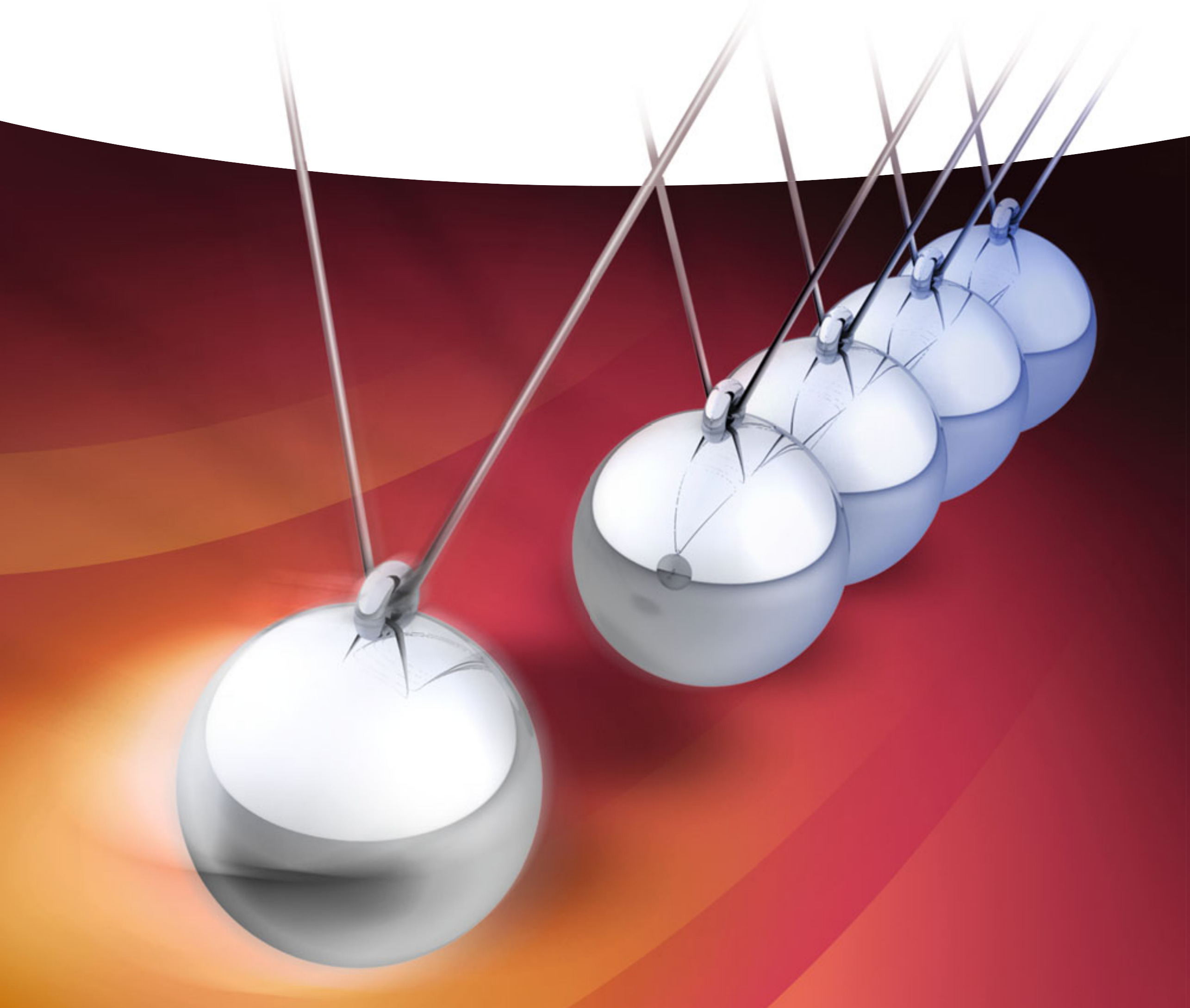
WILEY-VCH

Friedhelm Kuypers

Klassische Mechanik

Zehnte Auflage



Friedhelm Kuypers

Klassische Mechanik

Friedhelm Kuypers

Klassische Mechanik

10. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autor

Friedhelm Kuypers
Hedwig-Dransfeld-Weg 14
93055 Regensburg
Deutschland
Friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlaggestaltung Grafik-Design Schulz, Fußgönheim, Deutschland
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Print ISBN 978-3-527-33960-0
ePDF ISBN 978-3-527-69927-8
ePub ISBN 978-3-527-69928-5
Mobi ISBN 978-3-527-69929-2

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Vorwort

Dieses Buch beschäftigt sich mit der Klassischen Punktmechanik, dem starren Körper und der Wellengleichung. Das Buch endet mit der Relativistischen Mechanik. Es wendet sich an Studenten der Physik, der Mathematik und des Maschinenbaus. Für das Verständnis werden nur Grundkenntnisse der Analysis, der Linearen Algebra und der Experimentalphysik vorausgesetzt. Durch *zahlreiche Beispiele* und *viele Aufgaben mit ausführlichen Lösungen* ist das Buch zum Selbststudium geeignet. Die kompakte Darstellung ermöglicht eine schnelle und gezielte Wiederholung.

Die Mechanik ist eine zentrale Disziplin der Physik. Kein anderer Zweig der Physik hat einen solchen Reichtum an verschiedenen Formulierungen und Prinzipien entwickelt und hat so viele Verbindungen zu anderen Gebieten der Physik und zur Technik. In diesem Buch werden die wichtigsten Prinzipien der Mechanik vorgestellt und die Zusammenhänge mit anderen Gebieten der Physik eingehend besprochen. So können Leser einen Eindruck von dieser Vielfalt erhalten und erkennen, dass Fundamente der Wellenlehre, der Statistischen Mechanik und auch der Quantenmechanik bereits in der Klassischen Mechanik liegen.

Dieses Buch unterscheidet sich in den inhaltlichen Schwerpunkten und vor allem in der methodischen Ausführung von anderen Büchern. Dies äußert sich in den folgenden Merkmalen:

- Zahlreiche und sorgfältig ausgewählte *Beispiele* werden eng in den Lehrstoff eingearbeitet, um *grundlegende Aussagen illustrativ zu verdeutlichen*, neu auftretende Probleme und Schwierigkeiten praxisnah vorzubereiten und Rechenmethoden einzuüben. Darüber hinaus machen sie den Leser auch mit wichtigen Anwendungen im Maschinenbau bekannt. Die Beispiele werden durch einen grauen Rahmen markiert. Die *Aufgaben* am Ende der Kapitel mit *ausführlichen Lösungen* am Ende des Buches lehnen sich ebenfalls nah an den behandelten Stoff an und dienen demselben Zweck. Viele Ergebnisse werden eingehend diskutiert und mit Resultaten anderer Aufgaben verglichen.
- Nach Möglichkeit sollen Vorlesungen und Bücher auch die Freude an der Physik fördern. Wichtigste Grundbedingung dafür ist sicherlich eine klare und verständliche Darstellung des Stoffes. Darüber hinaus lässt sich Motivation wohl am ehesten durch Beispiele und Aufgaben steigern, die faszinierende Phänomene und Beobachtungen erklären oder auf Fragen eingehen, die schon lange interessieren, aber anderswo unbeantwortet bleiben. Dieser Gesichtspunkt war bei der Auswahl etlicher Aufgaben maßgebend; besonders in den Kapiteln 9, 12 und 13 kommen neben den vorherrschenden „Standardaufgaben", die auch in Vorlesungen, Übungen und Prüfungen zu finden sind, zusätzlich *weiterführende Aufgaben* vor. Diese Aufgaben sollen vor allem Interesse und Freude an der Mechanik wecken. Daher lässt sich das Buch auch nach bestandener Prüfung immer wieder mit Gewinn lesen.
- In den Lösungen werden häufig *Kurven* dargestellt und interpretiert, die durch die numerische Integration analytisch nicht lösbarer Differentialgleichungen gewonnen wurden. Wegen der ständig wachsenden Bedeutung von numerischer Software und Rechenpaketen wird Erfahrung in der Auswertung numerisch berechneter Kurven immer wichtiger.

