und Schülern in Deutschland gegenüber Gleichaltrigen in anderen Nationen offengelegt, was zu Initiativen und Reformen in der Bildungspolitik führte (vgl. Klieme u. a., 2007).

Im Zuge dieser Reformen fand ein Paradigmenwechsel mit weitreichenden Folgen statt. Vor den Reformen wurde das Bildungssystem in der Bundesrepublik ausschließlich durch den *Input* gesteuert, etwa durch Lehrpläne, Rahmenrichtlinien, Ausbildungsbestimmungen für Lehrpersonen oder Prüfungsbestimmungen (Klieme u. a., 2007). Die Reformen, die durch die Konstanzer Beschlüsse vom 24. Oktober 1997 eingeleitet wurden, betonten zunehmend die „Entwicklung grundlegender Kompetenzen [...], die die Schülerinnen und Schüler zu einer gleichberechtigten Teilhabe am gesellschaftlichen, wirtschaftlichen, kulturellen und politischen Leben befähigen“ (Kultusministerkonferenz, 1997). Dadurch orientiert sich das Bildungssystem immer mehr am *Output*, das heißt an den Leistungen der Schule und vor allem an den Lernergebnissen der Schülerinnen und Schüler.

Die Outputorientierung des Unterrichts ist auch leitender Gedanke der Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring, die seit 2006 den in den Konstanzer Beschlüssen eingeschlagenen Weg konsequent fortsetzt (Kultusministerkonferenz, 2006, 2016a). Mit den Beschlüssen in der Gesamtstrategie zum Bildungsmonitoring soll dazu beigetragen werden, (Kultusministerkonferenz, 2016a)

- für Transparenz hinsichtlich zentraler Maßstäbe zur Bestimmung von Bildungsqualität zu sorgen,
- wissenschaftlich abgesicherte Ergebnisse zur Bildungsqualität für Schulen, Bildungswelt, Bildungspolitik und Öffentlichkeit bereitzustellen,

- die Qualitäts- und Standardsicherung auf allen Ebenen möglichst eng mit der Qualitätsentwicklung zu verbinden,
- eine Grundlage für die länderübergreifende Zusammenarbeit im Bereich der Qualitätssicherung zu schaffen.

Im Zentrum der Gesamtstrategie steht also eine Erfassung der Bildungswirklichkeit in Deutschland. Vor allem soll dabei im Sinne eines Benchmarking auf Stärken und Schwächen des Bildungssystems aufmerksam gemacht werden (Obersteiner & Reiss, 2014) und das so gewonnene Beschreibungswissen für die Unterrichts- und Schulentwicklung genutzt werden (Drücke-
Noe, 2015; Kultusministerkonferenz, 2016a). Um diesen Ansprüche gerecht zu werden, sieht die Gesamtstrategie vier Säulen vor (aus Kultusministerkonferenz, 2016a):

