DUDEN

ABI GENIAL

MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Mit **Originalprüfungen** und **Musterlösungen** online auf www.lernhelfer.de

Meilensteine der Mathematik

um 325 v. Chr.
Euklid von Alexandria entwickelt einen axiomatischen Aufbau der Geometrie

287–212 v. Chr.
Archimedes von Syrakus bestimmt Flächeninhalte an Parabeln und Kreisen, die Oberfläche und das Volumen der Kugel

1636
Pierre de Fermat konzipiert grundsätzlich die analytische Geometrie

1637
René Descartes führt Koordinatensysteme zur algebraischen Behandlung geometrischer Probleme ein

1654
Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Briefwechsel zwischen Chevalier de Méré und Blaise Pascal zum Glücksspiel

1664–1666
Isaac Newton entwickelt seine Fluxionsrechnung

1673–1676
Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelt die Grundlagen der Infinitesimalrechnung

1755
Funktionen werden zum Gegenstand der Differenzialrechnung bei Leonard Euler

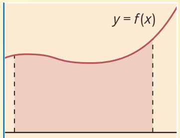
1794
Carl Friedrich Gauß verwendet die mittlere quadratische Abweichung als Streuungsmaß

1812
Pierre Simon Laplace veröffentlicht die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1831
Carl Friedrich Gauß führt den Begriff der komplexen Zahl ein

1837
Siméon Denis Poisson gibt Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung an

1843
William Roward Hamilton definiert das Skalarprodukt



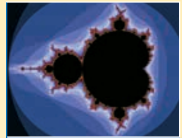
1854
Neufassung des Begriffs des Integrals durch Georg Friedrich Bernhard Riemann

1888
Giuseppe Peano gibt eine axiomatische Definition des Vektorraums

1899
David Hilbert stellt ein Axiomensystem der Geometrie ohne explizite Definition der Begriffe Punkt und Gerade auf

1918
Richard von Mises entwickelt eine statistische Wahrscheinlichkeitstheorie

1933
Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff formuliert endgültig ein Axiomensystem zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung



1975
Benoît Mandelbrot entdeckt universelle Strukturen in nicht linearen dynamischen Systemen

1995
Andrew Wiles gelingt der Beweis der fermatschen Vermutung

Duden

ABI GENIAL

MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Dudenverlag
Berlin

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen

Wichtige Definitionen

Abbildungen

Eine **Abbildung** ordnet den Elementen einer Menge D durch eine Vorschrift Elemente einer Menge W zu. Eine solche Abbildung (Zuordnung) nennt man

- **mehrdeutig**, wenn mindestens einem $x \in D$ **mehr als ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eindeutig**, wenn jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eineindeutig**, wenn außerdem noch zu jedem $y \in W$ **genau ein** $x \in D$ gehört.

Mehrdeutige Abbildung f_1:
Jeder ganzen Zahl wird die Zahl zugeordnet, für die sie Teiler ist, also $1 \to 1$; $1 \to 2$; $2 \to 2$; ...
Eindeutige Abbildung f_2:
Jeder ganzen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet, also $0 \to 0$; $\pm 1 \to 1$; $\pm 2 \to 4$; $\pm 3 \to 9$; ....
Eineindeutige Abbildung f_3:
Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet, also $0 \to 0$; $1 \to 2$; $0{,}5 \to 1$; $\pi \to 2\pi$ usw. Zu jeder reellen Zahl gehört auch *genau eine* reelle Zahl, die halb so groß ist.

Produktmengen

Eine Abbildung ist beschreibbar als Teilmenge der Produktmenge $D \times W$.
Die **Produktmenge** $D \times W$ ist die Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente ein Element aus D und deren zweite Komponente ein Element aus W ist.

$D = \mathbb{Z}$; $W = \mathbb{N}$
$D \times W = \{(0; 0), (0; 1), ..., (-1; 0), (-1; 1), (-1; 2), ..., (1; 0), (1; 1), (1; 2), ..., (-2; 0), (-2; 1), (-2; 2), ...\}$.
Abbildung f_2 von oben ist eine Teilmenge von $D \times W$.
$f_2 = \{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4\}, (2; 4), ...\}$

Funktionen

Eine **Funktion** f ist eine eindeutige Zuordnung (Abbildung) der Elemente zweier Mengen. Jedem Element x aus der Definitionsmenge D_f (dem **Definitionsbereich**) wird dabei genau ein Element y aus einer Wertemenge W_f (dem **Wertebereich**) zugeordnet.
Kurzform:
$f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$
Die Elemente $x \in D_f$ heißen **Argumente** von f, die zugeordneten Elemente $y \in W_f$ bzw. $f(x) \in W_f$ heißen **Funktionswerte**.
Die Gleichung $y = f(x)$ heißt Funktionsgleichung der Funktion f.