- Wichtigkeit und Nutzen der behandelten Themen werden, wie bereits ein kurzer Blick in das Inhaltsverzeichnis zeigt, meistens in einem eigenen Unterkapitel gewürdigt. *Bewertung und Einordnung* scheinen mir vor allem in der Klassischen Mechanik erforderlich zu sein, da es hier mehrere äquivalente Prinzipien gibt, die alle ihre eigene „Daseinsberechtigung“ haben.
- Zu dem Buch wurde das Programm Mechanicus entwickelt. Es wurde mit MatLab erstellt, hat eine grafische Benutzeroberfläche und ermöglicht die Untersuchung von 52 mechanischen Systemen: Rollenden und hüpfenden Bällen, Kreiseln, Pendeln, Oszillatoren, Satelliten und anderen Systemen. Direkt nach der *numerischen Lösung* der bereits fest installierten Dgln. können *zwei- und dreidimensionale Kurven*, *Fourierspektren* sowie (bei 43 Systemen) schnelle *3D-Animationen* betrachtet werden.
  Das Programm liegt jetzt auch als Exe-File vor und läuft daher ohne MatLab.
  Der Leser findet das Programm bei www.wiley-vch.de/textbooks (suchen Sie bitte nach „K“ wie Kuypers) unter dem Punkt „Dozentenmaterial“. Zugriff darauf erhalten Sie mit der EMail-Adresse kuypers@wiley-vch.de und dem

  Password C7HuZ.

  Weitere Informationen zu diesem Programm findet der Leser auf den Seiten VIII bis XVI dieses Vorspanns.
- Zum Programm Mechanicus gehören über 80 *fotorealistische Filme* mit den Bewegungen von 31 wichtigen oder faszinierenden mechanischen Systemen. Wegen der Filme ist das Gesamtpacket knapp 4 GB groß. Die Animationen wurden mit dem kostenfreien Render-Programm POV-Ray erstellt. Die fertigen Filme können z. B. mit dem Windows-Media-Player oder – noch besser – mit dem VLC-Media-Player abgespielt werden, haben eine Farbtiefe von 3 Byte und größtenteils eine Auflösung von 1280×1024 Pixel. Die Filmlänge beträgt in der Regel 2 Minuten.
  Im Buch werden die Beispiele und Aufgaben, zu denen es fotorealistische Filme gibt, mit einer Maus markiert.
  Momentaufnahmen einiger Filme findet der Leser auf den Seiten XII bis XVI dieses Vorspanns.

