Andreas Helfrich-Schkarbanenko
Kevin Rapedius
Vita Rutka
Aron Sommer

Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren

Effizientes Lehren und Lernen mit MATLAB

EBOOK INSIDE

Springer Spektrum

Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren

Andreas Helfrich-Schkarbanenko · Kevin Rapedius
Vita Rutka · Aron Sommer

Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren

Effizientes Lehren und Lernen mit MATLAB

Springer Spektrum

Andreas Helfrich-Schkarbanenko
Fakultät Grundlagen
Mathematisches Institut
Hochschule Esslingen
Esslingen, Deutschland

Kevin Rapedius
MINT-Kolleg Baden-Württemberg
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Karlsruhe, Deutschland

Vita Rutka
MINT-Kolleg Baden-Württemberg
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Karlsruhe, Deutschland

Aron Sommer
Institut für Informationsverarbeitung
Leibniz Universität Hannover
Hannover, Deutschland

ISBN 978-3-662-57777-6 ISBN 978-3-662-57778-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57778-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

„Ach“, sagte Aschenputtel und seufzte dabei: „Dafür brauche ich bis Mitternacht.“
„Sollen wir dir helfen, die Linsen zu lesen? “
„Ja, gern, liebe Täubchen!“

Aus dem Märchen „Aschenputtel“ (1812), Brüder Grimm, deutsche Sprachwissenschaftler

Märchen schreibt die Zeit,
immer wieder wahr.

Aus dem Disney-Musical „Die Schöne und das Biest“, Songtext von Alan Menken

Die Entstehung von MATEX

Angetrieben von der Idee, im universitären Arbeitsalltag zeitliche Freiräume zu schaffen, begannen die Autoren Anfang 2016 regelmäßig wiederkehrende Arbeitsabläufe zu automatisieren. Sie hatten es auf das Erstellen von Übungsblättern inklusive Lösungsvorschlägen und Abbildungen zu typischen Rechenaufgaben der Ingenieurmathematik abgesehen. Sehr schnell zeigte sich, dass man hierzu auf die gebräuchlichen, zur Verfügung stehenden Software-Pakete MATLAB und LaTeX zurückgreifen konnte. Insbesondere erwies sich die Symbolic Math Toolbox von MATLAB bei der schrittweisen algebraisch-analytischen Lösung nichttrivialer Aufgaben als sehr nützliches Hilfsmittel. Symbolisches Rechnen ist nichts Neues. Schon vor 30 Jahren war das Rechnen mit symbolischen Variablen beispielsweise mit dem Computeralgebrasystem Maple möglich. Auch lassen sich seit vielen Jahren die in einem MATLAB- oder Maple-Worksheet erzeugten symbolischen Rechnungen mithilfe der eingebauten Exportfunktionen auf einfache Weise in LaTeX-Code überführen. Neu ist jedoch die Idee, Funktionalitäten von MATLAB, der Symbolic Math Toolbox und von LaTeX zu kombinieren, um eine Vielzahl von unterschiedlichen Übungsaufgaben und deren Lösungsvorschläge automatisch in Form eines PDFs erstellen zu lassen. Damit konnte ein großer Teil der bisher manuell durchgeführten Editierarbeit an einen *Software-Roboter* delegiert werden. Aus der Umsetzung dieser Idee durch das Autorenteam entstand

die Software MATEX – ein „Duett“ aus MATLAB und LATEX, das als ein neuartiges digitales Medium für effizientere Lehre und Lernen angesehen werden kann.

Für wen ist MATEX gedacht?

Wir empfehlen Ihnen nachdrücklich die Lektüre dieses Buches, wenn Sie

- als *Dozent(in)*, *Lehrer(in)* oder *Wissenschaftler(in)* im Fach *Mathematik* häufig mit umfangreichen Editierarbeiten im Textsatzsystem LATEX beschäftigt sind und dadurch viel Zeit verlieren, die Sie eigentlich für die Vorbereitung Ihres Unterrichts reserviert hatten, oder lediglich Ihren Feierabend endlich mal wieder pünktlich einläuten wollen, ohne eine Menge Arbeit auf Ihrem Schreibtisch liegen zu lassen,
- als *Studierende(r)* oder besonders interessierte(r) *Schüler(in)* zur Vorbereitung auf *Mathematik*-Prüfungen bzw. zum vertiefenden Lernen *mathematischer* Themen weiteres Aufgaben-, Lösungs- oder Anschauungsmaterial benötigen,
- generell an der *Automatisierung von Prozessen im Umfeld der Erstellung mathematischer Lehrmaterialien* für die ersten Studiensemester interessiert sind,
- als *Verantwortliche(r)* einer E-Learning-Plattform auf der Suche nach Inspiration und einem Fahrplan mit dem Ziel individuell gestalteter mathematischer Aufgaben sind.

Sämtliche Inhalte dieses Buches richten sich geschlechtsunabhängig an alle Menschen, die sich für Themen aus den Bereichen Mathematik, Lehre und Digitalisierung interessieren. Dass wir uns im weiteren Verlauf auf die Verwendung männlicher Sprachformen beschränken, geschieht allein aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit.

Was kann MATEX leisten?

MATEX ist ein Open-Source-Software-Projekt und kann den Arbeitsablauf vom Schreiben einer (standardisierten) Aufgabenstellung, über die Erstellung einer schrittweise algebraisch-analytischen Lösung des Problems bis hin zum Generieren einer gedruckten Musterlösung mit erläuternden Grafiken vollständig automatisieren. Zum Beispiel haben Aufgaben zum Thema Kurvendiskussion häufig die gleiche Struktur, bestehend aus Ableitungen bilden, Extremwerte bestimmen und Kurve zeichnen. Lediglich die zu analysierende Funktion ändert sich mit jeder Aufgabe. Möchte man mehrere Beispielaufgaben bereitstellen, steigt der Editieraufwand. Dieser Prozess wird von MATEX automatisiert, sodass beispielsweise Ableitungen und Extrempunkte automatisch von der Symbolic Math Toolbox bestimmt werden und die Aufgabenstellung mit Lösungsweg automatisch in LATEX-Code und damit in ein PDF überführt werden. Damit lässt sich innerhalb von wenigen Sekunden eine neue Aufgabe erstellen, wofür man zuvor mehrere Stunden brauchte. Mit Unterstützung von MATEX entwerfen Sie 100 Aufgaben mit Lösungen in einer halben Stunde, insbesondere frei von Tipp- und Rechenfehlern.

Nach einer Registrierung und Anmeldung unter

www.matex-online.de

können Sie MATEX über eine Webschnittstelle sofort verwenden und haben das Vergnügen, sich zwischen vorgefertigten Beispielaufgaben, welche in diesem Buch vorgestellt werden, zufällig generierten Aufgaben oder eigens entworfenen Aufgaben zu entscheiden.

Allerdings steckt MATEX noch in den Kinderschuhen. Im Rahmen einer Kooperationsvereinbarung zwischen dem Karlsruher Institut für Technologie, der Universität Stuttgart und der Hochschule Esslingen arbeitet das Autorenteam intensiv daran, MATEX im Themenumfang schrittweise auszubauen, Variationsmöglichkeiten flexibler bzw. intelligenter zu gestalten und die Bedienung intuitiver zu machen.

Wir würden uns sehr freuen, wenn Sie Erfahrung mit *Mathematik auf Knopfdruck* sammeln und das Buch sowie die Software MATEX weiterempfehlen. Für Kritik, Kommentare und Anmerkungen sind wir jederzeit dankbar.