Messung der Lufttemperatur T zu bestimmten Uhrzeiten

Uhrzeit	4	6	8	20	22	24
T in °C	–3	–2	0	0	–1	–2

Hier gilt:
$D_f = \{4; 6; 8; 20; 22; 24\}$ $W_f = \mathbb{Z}$
(bei ganzzahliger Messung)
$f = \{(4; -3), (6; -2), (8; 0), (20; 0), (22; -1), (24; -2)\}$

Jeder reellen Zahl wird ihre dritte Potenz zugeordnet.
Hier gilt:
$D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}$
$f = \{(x; y) \mid y = x^3 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$,
also $f = \{(0; 0), (-2; -8), (0{,}5; 0{,}125), \ldots\}$, $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Reelle Funktionen

Sind Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen, so spricht man von **reellen Funktionen**.
Eine Funktion kann auch zwei oder mehr unabhängige Variablen besitzen.
Bei zwei unabhängigen Variablen besteht der Definitionsbereich aus geordneten Paaren reeller Zahlen und der Wertebereich ist $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man schreibt dann z.B. $z = f(x, y)$.

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (jeweils auf Maßzahlen bezogen) gilt:
$A(a, b) = a \cdot b$.
Der Definitionsbereich von A ist die Menge $\{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$, der Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$. Jedem Paar von Seitenlängen wird eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet.

1.1 Darstellung und Beschreibung

Für die Darstellung und Beschreibung reeller Funktionen kommen vor allem folgende Varianten in Frage:

- Angabe der (geordneten) **Paare** einander zugeordneter Elemente aus Definitions- und Wertebereich (nur möglich bei endlicher Paaranzahl);
- Beschreibung der Zuordnungsvorschrift in Worten (**Wortvorschrift**; verbale Beschreibung);
- Angabe einer die Zuordnung vermittelnden **Funktionsgleichung** $y = f(x)$ ($f(x)$ heißt dann **Funktionsterm**);
- Darstellung der einander zugeordneten Elemente in einer **Wertetabelle** (bei endlicher Paarzahl);
- Beschreibung durch **grafische Darstellungen**, z.B. durch ein Pfeildiagramm oder durch Deuten der Zahlenpaare als die Koordinaten von Punkten in einem Koordinatensystem, wodurch man einen Graphen der Funktion erhält.

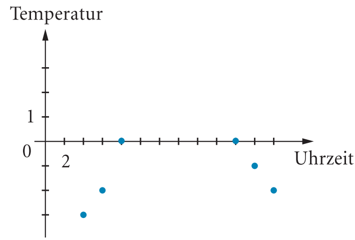
Darstellung und Beschreibung von Funktionen

Variante	Beispiel Temperaturmessung
Paarangabe	(4; –3), (6; –2), (8; 0), (20; 0), (22; –1), (24; –2)
Wortvorschrift	Jedem Messzeitpunkt wird die gemessene Lufttemperatur zugeordnet
Funktionsgleichung	(Angabe ist in diesem Falle nicht möglich)
Wertetabelle	siehe unten

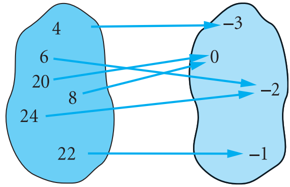
Uhrzeit	4	6	8	20	22	24
T in °C	–3	–2	0	0	–1	–2

Darstellung und Beschreibung von Funktionen (Forts.)

grafische Darstellung



Pfeildiagramm



Parameterdarstellung

Bei der Parameterdarstellung von Funktionen wird sowohl die Variable x als auch die Variable y jeweils durch eine Gleichung beschrieben, die einen (gemeinsamen) Parameter t als unabhängige Variable enthält. Es gilt also: $x = f_1(t)$ und $y = f_2(t)$.

