

Robert Dehnert

Entwurf robuster Regler mit Ausgangsrückführung für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme



Springer Vieweg

Entwurf robuster Regler mit Ausgangsrückführung für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme

Robert Dehnert

Entwurf robuster Regler mit Ausgangsrückführung für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme

 Springer Vieweg

Robert Dehnert
Wuppertal, Deutschland

Zugl.: Genehmigte Dissertation Bergischen Universität Wuppertal, 2019

ISBN 978-3-658-29899-9 ISBN 978-3-658-29900-2 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-29900-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

für Sarah

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Bergischen Universität Wuppertal. Zunächst danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Tibken für die Möglichkeit, diese Arbeit unter seiner Betreuung zu erstellen. Dabei konnte ich einen stets menschlichen Umgang auf Augenhöhe und besonders angenehme Arbeitsbedingungen genießen. Vielen Dank für den freundschaftlichen Umgang, die kompetenten fachlichen Anreize sowie die nötigen Freiheiten und das Vertrauen. PD Dr.-Ing. habil. Andreas Rauh bin ich für die Übernahme des Korreferats und die kritische sowie aufmerksame Durchsicht der Arbeit sehr verbunden.

Danken möchte ich auch meinen Kollegen am Lehrstuhl für die fachlichen Diskussionen und den stets offenen und kollegialen Umgang miteinander. Besonderer Dank gilt Frau Sabine Lerch und Herrn Thomas Paradowski für die fachliche Durchsicht meiner Arbeit. Des Weiteren danke ich Frau Regina Munsch und Herrn Phillipp Kade für das penible Korrektorat, wobei hervorzuheben sei, dass Frau Regina Munsch die Arbeit zweimal durcharbeitete.

Besonderer Dank gilt meinen Schwiegereltern Gabriele und Ralf Klein, die mich auf meinem Weg stets gefördert und tatkräftig unterstützt haben. Meiner Mutter Dagmar Dehnert danke ich dafür, dass sie mir gezeigt hat, die kleinen Dinge im Leben zu schätzen und wahrzunehmen. Dadurch wurde ich zu dem Menschen, der ich bin und war in der Lage diese Arbeit anzufertigen. Meinem Vater Adalbert Gollbach gilt besonderer Dank für die fortwährende Unterstützung und die großartige Fähigkeit, mich auf den Boden der Tatsachen zurückzuführen.

Und nicht zuletzt danke ich meiner Frau Sarah Dehnert, die immer bedingungslos zu mir hält. Danke für den Zuspruch, die Geduld und die Unterstützung.

Wuppertal, im Februar 2020

Robert Dehnert

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	XI
1 Einführung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung	1
1.2 Aufbau der Arbeit	4
2 Grundlagen	7
2.1 Konvexität	7
2.2 Lineare Matrixungleichungen	9
2.3 Systembeschreibung und Eigenschaften	16
2.4 Stabilität	17
2.5 Parameterunsicherheiten	20
2.6 Robuste Stabilitätsprüfung	22
2.7 Regelungen mittels Ausgangsrückführung	24
2.8 Performance	36
2.9 Stellgrößenbeschränkungen	50
3 Problemstellung und Stand der Forschung	67
3.1 Problemstellung	67
3.2 Stand der Forschung	71
3.3 Ziel der Arbeit	79
4 Neue Methoden für den Reglerentwurf	81
4.1 Allgemeiner Teil	81
4.2 Basialgorithmus	84
4.3 Erweiterung 1: Robustheit	92
4.4 Erweiterung 2: Performance	97
4.5 Erweiterung 3: Sättigende Ausgangsrückführungen	110
4.6 Beispiele	122
5 Fazit	153

A	Grundlegende Ergänzungen	157
B	Pseudocodes	167
C	Numerische Ergänzungen	171
	Literaturverzeichnis	185