Esslingen, Karlsruhe, Hannover,
März 2018

Andreas Helfrich-Schkarbanenko
Kevin Rapedius
Vita Rutka
Aron Sommer

Danksagung

Dieses Werk entstand einerseits durch einen regen Austausch innerhalb eines kleinen Dozententeams im MINT-Kolleg am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) sowie andererseits durch tatkräftige Unterstützung externer Fachkolleg(inn)en und auch durch Mitwirkung weiterer Personen, die mit Lehrtätigkeiten (nicht nur im Fach Mathematik) vertraut sind. Diesen Menschen, die uns in zahlreichen Gesprächen und im schriftlichen Austausch Anregungen und konstruktive Kritik mit auf den Weg gegeben haben, möchten wir unseren Dank aussprechen. Im Einzelnen sind dies:

Frau Dr. Claudia Goll, Leiterin des MINT-Kollegs Baden-Württemberg, für Ihre Unterstützung bei der Realisierung des MATEX-Projekts; Herr Dr. Tobias Bentz, stellvertretender Leiter des MINT-Kollegs am KIT, für die Schaffung förderlicher Rahmenbedingungen sowie die Entwicklung einer Webschnittstelle für MATEX aus Eigeninitiative(!) und die Bereitstellung der zugehörigen Infrastruktur; Frau Andrea Nitsche, Koordinatorin des MINT-Kollegs Baden-Württemberg, für die Abwicklung der vertraglichen Angelegenheiten seitens des MINT-Kollegs sowie für das Projektmanagement in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Andreas Helfrich-Schkarbanenko – dem Initiator der Software MATEX.

Der Hochschule Esslingen, der Fakultät Grundlagen, insbesondere dem Dekan Prof. Dr. Martin Stämpfle, danken wir ausdrücklich für die Begrüßung sowie Förderung der MATEX-Idee. An der Entwicklung des Software-Moduls für Kapitel 11.5 wirkte Dipl.-Inf. Achim Eichhorn maßgeblich mit. Ohne seine intellektuelle und technische Unterstützung wäre dies nicht möglich.

Wir danken unserem Kollegen Herrn Dr. Timo Essig, Dozent im MINT-Kolleg am Karlsruher Institut für Technologie, für genaues Korrekturlesen und das Einbringen Leseverständnis-förderlicher und fachlicher Aspekte sowie Frau Dipl.-Inf. und Studienrätin Anke Mäkiö für Korrekturlesen und Anregungen aus der Perspektive einer Fachfrau im

gymnasialen Schuldienst. Herrn Dr. Daniel Haase, unserem Kollegen am MINT-Kolleg des Karlsruher Instituts für Technologie, danken wir für seine tatkräftige Unterstützung im IT-Bereich. Unserem Kollegen Herrn Dipl.-Math. Rainer Koß gilt unser besonderer Dank für Anregungen, Diskussionen und Hilfe bei der Literaturrecherche insbesondere bezüglich des Potenzials von MATEX für die Lehre an Schule und Hochschule.

Aus dem Meilenstein der Mathematik-Lehrbücher *Mathematik* [Arens et al. 2015] verwendeten wir für dieses Werk über 50 Aufgaben und bedanken uns für die freundliche Genehmigung bei den Autoren PD Dr. Tilo Arens, PD Dr. Frank Hettlich, PD Dr. Christian Karpfinger, Dr. Ulrich Kockelkorn, Dr. Klaus Lichtenegger und Dr. Dr. h.c. Hellmuth Stachel.

Unser ganz besonderer Dank geht an Frau Dr. Annika Denkert, Springer Spektrum-Verlag, die uns jederzeit als kompetente Ansprechpartnerin für konzeptionelle und inhaltliche Fragen zur Verfügung stand und das MATEX-Buchprojekt vorbildlich betreut hat, sowie an Frau Dr. Meike Barth, Springer Spektrum-Verlag, die uns als kompetente Ansprechpartnerin in allen technischen und formalen Fragen während der gesamten Phase der Manuskripterstellung zur Verfügung stand.

Beim Karlsruher Institut für Technologie bedanken wir uns für die Bereitstellung der Total Academic Head Count (TAH)-Lizenz der MathWorks-Software MATLAB. Die Bereitstellung der MATEX-Dienste über eine Webschnittstelle bedurfte einer Abstimmung mit dem US-Unternehmen MathWorks. Für die freundliche Genehmigung bedanken wir uns sehr. Die kostenlose Bereitstellung des Button-Icons verdanken wir Layerace – www.freepik.com.

Dankend erwähnen möchten wir überdies, dass das MINT-Kolleg Baden-Württemberg sowohl durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg (MWK) im Rahmen des Programms *Studienmodelle individueller Geschwindigkeit* als auch vom Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) im Rahmen des Bund-Länder-Programms *Bessere Studienbedingungen und mehr Qualität in der Lehre (Qualitätspakt Lehre)* als Verbundprojekt mit der Universität Stuttgart (Förderkennzeichen: 01PL11018A bzw. 01PL16018A) gefördert wird.

Für das Mitfiebern und die erbrachte Geduld bedanken wir uns bei unseren Familien im engeren und weiteren Sinne.

Inhaltsverzeichnis

Teil I Das Zeitproblem, eine Lösungsstrategie und die Realisierung

1 Motivation und Einführung 3
1.1 Wind of Change 3
1.2 Leistungsspektrum und Zielgruppen von MATEX 4
1.3 Prozessautomatisierung durch Software-Roboter 5
1.4 Bemerkungen zum Buch 7
Literaturverzeichnis 9

2 Komponenten und Schnittstellen von MATEX 11
2.1 Motivation und Überblick 11
2.2 MATLAB auf einen Blick 12
2.3 Symbolic Math Toolbox auf einen Blick 14
2.4 LATEX auf einen Blick 16
2.5 Aufgabengeneratoren 17
2.6 Benutzerschnittstelle 18
Literaturverzeichnis 25

3 MATEX trifft auf digitale Lehre 27
3.1 Viel Stoff – wenig Zeit 27
3.2 MATEX und aufgabenorientiertes Lernen 29
3.3 E-Learning 33
3.4 Empfehlungen für den Einsatz von MATEX in der Lehre 37
3.5 Erste Lehrerfahrungen mit MATEX 42
Literaturverzeichnis 44

4 Handgriffe und Programmieraufgaben 45
4.1 Grundbausteine eines Aufgabengenerators 46
4.2 Aufgabengenerator 60
4.3 Hauptprogramm und Features 64
4.4 MATEX-Hilfsfunktionen 65
Literaturverzeichnis 70

Teil II MATEX-Generatoren zu verschiedenen Themen der Höheren Mathematik

5 Einführung und Grundlagen ... 73
5.1 Quadratische Gleichungen ... 74
5.2 Bruchrechnung ... 79
5.3 Gleichungen, Ungleichungen ... 82
Literaturverzeichnis ... 91

6 Analysis einer reellen Variablen ... 93
6.1 Folgen ... 94
6.2 Reihen, Konvergenzkriterien ... 98
6.3 Potenzreihen ... 106
6.4 Kurvendiskussion ... 114
6.5 Differentialrechnung, Taylor-Polynom ... 126
6.6 Partielle Integration ... 131
6.7 Partielle Integration mit Parameter ... 135
6.8 Integration mittels Partialbruchzerlegung ... 139
6.9 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 147
Literaturverzeichnis ... 156

7 Lineare Algebra ... 157
7.1 Lineare Gleichungssysteme ... 158
7.2 Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt ... 166
7.3 Darstellungsmatrix ... 174
7.4 Kern und Bild einer linearen Abbildung ... 180
7.5 Determinantenberechnung ... 186
7.6 Eigenwertprobleme ... 191
Literaturverzeichnis ... 202

8 Analysis mehrerer reeller Variablen ... 203
8.1 Extremwertaufgaben ... 204
8.2 Taylor-Polynom im 2-D ... 217
8.3 Satz über implizit definierte Funktionen ... 225
8.4 Kurvenintegrale erster Art, Kurvenlänge ... 232
8.5 Kurvenintegrale zweiter Art ... 239
8.6 Konservative Felder ... 247
Literaturverzeichnis ... 255

9 Höhere Analysis ... 257
9.1 Fourier-Reihe ... 258
9.2 Laplace-Transformation und Differentialgleichungen ... 268
9.3 Fourier-Transformation und Differentialgleichungen ... 279
9.4 Optimierung unter Nebenbedingungen – Lagrange'sche Multiplikatorenregel ... 288
Literaturverzeichnis ... 299

10 Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik 301
10.1 Mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme 302
10.2 Lineare Regression 315
10.3 Kontinuierliche Zufallsvariable 323
10.4 Zweidimensionale Zufallsvariable 332
10.5 Qualitätsregelkarte 344
Literaturverzeichnis 353

Teil III Ideenbox

11 Multimedia 357
11.1 PDF-Annotationen 358
11.2 PDF-Animationen 358
11.3 Audiodateien im PDF 362
11.4 Videodateien im PDF 363
11.5 Dateiformat Universal 3D 363
11.6 Generieren von Abbildungen mittels PGF/Ti*k*Z oder PSTricks 365
Literaturverzeichnis 366

12 Ausblick 367
12.1 Generatoren für weitere Themen 368
12.2 Generatoren für Übungsblätter und Tests 369
12.3 Anbindung an eine E-Learning-Plattform (ILIAS) 369
12.4 Englisch und weitere Sprachen 370
12.5 Alternative Entwicklungsumgebungen 372
12.6 MATEX lernt das Sprechen und Kommunizieren 374
12.7 Entwicklung eines MATEX-Chatbots 377
12.8 Kognitive Fähigkeit 378
Literaturverzeichnis 379

13 QR-Codes 381

Literaturverzeichnis 387

Sachverzeichnis 391

Teil I
Das Zeitproblem, eine Lösungsstrategie und die Realisierung

Gebraucht die Zeit, sie geht so schnell
von hinnen,
Doch MATEX lehrt euch Zeit gewinnen.