Beispiel: Es sei $x = f_1(t) = \frac{t}{3}$ und $y = f_2(t) = 6t$ mit $D_{f_1} = D_{f_2} = \,]-\infty; \infty[$ bzw. $-\infty < t < \infty$. Dann erhält man folgende Wertetabellen:

Wertetabelle für f_1 und f_2						
t	**–9**	**–6**	**–3**	**0**	**3**	**6**
$\mathbf{x = f_1(t) = \frac{t}{3}}$	–3	–2	–1	0	1	2
$\mathbf{y = f_2(t) = 6t}$	–54	–36	–18	0	18	36

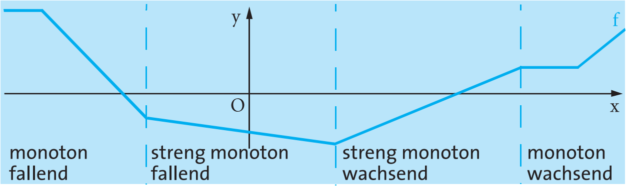
1.2 Eigenschaften

Monotonie

Definition

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I von D_f

monoton fallend,	**monoton wachsend,**
wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt:	
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
Gilt sogar	
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
so heißt f	
streng monoton fallend.	**streng monoton wachsend.**



Beschränktheit

Definition

Eine Funktion f heißt

nach oben beschränkt,	**nach unten beschränkt,**
wenn es eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ gibt,	wenn es eine Zahl $s_u \in \mathbb{R}$ gibt,
sodass für alle $x \in D_f$ gilt:	
$f(x) \leq s_o$	$f(x) \geq s_u$
Man nennt dann	
s_o **obere Schranke** von f.	s_u **untere Schranke** von f.

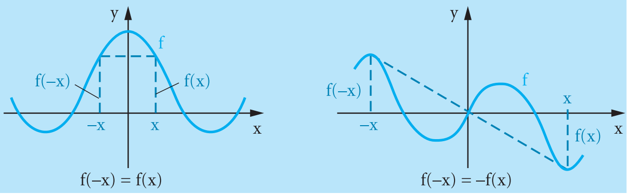
Symmetrie

Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt

gerade Funktion,	**ungerade Funktion,**
wenn mit der Zahl x stets auch –x zum Definitionsbereich D_f von f gehört und wenn gilt:	
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

- Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.



Beispiele: $f_1(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion, denn
$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$.
$f_2(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion, denn
$f_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f_2(x)$.
$f_3(x) = x^2 - x$ ist weder gerade noch ungerade, denn
$f_3(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$, also verschieden von $f_3(x)$
und $-f_3(x)$.

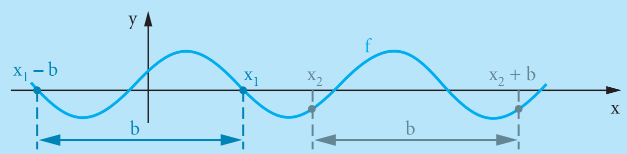
Periodizität

Definition

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $b > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x + b) = f(x)$ $(x + b \in D_f)$. Die kleinste derartige Zahl b wird **Periode** von f genannt.

Für eine periodische Funktion f mit $f(x + b) = f(x)$ gilt also:

- Im Abstand b wiederholen sich die Funktionswerte.
- Die Abschnitte des Graphen von f über den Intervallen $[x; x + b]$, $[x + b; x + 2b]$, $[x - 3b; x - 2b]$, ... aus D_f sind kongruent.



Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen

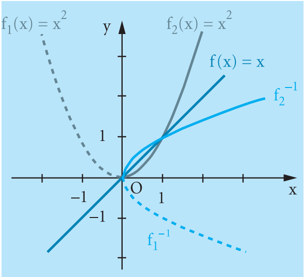
Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung f **umkehrbar eindeutig** ist.

Zu jedem Element $y \in W_f$ gehört also auch genau ein $x \in D_f$. Das heißt: Für alle $x_i \in D_f$ folgt aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Umkehrfunktion von f (auch inverse Funktion genannt) wird mit f^{-1} bezeichnet. Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die **Gleichung der Umkehrfunktion** von f gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (so dies möglich ist) und die Bezeichnungen y und x vertauscht. Die Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

Beispiel: Die Funktion g mit der Gleichung $y = 3x - 5$, $D_g = \mathbb{R}$ ist umkehrbar und hat die Gleichung $g^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Die Funktion $f(x) = x^2$ vermittelt hingegen keine eineindeutige Zuordnung: Jedem y-Wert (Ausnahme: 0) sind zwei x-Werte zugeordnet. Zerlegt man jedoch f in die beiden Funktionen $f_1: y = x^2$, $D_{f_1} = \,]-\infty\,; 0]$, und $f_2 : y = x^2$, $D_{f_2} = [0; \infty\,[$, dann existieren deren Umkehrungen. Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, woraus man $-x = \sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$ erhält. Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen $f_1^{-1}\colon\ y = -\sqrt{x}$, $f_2^{-1}\colon\ y = \sqrt{x}$.