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

LMI	Lineare Matrixungleichung (engl. linear matrix inequality)
LQR	Linear quadratische Regelung
LTI	Linear zeitinvariant (engl. linear time-invariant)
MIMO	System mit mehreren Ein- und Ausgängen (engl. multiple input, multiple output)
PID	Proportional, Integral, Differential
SDP	Semidefinite Programmierung
SIMO	System mit einem Eingang und mehreren Ausgängen (engl. single input, multiple output)
SISO	System mit einem Ein- und Ausgang (engl. single input, single output)
ZRD	Zustandsraumdarstellung

Notation

Im Rahmen dieser Arbeit werden die folgenden Schreibkonventionen für Matrizen und Vektoren verwendet. Große kursive und fette Buchstaben bezeichnen Matrizen. Spaltenvektoren werden durch kleine kursive und fette Buchstaben und Skalare durch kleine und kursive Buchstaben gekennzeichnet. Die Transponierte einer Matrix oder eines Vektors wird mit einem hochgestellten T gekennzeichnet. Ein transponierter Vektor ist grundsätzlich ein Zeilenvektor. Im folgenden werden alle Symbole aufgelistet, die nicht nur lokal verwendet werden.

Symbole

O	Nullmatrix
A	Systemmatrix der Regelstrecke
$\mathcal{A}$	Systemmatrix der erweiterten ZRD
$\mathcal{A}_R$	Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$
$\hat{\mathcal{A}}_R$	Transformierte Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}$
$A_K, B_K,$ C_K, D_K	Regelparameter der dynamischen Ausgangsrückführung
B	Eingangsmatrix der Regelstrecke
$\mathcal{B}$	Eingangsmatrix der erweiterten ZRD
$\mathcal{B}_w$	Eingangsmatrix des geschlossenen Regelkreises
C	Ausgangsmatrix der Regelstrecke
C_H, D_H	Hilfsparameter der dynamischen Ausgangsrückführung
C_z	Ausgangsmatrix des geschlossenen Regelkreises
$\mathcal{C}$	Positiv invariante Menge
$\text{conv}(\cdot)$	Konvexe Hülle
$d[k]$	Zustandsvektor eines D-Reglers
$\ D_{\text{lin}}\ _F$	Frobeniusnorm der Differenz $P^{-1} - L$
D_q, D_q^-	Elemente der Menge $\mathcal{D}$
$\mathcal{D}$	Menge von $m \times m$ Diagonalmatrizen
$e_B[k]$	Schätzfehler des Beobachters
$e_R[k]$	Regelfehler des PID-Reglers
E	Einsmatrix
E_K	Zusätzlicher Parameter zur Berücksichtigung der Sättigung in der Reglerdynamik
$\mathcal{E}(P)$	Ellipsoid einer Ljapunow-Matrix
$G(z)$	Übertragungsmatrix
$\ G\ _2$	H_2 -Norm einer Übertragungsmatrix
$\ G\ _\infty$	H_∞ -Norm einer Übertragungsmatrix
$\mathcal{G}$	Einzugsgebiet einer Ruhelage x_R bzw. kontraktiv positiv invariante Menge
H/h^T	Hilfsparameter der Zustandsrückführung
$\mathcal{H}$	Hilfsparameter einer Ausgangsrückführung