J. W. von Goethe, „Faust I“, Paraphrase

Wer Zeit gewinnt, gewinnt Leben.

Ein Sprichwort aus Ungarn

Zeit ist des Menschen kostbarstes Gut. Sie ist nicht käuflich, lässt sich weder speichern noch vermehren. Sie verrinnt kontinuierlich und unwiderruflich. Viele Zeitgenossen streben danach, in der ihnen zugeteilten Zeit mehr zu erledigen, mehr zu erfahren, mehr zu erleben. Dieses Streben mündet in eine Beschleunigung unserer Gesellschaft, die bereits im 17. Jahrhundert beobachtet und seither von Kulturphilosophen debattiert wird. Diese Beschleunigung ist insbesondere auch auf die Weiterentwicklung der Medien sowie auf die Digitalisierung unserer Lebenswelt zurückzuführen. Medien können unter anderem folgende Sehnsüchte des menschlichen Umgangs mit Zeit befriedigen [Schweiger 2007]:

- Zeit einsparen (Aufgaben mittels geeigneter Medien schneller erledigen),
- Zeit erfüllen (Zeitspannen überbrücken),
- Zeit verdichten (effizientere Zeitnutzung; möglichst viele Tätigkeiten gleichzeitig erledigen).

Dieses Buch und die darin eingeführte Software MATEX – eines der neuen Medien – fokussieren den in der Arbeitswelt so wichtigen Begriff des Zeitsparens. In Teil I des Buches stellen wir eine Idee vor, wie Sie bei der Erstellung von Lehr- und Lernmaterialien für Mathematikvorlesungen viel Zeit einsparen können.

Wenn Sie an der unmittelbaren Anwendung der MATeX-Software interessiert sind, können Sie direkt zu Teil II übergehen, um MATEX sofort auf interaktive Weise zu erleben und sich ein Bild von dessen Leistungsfähigkeit zu machen. Falls sich Ihnen Fragen zur Realisierung aufdrängen, so gehen Sie einfach zurück zu Teil I, wo Sie die Antworten finden.

Nach einer Motivation des Vorhabens in Kapitel 1 werden der Lösungsansatz sowie die Grundkomponenten der technischen Umsetzung in Kapitel 2 beleuchtet und ihre Benutzerschnittstelle aufgezeigt. Die Einsatzmöglichkeiten im Spannungsfeld von Digitalisierung und Lehre werden in Kapitel 3 thematisiert. Kapitel 4 gewährt dem Leser einen Blick hinter die Kulissen: Hier können exemplarisch anhand von Programmieraufgaben die grundlegenden, zur Entwicklung von Aufgabengeneratoren erforderlichen MATEX-Handgriffe erlernt werden.

Kapitel 1
Motivation und Einführung

Niemand ist nutzlos in dieser Welt, der
einem anderen die Bürde leichter macht.

Charles Dickens (1812 – 1870),
englischer Schriftsteller

Zusammenfassung Wir eröffnen das Buch mit einem Anwendungsszenario. So erhalten Sie einen Vorgeschmack auf das, was unter „Mathematik auf Knopfdruck" verstanden werden kann. Anschließend erfahren Sie im Abschnitt 1.2 die Zielgruppen sowie das Leistungsspektrum von MATEX und wie Sie damit Zeit einsparen können. Am Ende dieses Kapitels wird im Abschnitt 1.3 MATEX im Kontext aktueller Entwicklungen im Bereich der robotergesteuerten Prozessautomatisierung thematisiert. Abschließend geben wir zur Orientierung einen Überblick über die Struktur dieses Werks im Abschnitt 1.4 und unterstreichen dabei die Rolle der MATEX-Webschnittstelle, der externen Links bzw. der praktischen QR-Codes.

1.1 Wind of Change

Es ist Freitag. Cindy – eine Übungsleiterin der Höheren Mathematik für Studierende der Elektrotechnik – macht sich gerade in ihrem Büro an die Aufgabe, ein Übungsblatt für nächste Woche vorzubereiten. Aufmerksam studiert sie die aktuellen Vorlesungsinhalte, sammelt Stichworte, schreibt Lernziele auf und fängt erste Ideen für die Aufgabenstellungen ein. In der Institutsaufgabendatenbank findet sie einige passende Aufgaben, die jedoch das Übungsblatt nicht komplett ausfüllen. Sie entscheidet sich, einige Aufgaben selbst zu konzipieren und die Lösungen (eventuell mit Abbildungen) zu erstellen. Anschließend muss die Unterlage in ein für Hochschulen übliches LATEX-Textsatzsystem überführt werden. Pro Aufgabe benötigt Cindy dafür normalerweise 1–2 Stunden. Sie hat bereits eine konkrete Vorstellung von einer Potenzreihe, die von den Studierenden auf ihren Konvergenzbereich untersucht werden soll. Anstatt jedoch zu Papier und Stift zu greifen, wendet sie sich ihrem

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018
A. Helfrich-Schkarbanenko et al., *Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57778-3_1

Laptop zu. Bereits nach zwei Minuten ist sie nicht nur mit der von ihr ursprünglich erdachten Aufgabe fertig, sondern auch mit zwei weiteren Variationen dieser Aufgabe, und stellt diese bereits in einem PDF-Reader einander gegenüber. In ihrem Browser ist das Logo der Software MATEX erkennbar. Cindy entscheidet sich für die dritte Variante der Aufgabe. Ihr Blick streift über die Tafel an der Wand mit der Aufschrift: „Digital Transformation – Wind of Change", als sie sich dem Drucker nähert.

So oder so ähnlich kann die Anwendung von MATEX im Arbeitsalltag aussehen. In der obigen, bereits mehrmals erprobten Situation kann man eine Beschleunigung von Arbeitsprozessen um einen Faktor von bis zu ca. 100 oder mehr erfahren. Diese ausschlaggebende und im Entwicklungsteam empirisch belegte Charakteristik der in diesem Werk einzuführenden Software MATEX halten wir betont fest:

MATEX beschleunigt bestimmte Prozesse um bis zu zwei Größenordnungen.

Ein Übungsbetrieb an einer Hochschule ist jedoch nur eines der möglichen Szenarien. Dass von MATEX nicht nur Lehrende, sondern u. a. auch Lernende profitieren und auf welche Weise sie dies tun können, soll folgend zunächst kurz (und später in Kapitel 3 ausführlicher) erläutert werden.

1.2 Leistungsspektrum und Zielgruppen von MATEX

In vielen mathematischen Themengebieten können Sie bestimmte zeitintensive und anspruchsvolle Prozesse über eine Webschnittstelle (siehe Abschnitt 2.6) an einen Rechner delegieren und dadurch diese extrem verkürzen. Dank der Webschnittstelle und mobiler Endgeräte ist dies jederzeit und fast überall möglich. Konkret kann MATEX folgende Tätigkeiten in automatisierter und ferngesteuerter Weise für Sie erledigen:

- das Lösen standardisierter Aufgaben zu 33 Themen der Höheren Mathematik für Studierende des ersten bis dritten Semesters.
- das Generieren von konkreten oder zufälligen Aufgabenstellungen und ausführlichen Lösungswegen. Bei manchen Themen, wo es didaktisch sinnvoll ist, werden Grafiken in den Formaten JPG oder PNG (Portable Network Graphics) miterzeugt.
- das Digitalisieren und Bereitstellen der angesprochenen Dokumente mittels LATEX und das Erstellen der zugehörigen PDF-Datei.