Nullstellen

Definition

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle von f**, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

In der grafischen Darstellung ist eine Nullstelle einer Funktion die Abszisse eines Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle bzw. Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition

Abschnittsweise definierte Funktionen werden in den Abschnitten ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Zuordnungsvorschriften bzw. Funktionsterme definiert.

Beispiel: Die Zuordnung „Briefgewicht (m in g) → Beförderungsgebühr (p in Euro)“ stellt eine Funktion p = f(m) dar:

$$p(m) = \begin{cases} 0{,}55 \text{ für } & 0 < m \le 20 \\ 0{,}90 \text{ für } & 20 < m \le 50 \\ 1{,}45 \text{ für } & 50 < m \le 500 \\ 2{,}20 \text{ für } & 500 < m \le 1\,000 \end{cases}$$

1.3 Verknüpfen und Verketten

Verknüpfen

Aus bekannten Funktionen können durch **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen gebildet werden.

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

Die Funktionen f mit $y = f(x)$ und g mit $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen D_f und D_g bilden folgende Verknüpfungen:

Summe	$s = f + g$ mit $s(x) = f(x) + g(x)$, $D_s = D_f \cap D_g$
Differenz	$d = f - g$ mit $d(x) = f(x) - g(x)$, $D_d = D_f \cap D_g$
Produkt	$p = f \cdot g$ mit $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_p = D_f \cap D_g$
Quotient	$q = \frac{f}{g}$ mit $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Der Definitionsbereich einer durch Verknüpfung entstandenen Funktion ist in Abhängigkeit von den Definitionsbereichen der Ausgangsfunktion und der Verknüpfungsart zu bestimmen.

Beispiel: Für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ wird das Produkt $f \cdot g$ beschrieben durch $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Für den Quotienten $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

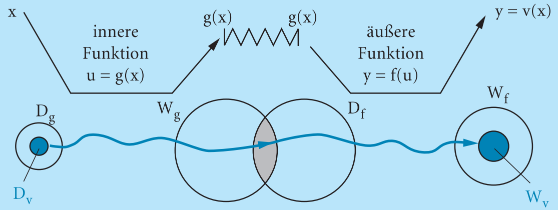
Verketten

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das **Nacheinanderausführen** bzw. **Verketten** zweier Zuordnungsvorschriften dar.

Verkettung, äußere und innere Funktion

Die Funktion v mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung** von f und g. Man schreibt $v = f \circ g$ (gesprochen: *f* nach *g*). Die Funktion f nennt man **äußere Funktion**, die Funktion g **innere Funktion** der verketteten Funktion v. Die Verkettung v ist definiert für alle x, für welche die Funktionswerte von g (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von f gehören.

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte $g(x)$ der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Eine Verkettung ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich von f und dem Wertebereich von g nicht leer ist.



$$D_v = \{x \mid x \in D_g \text{ und } g(x) \in D_f\}$$

Beispiel: Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Um die Verknüpfung $f \circ g$ zu erhalten, wendet man in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift g „Verdopple!" an und erhält so den Funktionswert $g(x) = 2x$.

In einem zweiten Schritt wird auf den Wert $g(x)$ die Zuordnungsvorschrift f „Sinuswert bilden!" angewendet. Man erhält: $f(2x) = \sin 2x$.

Durch die Verknüpfung $f \circ g$ ist somit die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$ entstanden.

Funktionenscharen

Werden reelle Zahlen additiv oder multiplikativ mit Funktionstermen $f(x)$ oder mit der Funktionsvariablen x verknüpft, so erhält man die Gleichungen neuer Funktionen.
Diese Gleichungen beschreiben jeweils eine Menge von Funktionen, eine **Funktionenschar**. Die Gleichungen der einzelnen Funktionen (der **Scharelemente**) hängen von der Wahl der **Scharparameter** c, d, k bzw. m ab. Das Bild einer Funktionenschar ist eine **Graphenschar**.