$\mathbf{H}_P, \mathbf{H}_I, \mathbf{H}_D$	Hilfsparameter der PID-Regelung
$\mathbf{i}[k]$	Zustandsvektor eines I-Reglers
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
J	Quadratisches Gütekriterium der LQ-Regelung
k	Zeitvariable der Abtastfolge bzw. Zählvariable (doppelt belegt)
$\mathbf{K}/\mathbf{k}^T$	Matrix/Vektor der Zustandsrückführung bzw. statischen Ausgangsrückführung
$\mathcal{K}$	Regelparameter einer Ausgangsrückführung
$\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_D$	Regelparameter der PID-Regelung
l	Anzahl der Zustände des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{L}$	Lineare Approximation von $\mathbf{P}^{-1}$ für die Stützstelle $\hat{\mathbf{P}}$
$\mathcal{L}(\mathbf{K}), \mathcal{L}(\mathcal{K})$	Lineares Gebiet eines sättigenden Regelgesetzes
m	Anzahl der Stellgrößen, Eingangsgrößen des Systems
$\mathcal{M}$	Konvexe Menge
n	Anzahl der Zustände der Regelstrecke, Systemordnung
$\mathbf{N}$	Matrix der Beobacherverstärkungen bzw. zusätzliche Entscheidungsvariable (doppelt belegt)
N	Eckenzahl einer konvexen Hülle
N_δ	Eckenzahl einer konvexen Hülle der Unsicherheiten
N_{x_0}	Eckenzahl einer konvexen Hülle der Anfangswerte
$\mathcal{N}$	Nullregelbares Gebiet
p	Anzahl der Regelgrößen, Ausgangsgrößen des Systems
$\mathbf{P}$	Ljapunow-Matrix
$\hat{\mathbf{P}}$	Stützstelle für die Linearisierung von $\mathbf{P}^{-1}$
q	Anzahl der Ausgänge des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{Q}$	Gewichtungsmatrix einer LQ-Regelung der Zustände
r	Radius eines Kreises in der komplexen Ebene bzw. Anzahl der Eingänge des geschlossenen Regelkreises (doppelt belegt)
r_{test}	Zu überprüfender Radius r
r_Δ	Adaptive Schrittweite für die Verringerung des Radius r
$\mathbf{R}$	Gewichtungsmatrix einer LQ-Regelung der Eingänge
$\mathbf{S}$	Vorfilter
$\text{sat}(\cdot)$	Sättigungsfunktion
t	Zeit

T_a	Abtastzeit
$\mathbf{u}[k]$	Stellgrößen, Eingangsvektor der Regelstrecke
$u_{\max,j}$	Maximaler Betrag der beschränkten Stellgröße $u_{s,j}$
$\mathbf{u}_s[k]$	Beschränkter Eingangsvektor der Regelstrecke
V	Ljapunow-Funktion
$\mathbf{w}[k]$	Eingangsvektor des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{W}, \mathbf{G}$	Zusätzliche Entscheidungsvariablen
$\mathbf{x}[k]$	Zustandsvektor der Regelstrecke
$\hat{\mathbf{x}}[k]$	Zustandsvektor des Beobachters bzw. der dynamischen Ausgangsrückführung (doppelt belegt)
$\tilde{\mathbf{x}}(k)$	Zustandsvektor des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0$	Anfangswerte für den Zustandsvektor bei $k = 0$
$\mathbf{x}^I$	Intervallvektor
$\mathbf{x}_R, \tilde{\mathbf{x}}_R$	Ruhelage
$\mathbf{X}^{-1}$	Invertierte Matrix
$\mathbf{X}^T$	Transponierte Matrix
$\mathbf{X}_{i,j}$	Element einer Matrix, i -te Zeile, j -te Spalte
$\mathbf{y}[k]$	Regelgrößen, Ausgangsvektor der Regelstrecke
$\mathbf{z}[k]$	Ausgangsvektor des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{Z}$	Schlupfvariable bzw. Zufallsmatrix (doppelt belegt)
α	Shiftoperator für die Eigenwerte in der komplexen Ebene bzw. Variable einer Konvexkombination (doppelt belegt)
β	Abklingrate
δ	Intervallvektor der Unsicherheiten
δ_i	i -te Unsicherheit mit den Schranken $\delta_i \in [\underline{\delta}_i, \bar{\delta}_i]$
γ	Zielfunktion der Optimierung eines Gütekriteriums
λ	Variable einer konvexen Menge
λ_i	i -ter Eigenwert
μ	Gewichtungsfaktor
$\rho(\mathbf{X})$	Spektralradius der Matrix $\mathbf{X}$
σ_i	i -ter Singulärwert
ϑ	Zielfunktion des Basisalgorithmus