Für die verschiedenen Nutzerkreise sollen hier die Wesensmerkmale von MATEX hervorgehoben werden:

- *Mathematik-Lehrenden* steht mit MATEX ein neuer, effizienter Weg zur Erstellung von Lehrunterlagen (aktuell sind dies Aufgabenblätter mit Lösungsvorschlägen) zur Verfügung. Aufgrund seiner Geschwindigkeit und dank der Webschnittstelle lässt sich MATEX in die Lehrveranstaltungen, beispielsweise wie in Kapitel 3.4 vorgeschlagen,

einbinden. Durch die Automatisierung oben genannter Arbeitsschritte können Lehrende MATEX ferner zum kostengünstigen und zügigen Aufbau von Aufgabendatenbanken einsetzen.

- *Mathematik-Lernende* erhalten die Möglichkeit, sich mit MATEX (individuelle, an die Leistung des Lernenden angepasste) Aufgabenstellungen und Lösungen zu Standardthemen der Höheren Mathematik generieren zu lassen, siehe Teil II des vorliegenden Werkes. Aufgrund der Fülle von Themen und Aufgaben lässt sich dieses Buch auch ohne die Software MATEX zum Üben und Einprägen von Inhalten verwenden.
- *Leserinnen und Leser mit Programmiererfahrung* finden einen Weg, die bestehenden Open Source-Quelltexte der verschiedenen Aufgabengeneratoren an ihre persönlichen Bedürfnisse anzupassen. Eine detaillierte Anleitung an einem Beispiel stellt Kapitel 4 dar.

Als Anwender benötigen Sie dazu lediglich ein Endgerät (PC, Tablet, Smartphone) mit einem Internetzugang sowie einem Webbrowser, um MATEX über eine Webschnittstelle anzusprechen. Komfortabel gestaltet sich die Bedienung von MATEX unter Zuhilfenahme eines QR-Code-Scanners [Jäger 2016]. Wenn Sie tiefer einsteigen wollen, indem Sie die zur Verfügung gestellten Möglichkeiten der Software modifizieren oder neue entwickeln möchten, dann benötigen Sie zusätzlich eine MATLAB- sowie eine LATEX-Software auf Ihrem PC.

Oben ist der für dieses Werk essenzieller Begriff der Automatisierung gefallen. Wir möchten hier MATEX im Lichte der Prozessautomatisierung betrachten und auf einige spannende aktuelle Entwicklungen auf diesem Gebiet hinweisen.

1.3 Prozessautomatisierung durch Software-Roboter

„The automation of knowledge work will be this decade's engine of growth" – so wirbt das Institute for Robotic Process Automation[1] für seine Dienstleistungen. Robotic Process Automation (RPA) ist ein recht junger Ableger der klassischen Prozessautomatisierung, der auf dem Begriff des *Software-Roboters* basiert und die bestehenden Initiativen zur Automatisierung von Prozessen signifikant erweitert. Als *Software-Roboter* bezeichnet man dabei Software-Anwendungen, die Routinehandlungen eines Menschen bei der Interaktion mit einem Computer nachahmen. Ein solcher Roboter agiert auf der Benutzerschnittstelle in ähnlicher Weise, wie ein Mensch es tun würde. Im Unterschied zu einem Menschen erledigt der Software-Roboter seine Aufgaben jedoch innerhalb einer virtuellen Umgebung und nicht am Bildschirm. Somit ist eine Programmierschnittstelle (Application Programming Interface, kurz API[2]) beim Einsatz von Software-Robotern überflüssig. Daraus resultiert für den Anwender der entscheidende Vorteil, nicht mehr über Programmierfähigkeiten verfügen zu müssen. Aufgrund aktueller Entwicklungen werden Software-Roboter

[1] https://irpaai.com/

[2] API (englisch: Application Programming Interface) ist eine Schnittstelle zur Anwendungsprogrammierung. Es ist ein Programmteil, der von einem Software-System anderen Programmen zur Anbindung an das System zur Verfügung gestellt wird.

in Fachkreisen sogar schon als ein „Paradigma der Automatisierung“ bewertet. Im Zusammenhang mit der Verwendung von Software-Robotern sollte man konsequenterweise von einer „Maschine zu Maschine“-Interaktion sprechen [Boswarthick 2012].
MATEX empfängt Arbeitsaufträge, steuert Prozessabläufe, erteilt Befehle an die Symbolic Math Toolbox, fordert MATLAB dazu auf, Abbildungen sowie LATEX-Dateien zu generieren, konvertiert LATEX-Dateien in PDF-Dokumente und führt Betriebssystembefehle aus. Es bündelt mehrere Dateien und stellt diese dem Auftraggeber über die Webschnittstelle zum Download bereit. Folgend gilt die Charakteristik:

MATEX ist ein Software-Roboter.

Dass mittlerweile extrem leistungsstarke Software-Roboter existieren, zeigt folgendes Beispiel. Das von IBM im Rahmen des DeepQA-Forschungsprojekts entwickelte kognitive System *IBM Watson* ist mehr als ein Software-Roboter. Es liefert Antworten auf Fragen, die in natürlicher Sprache gestellt werden. Zur Demonstration seiner Leistungsfähigkeit konkurrierte IMB-Watson im Jahr 2011 in mehreren Folgen einer Quizsendung mit zwei, auf Quizfragen spezialisierten menschlichen Gegnern. Das System gewann das Spiel mit deutlichem Vorsprung vor seinen menschlichen Konkurrenten. Dieser „Mensch gegen Maschine“-Wettkampf hatte einen vergleichbaren Stellenwert wie das im Jahr 1997 ausgetragene Schachduell des IBM-Schachcomputers *Deep Blue* (einem Vorgänger von IBM Watson) gegen den damaligen Weltmeister Garri Kasparow. Die Maschine gewann damals nur knapp. Heute ist IBM Watson in der Lage, selbstständig Informationen und Muster aus extrem umfangreichen Datenmengen zu generieren und daraus verwertbare Schlussfolgerungen zu ziehen. Durch diese „Befähigung“ nähert sich das IBM Watson-Software-System den kognitiven Möglichkeiten des Menschen an und birgt damit enormes Potenzial für zukünftige Anwendungen in Wirtschaft und Gesellschaft [IBM 2017].

Die Zukunft der robotergesteuerten Prozessautomatisierung ist aktuell nur sehr schwer vorhersagbar. Mögliche richtungsweisende Entwicklungen könnten im Bereich des Dienstleistungssektors liegen. Dort könnten etwa Reichweite, Ausgestaltung und Qualität von Dienstleistungen gesteigert und die Leistungen als solche individualisiert werden. Der Einsatz von Software-Robotern wird einen erheblichen gesellschaftlichen Einfluss haben, denn umfangreiche, in hohem Maße repetitive, ermüdende und somit fehleranfällige Tätigkeiten könnten von solchen Robotern übernommen werden. Dies könnte in Abhängigkeit des jeweiligen Tätigkeitsfeldes zu einer maßgeblichen Reduktion des täglichen Arbeitsvolumens führen.

Akademische Studien prognostizieren, dass Robotic Process Automation sowie andere technische Trends eine neue Welle der Produktivität bzw. eine signifikante Steigerung der Effizienz (in betrieblichen Arbeitsabläufen) auslösen könnten. Laut Deloitte könnten zum Jahr 2035 bis zu 35 % aller Jobs in Großbrittanien automatisiert werden, wobei auch neue Stellen im Bereich der Implementierung und Verwaltung von RPA-Tools entstehen würden, [Deloitte 2015]. Darüber hinaus könnte sich RPA zu einer ernst zu nehmenden Alternative zum Outsourcing entwickeln.