1. *Teilnahme an internationalen Schulleistungsstudien.* Um regelmäßig die Leistungsfähigkeit des deutschen Schulsystems im internationalen Vergleich festzustellen und aus den Ergebnissen geeignete Maßnahmen abzuleiten, nimmt Deutschland weiterhin an internationalen Vergleichsstudien teil (PIRLS/IGLU, TIMSS-Grundschule, PISA).
2. *Überprüfung und Umsetzung von Bildungsstandards.* Für die Primarstufe wurden in den Fächern Mathematik und Deutsch abschlussbezogene Standards erarbeitet, für den Hauptschulabschluss für die Fächer Deutsch und Mathematik sowie die erste Fremdsprache, für den Mittleren Schulabschluss für die Fächer Deutsch und Mathematik, die erste Fremdsprache sowie Chemie und Physik, für die Allgemeine Hochschulreife für die Fächer Deutsch und Mathematik sowie die fortgeführte Fremdsprache. Das Erreichen der Bildungsstandards wird regelmäßig durch die IQB-Ländervergleichsstudien überprüft.
3. *Verfahren zur Qualitätssicherung auf Ebene der Schulen.* Zusätzlich zu den internationalen und nationalen Leistungsstandserhebungen werden länderübergreifende und länderspezifische Tests durchgeführt. Diese Vergleichsarbeiten dienen der landesweiten, jahrgangsbezogenen Untersuchung der Leistungen der einzelnen Schulen und Klassen in ausgewählten Domänen zum Zwecke der Unterrichts- und Schulentwicklung. Die Vergleichsarbeiten (VERA) werden in der Primarstufe und in der Sekundarstufe I durchgeführt. Sie sollen vor allem die Entwicklung von Schule und Unterricht an jeder einzelnen Schule durch eine die Rückmeldung unterstützen, die an den Bildungsstandards orientiert ist.
4. *Gemeinsame Bildungsberichterstattung von Bund und Ländern.* Die datengestützte Bilanzierung von Rahmenbedingungen, Verlaufsmerkmalen sowie Ergebnissen und Erträgen von Bildungsprozessen dient als wichtige Grundlage für bildungspolitische Entscheidungen und sorgt für Transparenz.

Die Säulen 1 bis 3 der Gesamtstrategie verankern die regelmäßige Durchführung von internationalen und nationalen Vergleichsstudien in Deutschland. Da die Studien unterschiedliche Schwerpunktsetzungen haben, sind die Erhebungen nicht redundant. Gemeinsam ist ihnen hingegen, dass sie *Kompetenzen* messen. Als Grundlage für weitere Beschreibungen

der Bildungsvergleichsstudien wird im folgenden Abschnitt daher zunächst der Kompetenzbegriff erklärt. Davon ausgehend werden in den Abschnitten 1.2 und 1.3 Kompetenzstufenmodelle für die Mathematik in der Primar- und Sekundarstufe vorgestellt. Während es für diese beiden Stufen empirisch fundierte Kompetenzstufenmodelle für die Mathematik gibt, liegen zur mathematischen Kompetenz auf universitärem Niveau deutlich weniger Forschungsarbeiten vor. Dies wird in Abschnitt 1.4 thematisiert.

1.1 Kompetenz

Kompetenzorientierter Unterricht hat seit Beginn des Jahrtausends immer mehr Bedeutung gewonnen. Der Begriff *Kompetenz* wird im alltäglichen Sprachgebrauch in vielerlei Hinsicht verwendet, doch herrscht in der psychologischen, pädagogischen und fachdidaktischen Forschung ein breiter Konsens, der sich auf die Kennzeichnung von Weinert (2001) bezieht.

Dabei versteht man unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können (Weinert, 2001, S. 27 f).

Diese Definition des Kompetenzbegriffs enthält also zwei wesentliche Aspekte. Einerseits werden die kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten benannt. Hierbei unterscheidet Weinert (2001) fachliche Kompetenzen (z. B. mathematischer Art) und fachübergreifende Kompetenzen (z. B. Problemlösen). Diese kognitiven Leistungsdispositionen umfassen Kenntnisse, Fertigkeiten, Strategien, Routinen oder auch bereichsspezifische Fähigkeiten (Klieme, 2004). Andererseits beschreibt die Definition von Weinert (2001) Kompetenz im Sinne von motivationalen, volitionalen und sozialen Orientierungen. Sie sind Voraussetzung für die Bewältigung anspruchsvoller Aufgaben. Man spricht insgesamt von Handlungskompetenzen, die „neben kognitiven auch soziale, motivationale, volitionale und oft moralische Kompetenzen erhalten und es erlauben, erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten in sehr unterschiedlichen Lebenssituationen erfolgreich, aber auch verantwortlich zu nutzen.“ (Weinert, 2001, S. 28).

In der ebenfalls einflussreichen Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards (Klieme u. a., 2007) wird der Kompetenzbegriff von Weinert (2001) übernommen und noch weiter spezifiziert. Klieme u. a. (2007) betonen, dass nach diesem Verständnis Kompetenz eine Disposition ist, die Personen befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen, und damit konkrete Anforderungssituationen zu bewältigen.