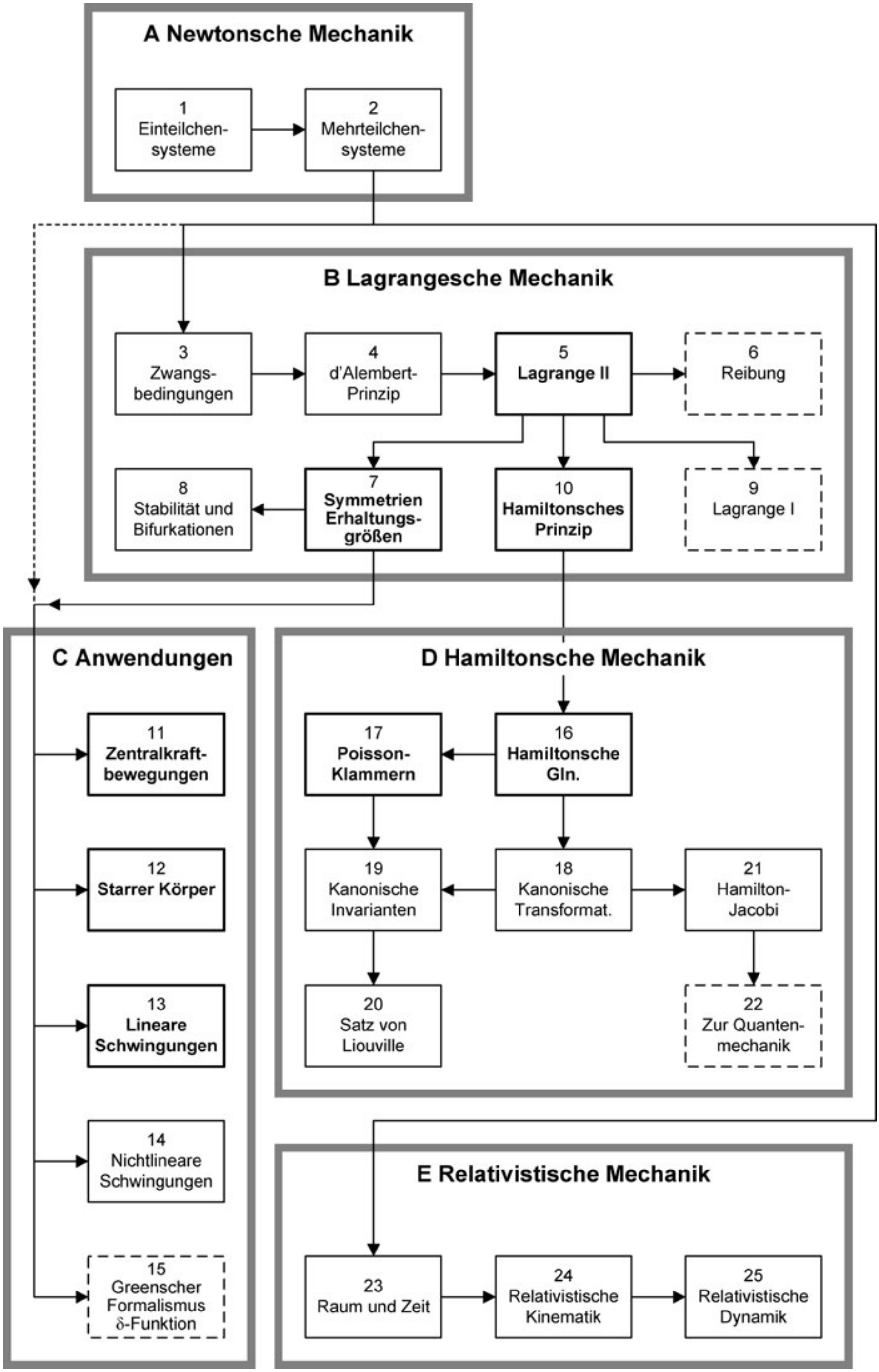
Im *Flussdiagramm* auf der folgenden Seite sieht der Leser übersichtlich, welche Kapitel essentiell sind und welche Kapitel er zusätzlich lesen kann. Das Flussdiagramm ermöglicht eine individuelle Stoffauswahl.

Ich danke allen Lesern für Hinweise und konstruktive Kritik. Mein besonderer Dank für viele Verbesserungsvorschläge und sorgfältiges Lesen des Manuskriptes gilt Dr. W. Happle. Prof. Dr. R. J. Jelitto hat mich auf ein Beispiel aufmerksam gemacht, in dem die Wirkung S einen Sattelpunkt hat.