Abschließend sei eine Aussage [Willcocks et al. 2015] angefügt, welche die Wirkung von Robotic Process Automation auf den Punkt bringt: Wir begegnen einer Technologie,

die in der Lage ist, „to take the robot out of the human“. In diesem Sinne sehen wir MATEX als ein positives Beispiel eines Software-Roboters, der den Menschen nicht ersetzt, sondern ihn unterstützt, indem er ihm lästige Routinetätigkeiten abnimmt und ihm so mehr Freiraum für die interessanten und kreativen Aspekte der Lehre verschafft.

1.4 Bemerkungen zum Buch

Das vorliegende Buch ist vielfältig einsetzbar: Es weist eine mathematische, didaktische sowie programmiertechnische Dimension auf, siehe Abschnitt 1.2. Die Hauptmotivation für dieses Werk ist die Vorstellung einer eigens entwickelten neuartigen Software MATEX für *effizienteres* Lehren und Lernen von Hochschulmathematik sowie ihrer Einsatzmöglichkeiten. Die kostenlose Nutzung von MATEX über eine Webschnittstelle bedarf einer Registrierung auf der MATEX-Website www.matex-online.de. Wir unterstreichen:

MATEX adressiert effizienteres Lehren und Lernen.

33 Themen der Höheren Mathematik, die in sechs Kapiteln im Teil II gebündelt sind, werden kurz eingeführt und an über 140 Aufgaben mit Lösungen beleuchtet. Die Nummerierung der Aufgaben stimmt mit der Nummerierung der zugehörigen Abbildungen überein. Innerhalb eines Abschnitts sind die Aufgaben so gewählt bzw. konstruiert, dass ihr Schwierigkeitsgrad zunimmt und ein möglichst vollständiges Bild des Leistungsspektrums der Software entsteht. Zu jedem Thema werden die vom Autorenteam in MATLAB entwickelten sogenannten Aufgabengeneratoren vorgestellt. Dabei handelt es sich um Hauptelemente von MATEX, die in der Lage sind, zu einem konkreten mathematischen Thema ausgehend von einigen Eingaben eine Standardaufgabe zu formulieren, diese Aufgabe zu lösen und den Lösungsweg in LATEX-Format zu dokumentieren. Sämtliche mathematische Aufgabenstellungen sowie Lösungswege in diesem Werk stammen aus der Feder von MATEX. Bei der Auswahl von Themen aus dem Bereich der Höheren Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler orientierten wir uns am umfassenden und innovativen Lehrbuch *Mathematik* [Arens et al. 2015, Arens et al. 2016], aus dem wir ca. 50 Aufgaben übernommen und die Software an konkreten Aufgabenstellungen aus dem universitären Bereich, wie im Teil II dokumentiert, erfolgreich getestet haben. Dasselbe Lehrbuch können Sie in Verbindung mit dem vorliegenden Werk verwenden, um die 33 Themen gründlicher zu erkunden.

Wie sich MATEX in das Spannungsfeld zwischen Lehre und digitale Medien einordnen lässt, wird in Kapitel 3 thematisiert. Insbesondere gehen wir dabei auf die wichtige Funktion der Aufgaben – die einen Stützpunkt für MATEX darstellen – im Mathematikunterricht ein.

In diesem Buch machen wir großen Gebrauch von der Möglichkeit, Inhalte nicht nur buchintern zu verlinken, sondern auch externe Links einzubinden. Beachtenswert ist, dass dieses Buch fast 300 Links auf die extra entwickelte Schnittstelle zu MATEX aufweist. Dank der ca. 130 QR-Codes stellt dieses Werk als PDF aber auch in gedruckter Form

selbst eine Schnittstelle zur mathematischen Software dar. Denn zu jedem der 33 Fachthemen werden drei QR-Codes bereitgestellt (Genaueres findet man im Abschnitt 2.6), über die man durch Anklicken oder Einscannen mit einer geeigneten App einen Auftrag zur Erstellung einer konkreten oder einer zufälligen Aufgabe erteilen kann. Lassen Sie sich durch Mehrfachklicks oder Mehrfachscans eines der mittleren QR-Codes in den Abschnitten von Teil II mehrere Varianten zum selben Thema generieren und überzeugen Sie sich davon, dass auf einer Fläche von ca. $4\,\mathrm{cm}^2$ prinzipiell unendlich viele Aufgaben untergebracht werden können. Über einen weiteren QR-Code kann man den MATLAB-Quelltext des entsprechenden Aufgabengenerators einsehen. Zusätzlich lässt sich jede der aufgeführten Aufgaben auf Knopfdruck (siehe das folgende Symbol)

dank der Webschnittstelle erneut aufstellen und lösen. Dabei werden sowohl die LaTeX-Unterlagen als auch die Abbildungen für den individuellen Einsatz des Lesers zur Verfügung gestellt. Im Schlusskapitel 13 ist eine Übersichtstabelle für alle im Buch behandelten Fachthemen samt QR-Codes für Zufallsaufgaben für einen eventuellen Einsatz im Unterricht vorbereitet. Die QR-Codes stellen somit ein Bindeglied zwischen diesem Buch, der Software-Schnittstelle und den Software-Quelltexten dar.

Für interessierte Leser wird in Kapitel 4 in Form von Programmieraufgaben mit Lösungsvorschlägen die softwaretechnische Umsetzung eines konkreten Aufgabengenerators aufgezeigt.

Literaturverzeichnis

Arens et al. 2015. Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.: Mathematik, 3. Auflage, Springer Spektrum, 2015

Arens et al. 2016. Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.: Arbeitsbuch Mathematik, 3. Auflage, Springer Spektrum, 2016

Boswarthick 2012. Boswarthick, D., Elloumi, O., Hersent, O.: M2M Communications – A Systems Approach, Wiley 2012

Deloitte 2015. Deloitte LLP: From brawn to brains – The impact of technology on jobs in the UK, 2015, https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/uk/Documents/Growth/deloitte-uk-insights-from-brawns-to-brain.pdf (Abrufdatum: 26.03.2018)

IBM 2017. IBM: http://www-05.ibm.com/de/watson/ (Abrufdatum: 11.09.2017)

Jäger 2016. Jäger, L.: QR-Codes in der Hochschullehre, Books On Demand, 2016.

Schweiger 2007. W. Schweiger: Theorien der Mediennutzung: Eine Einführung, Springer (2007)

Schweizer 2013. Schweizer, W.: MATLAB kompakt, 5. Auflage, Oldenbourg Verlag (2013)

Willcocks et al. 2015. Willcocks, L. P., Lacity, M. C.: Nine likely scenarios arising from the growing use of robots, September 2015, http://blogs.lse.ac.uk/businessreview/2015/09/29/nine-likely-scenarios-arising-from-the-growing-use-of-robots/ (Abrufdatum: 01.03.2017)

Kapitel 2
Komponenten und Schnittstellen von MATEX

> Die Gefahr, dass der Computer so wird wie der Mensch, ist nicht so groß, wie die Gefahr, dass der Mensch wird wie der Computer.
>
> Konrad Zuse (1910 – 1995), deutscher Ingenieur und Erfinder

Zusammenfassung In diesem Kapitel werden die grundlegende Struktur des Software-Roboters MATEX sowie die Arbeiten, die er Ihnen abnehmen kann, beschrieben. Unter anderem werden in den Kapiteln 2.2 – 2.4 die Grundpfeiler MATLAB, Symbolic Math Toolbox und LATEX, auf denen MATEX aufbaut, jeweils mit ihrer elementaren Funktionalität und ihrer Historie kurz vorgestellt. Nach der Einführung des zentralen Begriffs des Aufgabengenerators in Kapitel 2.5 werden abschließend in Kapitel 2.6 die Webschnittstelle und die Interaktionsmöglichkeiten mit MATEX eingehend beleuchtet sowie auf die Creative-Common-Lizenz für MATEX hingewiesen.

2.1 Motivation und Überblick

Bislang gab es noch keinen benutzerfreundlichen Weg, um mittels MATLAB erzeugte Rechenergebnisse, Abbildungen, Texte und sonstige Daten gemäß individuellen Formatierungswünschen des Anwenders direkt in LATEX-Dateien einzubinden. MATLAB verfügt zwar über eine sogenannte „publish“-Funktion, mit der sich rasch eine Dokumentation des Quelltextes mit Ausgaben sowie Kommentaren und LATEX-Elementen erstellen lässt, für die Erstellung von mathematischen Aufgaben mit zugehörigen Lösungswegen ist diese jedoch weder gedacht noch besonders geeignet. Mit der in diesem Buch vorgestellten Software MATEX steht dem Benutzer hingegen ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung, das speziell auf diese Aufgabe zugeschnitten ist.