Kompetenzen haben im Sinne dieser Definition den Charakter psychologischer Konstrukte, die mit Hilfe von Messinstrumenten operationalisiert werden können (Köller, 2008). In diesem Zusammenhang finden sich in der Expertise von Klieme u. a. (2007) zwei wichtige Konsequenzen aus der Auffassung von Kompetenz im Sinne von Weinert (2001):

- Die Erfassung von Kompetenzen ist nur leistungsbezogen möglich. Da Kompetenz die Befähigung zum Bewältigen von Situationen beschreibt, muss sich jede Operationali-

sierung von Kompetenz auf konkrete Anforderungssituationen beziehen (Klieme u. a., 2007).

- Für die Messung von Kompetenzen sind Einzelleistungen nicht ausreichend, da der Bereich von Anforderungssituationen, in denen eine bestimmte Kompetenz notwendig ist, ein breiteres Leistungsspektrum umfasst. Das bedeutet auch, dass die Erfassung von Kompetenz einen breiten Begriff von Aufgaben und Tests erfordert, der nicht mit Wissensabfragen allein abgedeckt werden kann (Klieme u. a., 2007).

Die Erfassung von Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern erfolgt vor allem im Rahmen der großen Schulleistungsstudien. Sie haben das vorrangige Ziel, zu einem vorgegebenen Zeitpunkt im Bildungsverlauf bilanzierende Aussagen über das Spektrum und die Verteilung von Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern zu treffen (z. B. Pant, Böhme & Köller, 2013). Dazu ist es erforderlich, theoretisch ausgearbeitete *Kompetenzstufenmodelle* zu verwenden, die für eine Kompetenz Graduierungen der gemessenen Fähigkeiten in Kompetenzstufen erlauben (z. B. Pant, Böhme & Köller, 2012). Sie basieren einerseits auf fachdidaktischen und psychologischen Aussagen und damit auf einer fachlichen und fachdidaktischen Basis (Klieme & Leutner, 2006; Reiss & Winkelmann, 2009). Sie müssen andererseits empirisch überprüfbar sein (Klieme & Leutner, 2006; Granzer, 2009). Damit basieren Kompetenzstufenmodelle sowohl auf normativen (theoretischen) Vorgaben, als auch auf empirisch gesicherten Erkenntnissen (vgl. Reiss, 2009; Ufer, Reiss & Heinze, 2009).

Die Spezifizierung von Kompetenzstufen kann in verschiedenen Domänen sehr unterschiedlich ausfallen (Klieme u. a., 2007). Dabei ist der zentrale Gedanke, dass die Kompetenz einer Person über Aufgaben (und die Lösungen dieser Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler) beschrieben werden kann, denen ein Schwierigkeitsgrad zugeordnet werden kann (Klieme u. a., 2007). Diese Grundidee der Beschreibung von Kompetenzstufen wird meist mit Analysen verbunden, die auf dem Rasch-Modell basieren (vgl. dazu Abschnitt 6.1). Dieses Modell ermöglicht es, die Fähigkeit von Personen und die Schwierigkeit von Aufgaben auf einer gemeinsamen Skala zu beschreiben (Bond & Fox, 2007; Sälzer, 2016). Das hat den Vorteil, dass ein Item, dem ein bestimmter Schwierigkeitswert zugeordnet wird, im Hinblick darauf analysiert werden kann, welche kognitiven Operationen zu dessen Lösung erforderlich sind (z. B. Pant, Böhme, Stanat, Schipolowski & Köller, 2017). Dies ermöglicht im nächsten Schritt den Rückschluss, dass Schülerinnen und Schüler, die mindestens den Skalenwert erreichen, der einem Item zugeordnet wurde, die zur Lösung dieses Items erforderlichen Operationen beherrschen (z. B. Pant u. a., 2017). Jede Kompetenzstufe wird also durch kognitive Prozesse und Handlungen von bestimmter Qualität charakterisiert, die Schülerinnen und Schüler auf der jeweiligen Stufe bewältigen können, nicht aber Schülerinnen und Schüler auf niedrigeren Kompetenzstufen (Klieme u. a., 2007). Um schließlich Kompetenzstufen zu beschreiben, wird die gemeinsame Skala für die Fähigkeit von Personen und die Schwierigkeit von Aufgaben wie in Abbildung 1.1 dargestellt in Abschnitte unterteilt (z. B. Hartig, 2007; Pant u. a., 2012; Pant u. a., 2017). Für diese Festlegung der Kompetenzstufen erscheint es zudem von großer Bedeutung, treffende Stufenbezeichnungen und -beschreibungen anzugeben, sodass nachvollziehbar wird, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler auf den jeweiligen Stufen verfügen (Köller & Reiss, 2013).