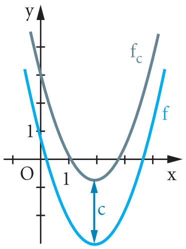
Gleichungen der Funktionsscharen

Aus einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ entstehen so z.B. die Gleichungen $(c, d, k, m \in \mathbb{R})$

1. $y = f_c(x) = f(x) + c,$
2. $y = f_d(x) = f(x + d),$
3. $y = f_k(x) = k \cdot f(x),$
4. $y = f_m(x) = f(m \cdot x).$

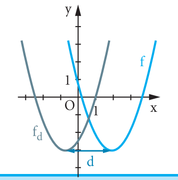
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_c(x) = f(x) + c$

1. Die Graphen der Schar f_c erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Richtung der y-Achse** um $|c|$ Einheiten, und zwar für $c > 0$ in Richtung des positiven und für $c < 0$ in Richtung des negativen Teils der y-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_d(x) = f(x + d)$

Die Graphen der Schar f_d erhält man durch **Verschiebung** des Graphen von f **in Rich-**
2 **tung der x-Achse** um $|d|$ Einheiten, und zwar für $d > 0$ in Richtung des negativen und für $d < 0$ in Richtung des positiven Teils der x-Achse.



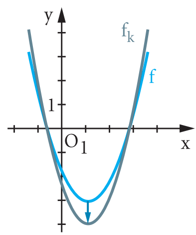
Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_k(x) = k \cdot f(x)$

Die Graphen der Schar f_k erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur x-Achse mit dem Faktor $|k|$.

$k > 1$: Streckung, $0 < k < 1$: Stauchung

Für $k = -1$ geht der Graph von f_k aus dem
3 Graphen von f durch **Spiegelung** an der x-Achse hervor.

$-1 < k < 0$ oder $k < -1$: Spiegelung an der x-Achse und anschließend Stauchung bzw. Streckung senkrecht zur x-Achse.



Übergang von $y = f(x)$ zu $y = f_m(x) = f(m \cdot x)$

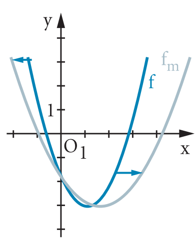
Die Graphen der Schar f_m erhält man durch **Streckung** oder **Stauchung** des Graphen von f senkrecht zur y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{|m|}$

$m > 1$: Streckung

$0 < m < 1$: Stauchung

4 Für $m = -1$ geht der Graph von f_m aus dem Graphen von f durch **Spiegelung** an der y-Achse hervor.

$-1 < m < 0$ oder $m < -1$: Spiegelung an der y-Achse und anschließend Streckung bzw. Stauchung senkrecht zur y-Achse.



1.5 Funktionsklassen

Einteilung reeller Funktionen

Je nachdem, ob bei der Verknüpfung der Funktionsvariablen im Funktionsterm nur **rationale Rechenoperationen** (also die Grundrechenarten und ihre Umkehrungen) oder darüber hinaus noch weitere Rechenoperationen vorkommen, unterscheidet man **rationale** und **nichtrationale Funktionen**. Die rationalen Funktionen werden noch einmal unterteilt in ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen.

Ganzrationale Funktionen

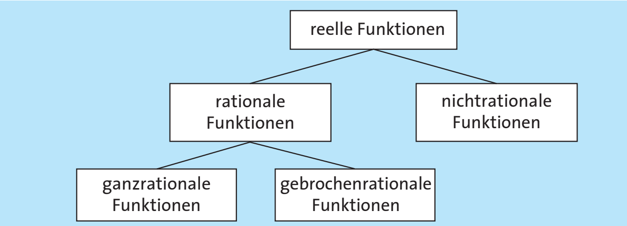
Funktionen mit einer Gleichung der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$(a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ D_f = \mathbb{R})$
nennt man **ganzrationale Funktionen n-ten Grades**.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion f, die sich durch den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionsterme beschreiben lässt, heißt **gebrochenrationale Funktion**. Sie hat die Form

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0}.$$

Eine solche gebrochenrationale Funktion ist nur für reelle Zahlen definiert, für die $v(x) \neq 0$ gilt.



Lineare Funktionen

Definition

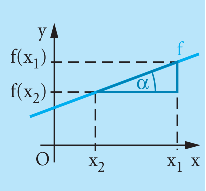
Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = m\,x + n$ ($x, m, n \in \mathbb{R}$) heißen **lineare Funktionen**.

In der Gleichung $f(x) = m\,x + n$ ist $m\,x$ das **lineare Glied** und n das **absolute Glied**.

Die Graphen linearer Funktionen sind **Geraden**. Diese werden durch zwei zur Funktion gehörende Zahlenpaare eindeutig bestimmt.