Aufgrund der breit gefächerten Anwendungsmöglichkeiten von MATLAB und LATEX bietet es sich geradezu an, die Stärken beider Werkzeuge zum Zwecke der automatisierten

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018
A. Helfrich-Schkarbanenko et al., *Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-57778-3_2

Erstellung mathematischer oder auch technischer Dokumente zu vereinen. Wie eine solche Symbiose aussehen und funktionieren kann, wird in [Talole et al. 2003] am Beispiel eines dynamischen elektrotechnischen Systems vorgestellt.

Angetrieben von der Vision, routinemäßige Arbeitsabläufe zu automatisieren, wurde innerhalb eines Teams, bestehend aus Mitarbeitern des MINT-Kollegs des Karlsruher Instituts für Technologie, der Hochschule Esslingen sowie Dipl. Math.-techn. Aron Sommer, die Software MATEX entwickelt. Sie umfasst drei Kernkomponenten: die seit mehreren Jahrzehnten etablierte mathematische Software MATLAB, die dazugehörige Symbolic Math Toolbox zum formal-symbolischen Rechnen und das Textsatzsystem LATEX. Die Software wurde auf den Namen MATEX getauft, um der technischen Verschmelzung von MATLAB und LATEX auch sprachlich Ausdruck zu verleihen. MATEX wurde vollständig innerhalb von MATLAB entwickelt und wird dort aktuell auch weiterentwickelt. Nachfolgend sollen die Kernkomponenten der Entwicklungsumgebung von MATEX vorgestellt werden, siehe auch Abb. 2.1.

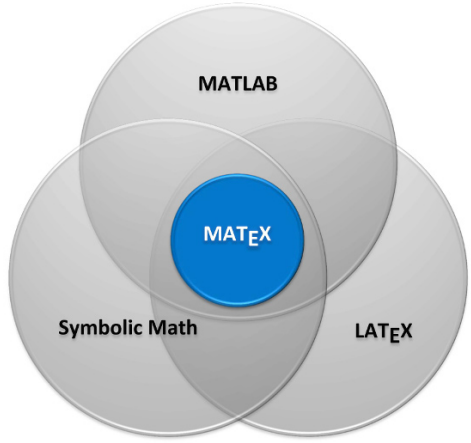

Abb. 2.1: MATEX und seine Entwicklungsumgebung

2.2 MATLAB auf einen Blick

MATLAB ist eine proprietäre Programmiersprache des US-amerikanischen Herstellers MathWorks. Ihr Name entstand durch Verschmelzen der Worte MATrix und LABoratory. Sie ist eine Programmiersprache der vierten Generation, die nicht kompiliert, sondern interpretiert wird.

MATLAB stellt dem Anwender neben einer inhärenten Programmiersprache eine grafische Desktop-Umgebung zur Verfügung, in der verschiedene Elemente wie Programmcode, Variablen oder Grafikplots auf einen Blick sichtbar sind und sich viele typische Ar-

beitsschritte sowohl durch Mausinteraktion als auch durch Tastaturkürzel ausführen lassen, siehe Abb. 2.2.

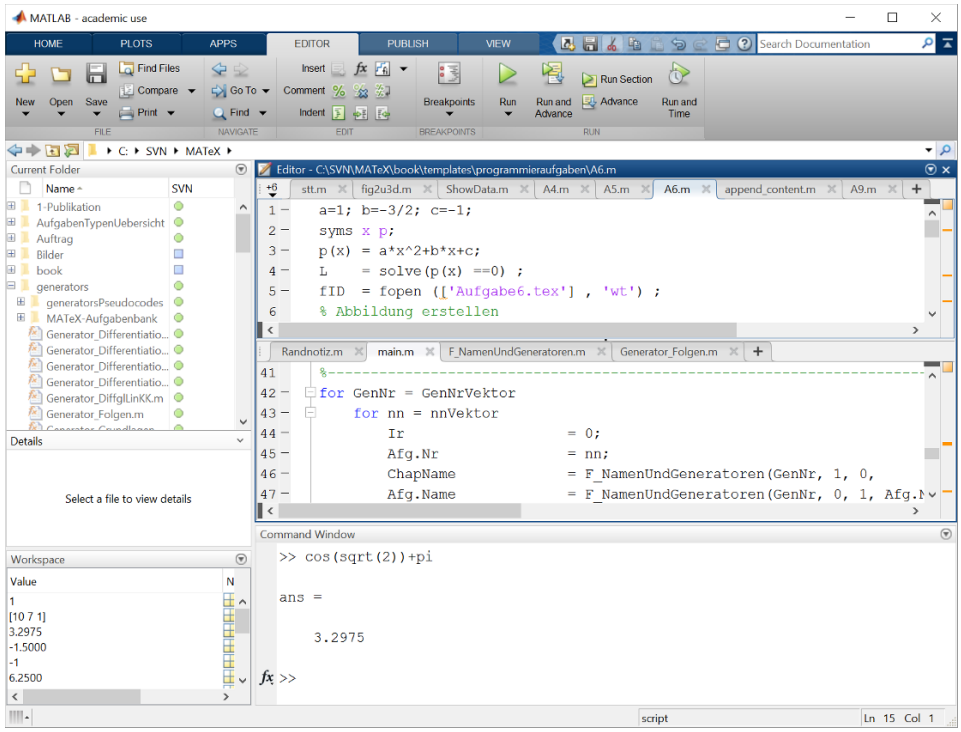

Abb. 2.2: Grafische Benutzeroberfläche von MATLAB R2017b

Eine Befehlszeile wie etwa

```
cos(sqrt(2))+pi
```

kann wahlweise mittels der Tastatur im *Command Window*, siehe den unteren Abschnitt im GUI-Screenshot, eingegeben oder mittels eines Skriptes ausgeführt werden. Details zur Programmierung findet man z. B. in Kapitel 4. Für einen Einstieg in dieses Tool verweisen wir auf die umfangreiche Literatur, etwa [Schweizer 2013].

Die aktuelle MATEX-Version, welche unter der in Kapitel 2.6 vorgestellten Website www.matex-online.de läuft, wurde bereits mittels MATLAB-Version R2017b entwickelt. Bei direkter Verwendung der Quelltexte unter älteren MATLAB-Versionen kann es vereinzelt zu Problemen kommen.

MATLAB verfügt standardmäßig über eine äußerst umfangreiche Bibliothek mathematischer, grafischer und weiterer nützlicher Anwendungs- und Systemfunktionen, die thematisch in über 60 sogenannten *Toolboxen* gebündelt sind. Da MATLAB ursprünglich nur für numerisches Rechnen ausgelegt war, wurden mit der Symbolic Math Toolbox, einem Rechenkern zur symbolischen Manipulation von Ausdrücken, die Rechenfähigkeiten

deutlich erweitert und der Einsatz in der Lehre noch vielfältiger und spannender. Daher stellt die Symbolic Math Toolbox eine weitere wichtige Komponente von MATLAB dar.

2.3 Symbolic Math Toolbox auf einen Blick

Computeralgebra

Computeralgebrasysteme (abgekürzt: CAS) sind Software-Systeme zur formalen Manipulation algebraischer und auch analytischer Ausdrücke. Insbesondere kann man innerhalb eines CAS mit symbolischen Ausdrücken (wie etwa Variablen, Funktionen, Polynomen oder Matrizen) wie beim händischen Rechnen operieren.

Symbolische Formelmanipulationen, wie z. B. das Auflösen einer Gleichung nach einer Variable, sind möglich. Weitere Vorteile der symbolischen Mathematik sind die formale Exaktheit (in dem Sinne, dass Lösungen exakt sind, was bedeutet, dass $\sqrt{2}$ tatsächlich als $\sqrt{2}$ und nicht als 1.414213562373095 behandelt wird) sowie die universelle Weiterverwendbarkeit von Ergebnissen. Mögliche Nachteile, die durch symbolisches Rechnen auftreten können, liegen in der Darstellung umfangreicher (Zwischen-)Ergebnisse oder Rückgabewerte, die keine formelmäßig geschlossenen Ausdrücke darstellen.