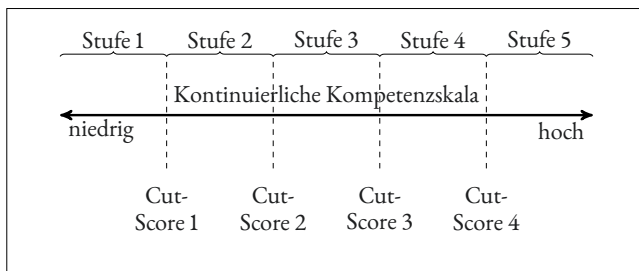


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Festlegung von Kompetenzstufen (nach Pant, Böhme, Stanat, Schipolowski & Köller, 2017)

Im Zuge der internationalen und nationalen Schulleistungsstudien wurden in den letzten Jahrzehnten verschiedene Kompetenzstufenmodelle erarbeitet. Exemplarisch werden in den folgenden beiden Abschnitten 1.2 und 1.3 das Kompetenzstufenmodell für den Primarbereich aus dem IQB-Ländervergleich sowie die Kompetenzstufenmodelle für die Sekundarstufe I aus dem IQB-Ländervergleich und aus der PISA-Studie vorgestellt.

1.2 Erfassung mathematischer Kompetenz in der Primarstufe

Die Ausbildung von Schülerinnen und Schülern in der Primarstufe ist die Grundlage für weiterführendes Lernen in der Sekundarstufe und darüber hinaus (Kultusministerkonferenz, 2004). In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurden 2004 mathematische Kompetenzen festgelegt, die die fachspezifischen Anforderungen im Primarbereich kennzeichnen und von Kindern am Ende ihrer Grundschulzeit beherrscht werden sollen (Kultusministerkonferenz, 2004). Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, diese Kompetenzen in außer- und innermathematischen Kontexten einzusetzen. Die Standards wurden nach dem Vorbild der Standards des *National Council of Teachers of Mathematics* aus den USA entwickelt (NCTM, 2000; Klieme u. a., 2007) und werden als unverzichtbarer Bestandteil grundlegender Bildung in der Grundschule angesehen (Kultusministerkonferenz, 2004).

In den Bildungsstandards werden zunächst *allgemeine mathematische Kompetenzen* ausgewiesen, die sich in der täglichen Auseinandersetzung mit Mathematik zeigen (Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren, Darstellen). Für den Unterricht sind sie wichtig, da diese Kompetenzen in der Auseinandersetzung mit täglichen Situationen erworben werden (Kultusministerkonferenz, 2004). Später wurde die Kompetenz (prozessbezogene) Grundfertigkeiten ergänzt (Winkelmann & Robitsch, 2009). Zusätzlich werden fünf *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen* beschrieben (Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen, Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit). Sie orientieren sich an mathematischen Leitideen, die für die Primarstufe ebenso wie für das weiterführende Lernen von fundamentaler Bedeutung sind (Kultusministerkonferenz,