Für eine lineare Funktion mit der Gleichung $f(x) = mx + n$ gilt

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m = \tan\alpha \quad (x_1 \neq x_2)$$



m heißt der **Anstieg**, α der **Steigungswinkel** der Geraden.

$m > 0$: steigende Gerade

$m < 0$: fallende Gerade

Lineare Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = mx$ beschreiben einen **proportionalen Zusammenhang**. Eine Vervielfachung des Arguments x bewirkt eine ebensolche Vervielfachung des Funktionswertes f(x).

Für $m = 0$ hat die Gleichung der linearen Funktion die Gestalt $f(x) = n$. Die Funktionswerte stimmen für alle $x \in \mathbb{R}$ überein. f ist in diesem Falle eine **konstante Funktion**. Ihr Graph ist eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt P(0; n).

Nullstellen linearer Funktionen

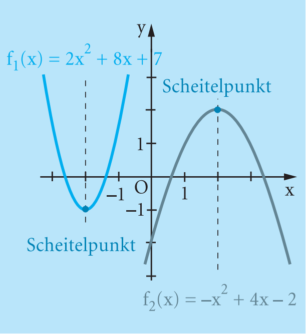
Die Nullstelle einer linearen Funktion $y = f(x) = mx + n$ (mit $m \neq 0$) ist $x_0 = -\frac{n}{m}$.

Quadratische Funktionen

Definition

Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) heißen **quadratische Funktionen**.

In $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist ax^2 das **quadratische Glied**, $b \cdot x$ das **lineare Glied** und c das **absolute Glied**. Die Graphen quadratischer Funktionen sind (quadratische) Parabeln. Ihre Symmetrieachsen verlaufen parallel zur y-Achse und schneiden den Graphen der Funktion im **Scheitelpunkt** (Scheitel) der Parabel.

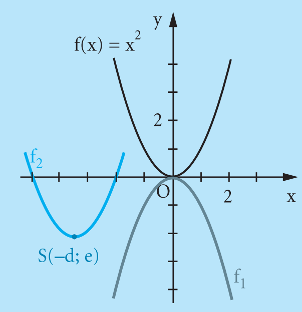


Normalform

Für $a = 1$ geht die Gleichung der quadratischen Funktion in die **Normalform** $f(x) = x^2 + bx + c$ über, meist geschrieben in der Form $f(x) = x^2 + px + q$.

Normalparabel

Aus $f(x) = x^2 + px + q$ erhält man mit $p = q = 0$ die einfachste quadratische Funktion $y = f(x) = x^2$ $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [0; \infty[$. Der Graph von $y = f(x) = x^2$ wird **Normalparabel** genannt.
Symmetrieachse: y-Achse
Scheitelpunkt: S(0; 0)
Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse ergibt eine Parabel, die der Graph der Funktion $y = f_1(x) = -x^2$ ist.



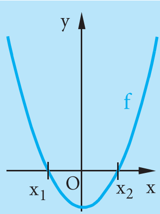
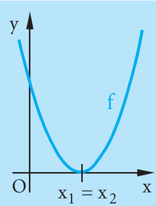
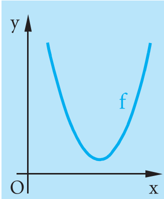
Verschiebt man die Normalparabel so, dass der Scheitelpunkt die Koordinaten $(-d; e)$ hat, dann wird die zugehörige Funktion durch $y = f_2(x) = (x + d)^2 + e$ (**Scheitelform**) beschrieben.

Nullstellen von Funktionen

Der Scheitelpunkt der Parabel mit $f(x) = x^2 + px + q$ besitzt wegen $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q$ die Koordinaten $S(-\frac{p}{2}; -(\frac{p}{2})^2 + q)$.

Diskriminante

Der Term $(\frac{p}{2})^2 - q$ wird **Diskriminante** der quadratischen Funktion f genannt und mit D bezeichnet. Es gilt $S(-\frac{p}{2}; -D)$.

Diskriminante D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Nullstellenanzahl	zwei Nullstellen	genau eine (doppelte) Nullstelle	keine Nullstelle
Graph			

Nullstellenberechnung

Für die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (D \geq 0)$$

Beispiel:

$f_1(x) = x^2 - 8x + 16$; $D = (-4)^2 - 16 = 0$; eine Nullstelle: $x_1 = 4$

$f_2(x) = x^2 + x - 20$; $D = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20 = 20{,}25 > 0$;

zwei Nullstellen $x_1 = 4$, $x_2 = -5$