1 Einführung

Die Aufgabe der Regelungstechnik besteht darin, ein technisches System von außen zu beeinflussen, sodass sich das System wunschgemäß verhält. Dieses Ziel ist erreichbar, wenn die Komponenten des Regelkreises reibungslos zusammen agieren. Dann führt eine Regelung aufgrund von Beobachtungen (Messungen) automatisch Stelleingriffe für ein System durch, um den erwünschten Zustand des Systems zu erreichen oder zu bewahren. Das Hauptproblem bei diesem Vorgehen ist die Tatsache, dass bei nahezu allen Systemen die Auswirkung des Stelleingriffs nicht unmittelbar erfolgt. Es kommt durch die Dynamik des zu regelnden Prozesses zu zeitlichen Verzögerungen zwischen Stelleingriff und gemessener Systemreaktion. Durch Vernachlässigung der Dynamik eines Prozesses kann es zu instabilem Verhalten des geregelten Systems kommen. So ist es die Aufgabe der Regelungstechnik, Regelungen für technische Systeme zu entwerfen, sodass sich ein stabiles Systemverhalten in den zulässigen Arbeitsbereichen ergibt und dem vorgegebenen Systemverhalten möglichst genau Folge geleistet werden kann. Das Verhalten des Regelkreises wird dabei maßgeblich durch die Struktur des Reglers sowie die Wahl der Reglerparameter beeinflusst. Aufgrund dessen beschäftigt sich diese Arbeit mit der Reglersynthese, also der Bestimmung von Reglerparametern verschiedener Regelstrukturen.

1.1 Motivation und Zielsetzung

Digitale Steuergeräte, die in Verbindung mit elektrischen Aktoren und Sensoren zu Regelkreisen verbunden werden, ermöglichen die Verwendung digitaler Regler in modernen Steueranlagen. Durch die steigende Leistungsfähigkeit der Anlagen und durch die wachsende Anzahl elektrischer Sensoren und Aktoren werden die zu regelnden Prozesse fortlaufend komplexer. Gleichzeitig steigen beispielsweise die Anforderungen bezüglich der Effizienz und des Komforts, die an ein technisches System gestellt werden, wodurch das Zusammenspiel der im Regelkreis enthaltenen Komponenten ständigen Verbesserungen unterliegt. Um der Herausforderung hinsichtlich der Komplexität und der

Anforderungen beim Entwurf einer Mehrgrößenregelung systematisch zu begegnen, sind spezielle Verfahren der Reglersynthese nötig.

Die dazu betrachtete Systemklasse umfasst zeitdiskrete lineare Mehrgrößensysteme (MIMO-Systeme). Der direkte zeitdiskrete Entwurf wird angestrebt, um die Implementierbarkeit der Regelungen in digitalen Prozessrechnern zu erleichtern. Da es sich bei nahezu allen größeren Systemen um komplexe Konstrukte handelt, die über mehrere Eingänge (Stellgrößen) sowie mehrere Ausgänge (Messgrößen) verfügen und gleichzeitig auszuregeln sind, soll der Reglerentwurf für ein solches Mehrgrößensystem zentral, d. h. für alle Eingangs-Ausgangskombinationen gleichzeitig erfolgen.