Entwicklungsgeschichte kurz und knapp

Mathematische Anforderungen aus dem Bereich der Theoretischen Physik sowie Forschungen zur Künstlichen Intelligenz stießen in den 1960er Jahren die Entwicklung der ersten Computeralgebrasysteme an. Pionierarbeit in diesem Bereich leistete der spätere Nobelpreis-Laureat in Physik Martinus J. G. Veltman, der im Jahr 1963 die Mathematik-Software Schoonschip für symbolisches Rechnen kreierte. Konkret ging es um Berechnungen von Feynman-Diagrammen in der Elementarteilchenphysik. Fast ein Viertel Jahrhundert später platzierte Hewlett-Packard im Jahr 1987 den ersten CAS-Taschenrechner auf dem Markt.

Heute sind Maple und Mathematica die wohl populärsten kommerziellen Computeralgebrasysteme, die von Mathematikern, Ingenieuren, Forschern und sonstigen Anwendern weltweit eingesetzt werden. Eine umfangreiche Liste von Computeralgebrasystemen sowie ihre Gegenüberstellung findet man z. B. unter https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems.

In dieser Liste ist auch das Computeralgebrasystem namens MuPAD enthalten, dessen Entwicklung im Jahr 1990 an der Universität Paderborn mit einem Forschungsprojekt zur Lösung spezieller Problemstellungen im Bereich der dynamischen Systeme begann. MuPAD wurde jedoch sehr bald zu einem universellen Werkzeug zum symbolischen und exakten sowie numerischen Rechnen. Im Februar 1997 wurde das Unternehmen SciFace Software GmbH & Co. KG als Teilausgliederung aus der Universität Paderborn gegründet, um MuPAD in enger Kooperation mit der MuPAD-Forschungsgruppe weiterzuentwickeln und den zunehmenden Anforderungen der Benutzer u. a. hinsichtlich vielfältiger

und mehrsprachiger Dokumentationen zum System und modernen Benutzerschnittstellen gerecht zu werden.

MathWorks entschied sich im Jahr 2008 dazu, MuPAD aufgrund seiner Leistungsfähigkeit in MATLAB zu integrieren, um das symbolische Rechnen noch weiter auszubauen. Seitdem ist MuPAD ein fester Bestandteil der Symbolic Math Toolbox, die folgend vorgestellt werden soll.

Symbolic Math Toolbox

Die Symbolic Math Toolbox stellt eine Vielfalt von Funktionen zur Manipulation symbolischer Ausdrücke, zur symbolischen Lösung von Gleichungen, aber auch zur Durchführung arithmetischer Berechnungen mit variabler Genauigkeit, zum Plotten von Graphen und vieles mehr zur Verfügung. Sie beinhaltet Funktionsbibliotheken zu vielen grundlegenden Gebieten bzw. Bereichen der Mathematik, etwa der Arithmetik, der linearen Algebra, den algebraischen Gleichungen, den gewöhnlichen Differenzialgleichungen sowie zum symbolischen Vereinfachen von Ausdrücken. Eine Auswahl von Themengebieten mit zugehörigen, typischen Funktionen ist in Tabelle 2.1 aufgelistet. Eine aktuelle Liste von weiteren Toolboxen der Produktfamilie MATLAB findet man unter https://de.mathworks.com/products.html.

Tabelle 2.1: Einige Themengebiete sowie Operationen der Symbolic Math Toolbox (Quelle: [Pietruszka 2012, Kap. 1.8], erweitert)

Themengebiet	Operationen
Lösen von Gleichungssystemen	Symbolische und numerische Lösung linearer algebraischer Gleichungen und Differentialgleichungen
Lineare Algebra	Inverse Matrix, Determinante, Eigenwerte, Singulärwerte (SVD), kanonische Formen
Analysis	Differentiation, Integration, Grenzwertbildung, Summation, Taylor-Polynome
Spezielle mathematische Funktionen	Spezielle Funktionen der klassischen angewandten Mathematik, wie etwa der Integralsinus (Sin) oder das Fehlerintegral (erf)
Variable Exaktheitsarithmetik	Numerische Auswertung mathematischer Ausdrücke mit vorgebbarer Genauigkeit
Transformationen	Fourier- ($\mathcal{F}$-), Laplace- ($\mathcal{L}$-), $\mathcal{Z}$-Transformation und zugehörige inverse Transformationen

Mithilfe der Symbolic Math Toolbox ist es z. B. möglich, auf analytische Weise zu differenzieren, zu integrieren, Terme zu vereinfachen, zu transformieren und Gleichungen sowie Gleichungssysteme (linear/nichtlinear) zu lösen. Viele dieser Berechnungen können

sowohl symbolisch, d. h. durch formale Manipulation von Ausdrücken, als auch numerisch, d. h. durch näherungsweise Berechnung von Lösungen, mit wählbarer Genauigkeit durchgeführt werden.

Neben der Symbolic Math Toolbox von MATLAB gibt es weitere Stand-alone Computeralgebrasysteme, siehe Kapitel 12.5, die sich ebenfalls (zum Teil jedoch nur eingeschränkt) zur Umsetzung der mit MATEX verfolgten Ziele eignen würden.

2.4 LATEX auf einen Blick

LATEX ist ein Software-Paket, das die Benutzung des Textsatzsystems TEX mithilfe von Makros vereinfacht. TEX wurde von Donald E. Knuth während seiner Zeit als Informatik-Professor an der Stanford University ab 1977 entwickelt. Im Gegensatz zu anderen Textverarbeitungsprogrammen, die nach dem What-you-see-is-what-you-get-Prinzip funktionieren, arbeitet der LATEX-Autor mit Textdateien, in denen er innerhalb eines Textes anders zu formatierende Passagen oder Überschriften mit Befehlen textuell auszeichnet.

Aufgrund seiner Stabilität, der freien Verfügbarkeit für viele Betriebssysteme und des ausgezeichneten Formelsatzes sowie seiner Features speziell für wissenschaftliche Arbeiten wird LATEX vor allem an Hochschulen eingesetzt. Insbesondere in der Mathematik und den Naturwissenschaften ist LATEX die Standardanwendung für wissenschaftliche Arbeiten und wird auch von Wissenschaftsverlagen und wissenschaftlichen Zeitschriften verwendet. Weitere Informationen und Hinweise zur Installation findet man auf der offiziellen Internetseite des LATEX-Projekts www.latex-project.org/. Empfehlenswert ist das Handbuch [Higham 1998], welche eine sehr ausführliche LATEX-Anleitung für Mathematiker darstellt.

Die Bedienung von MATEX gelingt mühelos auch ohne LATEX-Kenntnisse durch die direkte Ausgabe von Aufgaben im PDF-Format (siehe auch Abschnitt 2.6 – Benutzerschnittstelle). Als Vorstufe zur PDF-Erzeugung nutzt MATEX intern einen LATEX-Quelltext.

Bemerkung: Das vorliegende Buch wurde mit dem LATEX-Textsatzsystem geschrieben. Insbesondere stammen *alle* Aufgaben und ihre Lösungen sowie die Rohfassungen einiger Kapitelelemente (beispielsweise die QR-Codes oder die LATEX-Quelldateien mit den Aufgabensets für einzelne Kapitel) aus der Feder des Software-Roboters MATEX.

Nach den Komponenten der Entwicklungsumgebung richten wir nun unseren Blick auf die softwaretechnisch tragenden Elemente von MATEX – die Aufgabengeneratoren und die Benutzerschnittstelle.

2.5 Aufgabengeneratoren

In der MATEX-Software kommt dem Begriff *Aufgabengenerator* oder kurz *Generator* eine zentrale Rolle zu, der in diesem Werk ca. 400-mal vorkommt und folgend eingeführt werden soll.