In der Regel beeinflusst eine Stellgröße mehrere oder alle Messgrößen. Dieser Einfluss einer jeden Stellgröße auf die Messgrößen eines Systems wird als systeminterne Kopplung bezeichnet. Beispiele für Regelungsaufgaben verkoppelter Mehrgrößensysteme sind der Autopilot einer Flug- oder Helikopterregelung, das autonome Fahren, die Regelung eines Biogasreaktors oder einer Gas-Brennwert-Kombitherme sowie die Positionierung einer Verladebrücke. Im industriellen Umfeld sowie in der klassischen Regelungstechnik werden die Kopplungen häufig vernachlässigt. Hier werden im Entwurf der Regelung die Stellgrößen nur den zugehörigen Messgrößen zugeordnet, wodurch das Mehrgrößensystem durch mehrere Eingrößensysteme (SISO-Systeme) beschrieben wird. Die Vernachlässigung der Kopplungen kann dazu führen, dass die Anforderungen an die Regelung trotz hoher Stellenergie nicht erreicht werden. Es kann vorkommen, dass sich die Stellgrößen der einzelnen SISO-Regelungen gegenseitig aufheben oder verstärken und in der Folge gegeneinander wirken, was ein unerwünschtes Systemverhalten verursachen kann. Weiterhin kann dieses Verhalten zu Instabilitäten führen. Für Mehrgrößensysteme sind nicht mehr alle aus der linearen Regelungstheorie bekannten und für Eingrößensysteme gültigen Verfahren direkt anwendbar.

Eine Einschränkung, der dabei alle technischen Systeme unterliegen, ist die Begrenzung der Stellgrößen. So ist beispielsweise ein Ventil nicht weiter als vollständig zu öffnen oder der maximale Auslenkwinkel eines Schiffsruders konstruktiv beschränkt. Die Stellgrößenbeschränkungen stellen im Wesentlichen statische Nichtlinearitäten innerhalb des Systemmodells dar, weshalb lineare Methoden auch hier nicht ohne Weiteres verwendbar sind. Da die Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen im Entwurf einer Regelung eine Herausforderung darstellt, werden diese neben den systemin-

ternen Kopplungen häufig im Entwurf vernachlässigt und erst im späteren Betrieb berücksichtigt. Das Vernachlässigen der Stellgrößenbeschränkungen kann gravierende Folgen haben und zu Einbußen in der Regelgüte oder zum Verlust der Stabilität führen, was wiederum die Zerstörung des Systems hervorrufen kann.

Da alle realen technischen Systeme Nichtlinearitäten enthalten, ist die lineare Systemtheorie nur exakt, wenn sich das System im Arbeitspunkt befindet, in dem es linearisiert wurde. Darüber hinaus gehen klassische Entwurfsmethoden davon aus, dass der zu regelnde Prozess zuvor exakt mathematisch modelliert wurde. Wenn der Entwurf einer Regelung anhand eines solchen linearen Modells erfolgt, ist die Regelung auch nur für den Arbeitspunkt gültig und exakt eingestellt. Für reale Prozesse sind jedoch die Parameter sowie die Modellstruktur oftmals aufgrund von Messfehlern oder andern Ungenauigkeiten nicht exakt genug bestimmbar, was wiederum zu Abweichungen des Modells vom realen Prozess führt. Durch Auslenkung aus dem Arbeitspunkt oder Ungenauigkeiten in der Modellbildung kann es auch hier zu einer Verschlechterung der Regelgüte oder zu instabilem Verhalten kommen.

Was muss also im Entwurf der Regelung verändert werden, um Methoden der linearen Regelungstheorie für zeitdiskrete lineare verkoppelte Mehrgrößensysteme unter Berücksichtigung von Unsicherheiten und Stellgrößenbeschränkungen anwenden zu können? Diese Frage wird dadurch beantwortet, dass die Regelung, die anhand des linearen Modells berechnet wird, robust gegenüber diesen Effekten und Einschränkungen ausgelegt werden muss. Darum umfasst die vorliegende Arbeit ein Entwurfsverfahren für robuste Mehrgrößenregelungen. Dabei soll es der Regelung erlaubt werden, Stellgrößen zu erzeugen, die in die Begrenzungen gelangen dürfen. Gleichzeitig soll die robuste Stabilität über den gesamten Betriebsbereich und für alle zulässigen Unsicherheiten durch das Entwurfsverfahren sichergestellt sein.

Das Entwurfsverfahren solcher robusten Regelungen soll so komplex wie nötig, jedoch so unkompliziert wie möglich sein. Aus diesem Grund soll ein linearer Reglerentwurf erfolgen, der auf linearen Modellen basiert, jedoch robust hinsichtlich der obigen Anforderungen ist. So verlangt der Reglerentwurf an einem Modell, bestehend aus komplexen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, mehr Aufwand als an einem Modell, dass aus gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen besteht. Weiterhin weist

der entworfene Regler durch die Verwendung linearer Modelle meist eine unkomplizierte Struktur und eine geringere Komplexität auf. Dadurch wird die Implementierbarkeit und der Betrieb erleichtert und der Regler greift nachvollziehbar in den Prozess ein, wodurch solchen Reglern im industriellen Umfeld große Bedeutung zugemessen wird. Die Strukturen solcher Standardregler basieren auf den messbaren Ausgängen des zu regelnden Systems und sind beispielsweise PID-Regelungen oder Zustandsregelungen mit Beobachtern und deren Kombinationen.

Die genannten Anforderungen und die daraus resultierenden Probleme stellen die Herausforderungen dieser Arbeit dar und motivieren dazu, Regelungen für zeitdiskrete Mehrgrößensysteme unter Berücksichtigung des beschriebenen Anspruchs zu entwerfen. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, eine Entwurfsmethode zu entwickeln, die diese Anforderungen erfüllt und zudem numerisch effizient ist.

Eine Möglichkeit, Mehrgrößenregelungen für lineare Systeme zu entwerfen, bietet die Verwendung der Stabilitätstheorie nach Ljapunow in Verbindung mit der Zustandsraumdarstellung. Der Reglerentwurf mittels eines solchen Ljapunow-Ansatzes führt auf lineare Matrixungleichungen (LMIs), für die numerisch effiziente Lösungsmethoden existieren. Zudem bietet ein Ljapunow-Ansatz den Vorteil, einen Stabilitätsbeweis für den Regelkreis parallel zum Entwurf der Regelung zu liefern. Die Einbindung von Kenngrößen für ein wünschgemäßes Systemverhalten ist ebenfalls möglich. Die Berücksichtigung von Unsicherheiten und Stellgrößenbeschränkungen kann durch die Beschreibung mittels konvexer Hüllfunktionen realisiert werden, was auf robuste LMIs führt. Aufgrund dieser Vorteile wird in der vorliegenden Arbeit ein Ljapunow-Ansatz für den Entwurf von Mehrgrößenregelungen erarbeitet.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach der Einführung in die Thematik wird in Kapitel 2 das theoretische Fundament der Arbeit gelegt. In Kapitel 3 wird nach der Erarbeitung der Problemstellung der Stand der Forschung wiedergegeben. Weiterhin wird die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit konkretisiert. In Kapitel 4 werden zunächst die erarbeiteten Methoden detailliert untersucht und die Vorteile gegenüber den in der Literatur auffindbaren Methoden dargelegt. Um den Anforderungen an die Entwurfsmethode zu genügen, werden mögliche

Erweiterungen zur Berücksichtigung von potenziellen Unsicherheiten und Stellgrößenbegrenzung sowie für ein wunschgemäßes Systemverhalten diskutiert. Abschließend werden die neuen Methoden anhand von Beispielen aus der Literatur verifiziert. Schlussendlich beinhaltet das Kapitel 5 das Fazit. Der Anhang enthält neben den numerischen Lösungen für die Beispiele verschiedene Pseudocodes zur Veranschaulichung der Implementierung der Methoden. Darüber hinaus beinhaltet der Anhang weitere Simulationsergebnisse für die Beispiele und ergänzende Erläuterungen.



2 Grundlagen

Dieses Kapitel beinhaltet neben den Grundlagen der linearen Matrixungleichungen regelungstechnische Grundlagen für zeitdiskrete Systeme und Regelungen. Auf weiterführende Literatur wird an entsprechender Stelle hingewiesen. Weiterhin finden sich im Anhang A ergänzende grundlegende Informationen zu relevanten Themen.