Definition: Aufgabengenerator
Mit *Aufgabengenerator* bezeichnen wir eine Funktion der Software MATEX, die für ein konkretes mathematisches Thema und für sinnvolle Eingaben eine Aufgabenstellung in LATEX erzeugt, die Aufgabe analytisch löst und den Lösungsweg (eventuell mit Abbildung) ebenfalls in LATEX-Form ausgibt. Jeder Aufgabengenerator kann bei Bedarf eine Aufgabe zufällig generieren oder aus einem Aufgabenpool zufällig herausgreifen. Die generierten Aufgaben werden aus didaktischer Sicht später im Abschnitt 3.2 charakterisiert.

Die Grundbausteine eines Generators sowie ihre programmiertechnische Umsetzung werden in Kapitel 4 sehr detailliert an einem konkreten Beispiel vorgestellt. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Behandlung einer mathematischen Aufgabenstellung mithilfe des Wechselspiels von MATLAB mit der Symbolic Math Toolbox sowie die Berücksichtigung des LATEX-Textsatzsystems gelegt. Hier skizzieren wir daher lediglich die typischen Arbeitsschritte eines Aufgabengenerators sowie dessen Input und Output.

- Nach dem Empfang eines Aufgaben-Auftrags (Input) zu einem vorgegebenen mathematischen Thema über die in Kapitel 2.6 vorgestellte Webschnittstelle werden von MATEX die Aufgabenparameter an einen entsprechenden Generator übergeben. Neben einer konkreten Aufgabe kann der Auftrag auch eine Zufallsaufgabe adressieren.
- Der Generator legt eine TEX-Datei für eine Aufgabe an und erstellt darin einen LATEX-Quelltext mit einer Aufgabenstellung. Je nach Auftrag wird ein Zufallsgenerator für die Aufgabenparameter vorgeschaltet. Der Zufallsgenerator kann mit zwei unterschiedlichen Modi betrieben werden: Einerseits können Parameter durch einen Zufallsgriff in eine Datenbank aus vorher von Entwicklern ausgewählten Aufgaben (vgl. Aufgaben im Teil II) generiert werden. Andererseits können Eingaben durch eine softwaretechnische Umsetzung einer zufälligen Konstruktion einer Aufgabe (vgl. Programmieraufgabe 4.1.8 bzw. die Quelltexte der Generatoren) erfolgen. Auf dem Server ist die erstgenannte Variante aktiviert.
- Die Grundstruktur der Aufgabenstellung sowie der zugehörigen Lösung wurde von den Entwicklern (inspiriert durch Fachliteratur) für jeden Generator vorgegeben. Die Leistung von MATEX besteht darin, dass man die Aufgabe beliebig variieren kann und, dass MATEX mithilfe der Symbolic Math Toolbox die Rechnungen zu den Eingaben selbst durchführt und entsprechend nachvollziehbar darstellt. Die mathematische Aufgabe wird also vom Generator folgend einer vorgegebenen Struktur aufgestellt bzw. algebraisch-analytisch gelöst. Dabei wird der zugehörige mathematische Lösungsweg mit LATEX gesetzt (Verschriftlichung der Lösung) und die oben angelegte LATEX-Datei ergänzt.
- Im Bedarfsfall wird vom Generator eine Abbildung erstellt und im obigen LATEX-Quelltext eingebunden.

- Anschließend kompiliert MATEX die aufgestellte LATEX-Datei und stellt den Output (LATEX-Quelltext, PDF-Aufgaben-/Lösungsdatei, Grafikdateien) per Webschnittstelle dem Benutzer zur Verfügung, siehe Kapitel 2.6.

2.6 Benutzerschnittstelle

Qualitativ hochwertige Mensch-Maschine-Schnittstellen zeichnen sich dadurch aus, dass sie an die Bedürfnisse der Benutzerin bzw. des Benutzers und an ihre bzw. seine Fähigkeiten bestmöglich angepasst sind. Einfachstes Handling und geringe technische Voraussetzungen sind hierbei wichtige Erfolgsfaktoren. Idealerweise ist eine solche Schnittstelle intuitiv bedienbar und selbsterklärend. Schulungs- oder/und Lernaufwand sollten minimal sein. Der Begriff der *Reduktion* ist ein zentrales Kriterium bei der Entwicklung von Benutzerschnittstellen. Eine Reduktion des Zugangs zu einer komplexen Maschine auf nur wenige Bedienelemente kann die Bedienbarkeit grundsätzlich erleichtern, wird aber oft der Komplexität der Maschine nicht in vollem Umfang gerecht. Einem solchen Zielkonflikt kann man im Fall eines sehr komplexen Betriebssystems bei einem modernen Computer etwa durch Einführen zweier Kategorien von Benutzerschnittstellen entgegenwirken: Die eine zeigt dem Anwender alle in alltäglichen Anwendungssituationen notwendigen Icons, den Papierkorb, die wichtigsten Ordner usw., die er ohne Lernaufwand sofort verstehen und bedienen kann. Die andere ermöglicht ihm, über die Kommandozeilenoberfläche tiefer in das Betriebssystem einzugreifen, erfordert jedoch einen bestimmten Lernaufwand.

Webschnittstelle

Um MATEX einem breiten Nutzerkreis zugänglich zu machen, wurde eine *Webschnittstelle* auf Basis von HTML/CSS, JavaScript, PHP und MySQL geschaffen, die unter der URL

www.matex-online.de

erreichbar ist, vgl. dazu [Klimke 2003]. Dadurch wird ein wichtiger Aspekt der Gebrauchstauglichkeit (engl. usability) des Systems, nämlich die *Konsistenz*, gewährleistet. Sie erleichtert die Zugänglichkeit eines Produktes dahingehend, dass Wissen von anderen, ähnlichen Produkten übernommen werden kann. Folgend ist die Bedienung konsistenter Interfaces intuitiv oder zumindest schneller zu erlernen. Mit der Schnittstelle ist es zum einen möglich, MATEX auch ohne eine MATLAB-Installation zu nutzen. Zum anderen wird der Zugang zu MATEX bzgl. Syntax, Eingabefehlern und Bedienung vereinfacht und

vom Betriebssystem unabhängig. Die Webschnittstelle dient dabei als Mittler zwischen den Benutzereingaben und den aufzurufenden MATEX-Befehlen sowie den von MATEX generierten Ausgaben, die als Download bereitgestellt werden.

Der Inhalt eines Auftrags, den ein Benutzer an MATEX richtet, muss bestimmten, vorgegebenen Regeln folgen, die dank der Eingabemasken der Webschnittstelle einfach einzuhalten sind. Bei manchen Aufgabengeneratoren muss der Benutzer u. a. mathematische Terme in MATLAB-Syntax über eine Tastatur oder ein Taschenrechnereingabefeld der Webschnittstelle eingeben, was im Wesentlichen einer Kommandozeilen-Benutzerschnittstelle (englisch: Command Line Interface, CLI) entspricht. Die prinzipielle Bedienung von MATEX wird unten erläutert. Konkrete Anweisungen für die Eingabe zu einzelnen Fachthemen findet man in den grau hinterlegten Texten im Teil II dieses Werkes bzw. können unter der obigen URL der Webschnittstelle nachgeschlagen werden. Aktuell können mit MATEX parametrisierte Aufgabentypen inklusive Lösungen zu 33 Themenbereichen der elementaren Höheren Mathematik erstellt werden.

Programmablauf

Nach erfolgreicher Registrierung gelangt der Benutzer auf eine Übersichtsseite (siehe Abb. 2.3), in der er alle grundlegenden Aktionen ausführen kann. Hier kann er z. B. einen Generator auswählen (Button „Durchsuchen“ [Symbol: Lupe]) oder frühere Ergebnisse aufrufen (Button „Historie“ [Symbol: Büroklammer]).

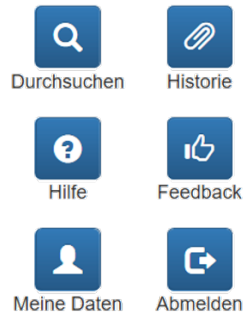

Abb. 2.3: Startseite: Auswahlmenü

Wird ein Generator ausgewählt, gelangt der Benutzer auf eine Ansicht mit folgenden Elementen (siehe Abb. 2.4):

- Toolbar mit Buttons z. B. für die Erstellung eines QR-Codes, der direkt zum angezeigten Generator mit den momentan eingegebenen Parametern führt.
- Titel und Kurzbeschreibung des Generators, in der alle Eingabeparameter definiert werden.