2.1 Konvexität

Die vorgestellten Entwurfsmethoden können anhand von konvexen Optimierungsproblemen formuliert werden. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle der Begriff der Konvexität eingeführt. Dieser wird sowohl für Mengen als auch für Funktionen verwendet. Für weiterführende Literatur sei auf [69] verwiesen. Zudem wird der Begriff der konvexen Hülle benötigt. Hiermit lassen sich mittels LMIs verschiedene Erweiterungen in die Entwurfsmethode einbinden, sodass beispielsweise Unsicherheiten, Beschränkungen der Stellgrößen und zulässige Gebiete für Anfangswertbedingungen durch konvexe Hüllen untersucht werden können.

Definition 2.1. *Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$ auch für die Strecke*

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathcal{M} \text{ mit } \lambda \in [0 \ 1]$$

gilt [69].

Die Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten aus $\mathcal{M}$ muss demnach vollständig in $\mathcal{M}$ liegen. Diese Eigenschaft ist beispielsweise bei Ellipsoiden, Quadern und bestimmten Polyedern gegeben.

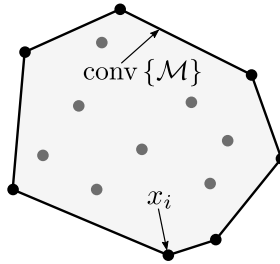


Abbildung 2.1: Konvexe Hülle; schwarz: diejenigen Punkte, die die Ecken des Hüllpolygons von $\mathcal{M}$ darstellen; grau: diejenigen Punkte, die innerhalb der konvexen Hülle $\text{conv}\{\mathcal{M}\}$ liegen

Definition 2.2. Eine Funktion f heißt konvex in $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, wenn $\mathcal{M}$ konvex ist und

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) \quad \text{mit } \lambda \in [0, 1]$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$ gilt.

Der Graph einer Funktion muss demnach unterhalb oder auf jeder Verbindungsstrecke zweier seiner Punkte liegen. Diese Eigenschaft ist beispielsweise bei allen linearen oder bei eindimensionalen Funktionen wie x^2 , $|x|$ gegeben. Die quadratische Form $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, die später für die Entwurfsmethode benötigt wird, ist ebenfalls eine konvexe Funktion.

Definition 2.3. Es sei eine konvexe Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Gemäß [13] sei die konvexe Hülle dieser Menge definiert durch die Menge aller endlichen Konvexkombinationen

$$\text{conv}\{\mathcal{M}\} = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \mid x_i \in \mathcal{M}, N \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (2.1)$$

Die konvexe Hülle von $\mathcal{M}$ ist dann die kleinste konvexe Menge, in der $\mathcal{M}$ enthalten ist, siehe Abbildung 2.1. Der Zusammenhang (2.1) stellt eine Linearkombination aller x_i dar und wird als Konvexkombination bezeichnet, wenn deren Koeffizienten α_i aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ stammen und deren Summe eins ergibt. Anders ausgedrückt kann jeder Punkt x , der sich innerhalb der konvexen Hülle $\text{conv}\{\mathcal{M}\}$ befindet, durch die Konvexkombina-

tion der Eckpunkte x_i der konvexen Hülle abgebildet werden. Beispielsweise ist die konvexe Hülle zweier Punkte a, b ihre Verbindungsstrecke

$$\overline{ab} := \text{conv} \{a, b\} = \lambda a + (1 - \lambda) b \text{ mit } \lambda \in [0, 1],$$

was wiederum der Definition 2.1 entspricht. Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte ist schließlich ein konvexes Polytop.

2.2 Lineare Matrixungleichungen

In der Regelungstechnik lassen sich zahlreiche Aufgabenstellungen durch Verwendung von linearen Matrixungleichungen (LMIs) als konvexe Optimierungsaufgaben formulieren [21]. Dazu werden allgemein nichtlineare Matrixungleichungen in LMIs überführt. Beispielsweise können durch LMIs Ljapunow- und Riccati-Ungleichungen sowie Matrixnorm-Ungleichungen, wie sie bei einem H_2/H_∞ -Verfahren verwendet werden, numerisch effizient und zuverlässig gelöst werden [138, 139]. Auch in dieser Arbeit führt die Formulierung der Problemstellung auf LMIs, weshalb hier eine kurze Einführung in das Thema gegeben wird und alle benötigten Grundlagen und Eigenschaften erörtert werden. Weiterführende Literatur bietet das Tutorium [138] oder das Standardwerk auf dem Gebiet der Linearen Matrixungleichungen in der Regelungstechnik [21]. In den Dissertationen [39, 84, 124, 125] sind schlüssige Zusammenfassungen zu finden. Detaillierte und weiterführende Beschreibungen zu LMI-Techniken enthalten [40, 121, 135].

Definition 2.4. *Eine positiv definite lineare Matrixungleichung (LMI) sei durch*

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{j=1}^q z_j \mathbf{F}_j > \mathbf{0} \quad (2.2)$$

definiert.

Die reell symmetrischen Matrizen $\mathbf{F}_j$ mit $j = 0, \dots, q$ seien bekannt. Der Matrixausdruck $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ ist affin-linear von q skalaren Entscheidungsvariablen z_j abhängig, die in dem Vektor $\mathbf{z}$ zusammengefasst werden. Da die Entscheidungsvariablen z_j nur linear eingehen, wird die Ungleichung (2.2) als LMI

bezeichnet. Die Notation $\mathbf{F}(\mathbf{z}) > \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{F}(\mathbf{z}) < \mathbf{0}$ bedeutet, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ positiv bzw. negativ definit ist. Zudem wird sie als strikte lineare Matrixungleichung bezeichnet. Wird $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \geq \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}$ gefordert, ist die Ungleichung (2.2) nicht strikt und somit positiv bzw. negativ semidefinit. Nicht strikte LMIs lassen sich stets in strikte LMIs umformen [21]. Weiterhin können Lösungsalgorithmen aus numerischen Gründen nicht zwischen strikten und nicht strikten LMIs unterscheiden [92], weshalb im Folgenden strikte LMIs verwendet werden. Für den Umgang mit LMIs stehen Rechenregeln und Eigenschaften zur Verfügung, die deren Handhabung vereinfachen.

Eigenschaften

Die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften werden im Folgenden aufgelistet.

1. Die Menge $\{\mathbf{z} | \mathbf{F}(\mathbf{z}) > \mathbf{0}\}$ ist konvex.
2. $\mathbf{F}(\mathbf{z}) > \mathbf{0} \iff -\mathbf{F}(\mathbf{z}) < \mathbf{0}$
3. Wenn $\mathbf{F}_1(\mathbf{z})$ und $\mathbf{F}_2(\mathbf{z})$ von gleicher Dimension sind, gilt

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{z}) > \mathbf{F}_2(\mathbf{z}) \iff \mathbf{F}_1(\mathbf{z}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{z}) > \mathbf{0}.$$

4. Mehrere LMIs können zu einer Bedingung zusammengefasst werden, sodass

$$\begin{array}{l} \mathbf{F}_1(\mathbf{z}) > \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_r(\mathbf{z}) > \mathbf{0} \end{array} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{z}) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{F}_r(\mathbf{z}) \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

gilt.

5. Es gilt die Kongruenz-Transformation

$$\mathbf{M}^T \mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{M} > \mathbf{0} \iff \mathbf{F}(\mathbf{z}) > \mathbf{0} \quad (2.3)$$

für eine reguläre $n \times n$ Matrix $\mathbf{M}$. Durch die Regularität der Transformationsmatrix $\mathbf{M}$ ändert sich die Definitheit der zu überprüfenden