Ich bin allen Lesern sehr dankbar, die durch Fragen, Bemerkungen oder Anregungen zur Verbesserung des Buches oder des Programmes Mechanicus beitragen. Meine E-Mail-Adresse lautet:

friedhelm.kuypers@oth-regensburg.de

Regensburg, im Februar 2016 Friedhelm Kuypers


A Newtonsche Mechanik
1 Einteilchen-systeme
2 Mehrteilchen-systeme
B Lagrangesche Mechanik
3 Zwangs-bedingungen
4 d'Alembert-Prinzip
5 Lagrange II
6 Reibung
7 Symmetrien Erhaltungs-größen
8 Stabilität und Bifurkationen
9 Lagrange I
10 Hamiltonsches Prinzip
C Anwendungen
11 Zentralkraft-bewegungen
12 Starrer Körper
13 Lineare Schwingungen
14 Nichtlineare Schwingungen
15 Greenscher Formalismus δ-Funktion
D Hamiltonsche Mechanik
16 Hamiltonsche Gln.
17 Poisson-Klammern
18 Kanonische Transformat.
19 Kanonische Invarianten
20 Satz von Liouville
21 Hamilton-Jacobi
22 Zur Quanten-mechanik
E Relativistische Mechanik
23 Raum und Zeit
24 Relativistische Kinematik
25 Relativistische Dynamik

MECHANICUS

Das Programm MECHANICUS liegt nun auch als Exe-File vor. Es wurde mit MatLab erstellt und arbeitet mit einer graphischen Benutzeroberfläche.

Das Programm enthält unter anderem über 80 bereits fertig gestellte fotorealistische Filme. Sie können z. B. mit dem VLC-Media-Player abgespielt werden.

In MECHANICUS sind die Dgln. von 52 mechanischen und zwei nichtmechanischen Systemen einprogrammiert. Diese sog. *eingebetteten Dgln.* können nicht geändert werden und beschreiben rollende und hüpfende Bälle, Kreisel, Pendel, Oszillatoren, Satelliten und andere Systeme.

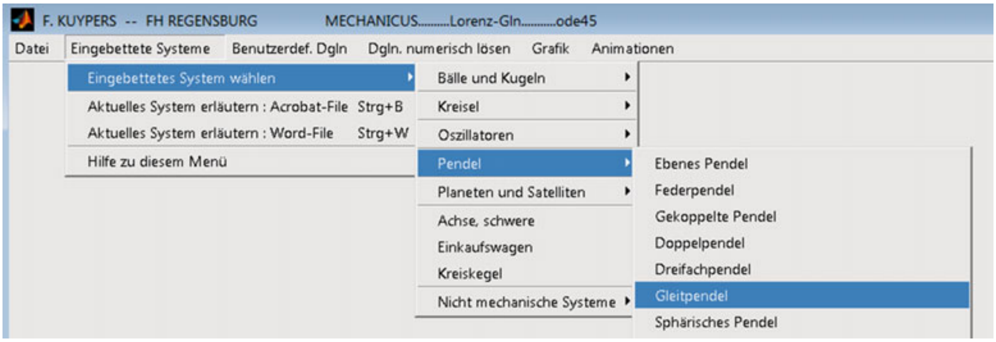
Die Dgln. werden numerisch gelöst. Anschließend können zu den berechneten Bewegungen zwei- und dreidimensionale Kurven sowie Fourierspektren betrachtet werden. Für 43 mechanische Systeme können auch direkt nach numerischen Berechnungen 3D-Animationen aufgerufen werden.

Das Programm MECHANICUS hat folgende Merkmale:

- Mit dem Programm lassen sich die Bewegungen der meisten mechanischen Systeme, die in Lehrbüchern und Vorlesungen behandelt werden, leicht berechnen und untersuchen.
- Der Benutzer, der das Programm nicht als Exe-File, sondern unter MatLab laufen lässt, kann auch eigene, sog. *benutzerdefinierte* explizite Dgln. 1. Ordnung eingeben. Dazu muss er zuerst der Reihe nach den Namen der Dgln., die Zahl der Dgln. und der Parameter sowie die Namen der Variablen und der Parameter eintippen. Anschließend sind die expliziten Dgln. einzugeben.
- Die großenteils intuitive Bedienung ist für die benutzerdefinierten Dgln. (nach deren Eingabe) und für 53 fest installierte Dgln. *vollständig identisch*; nur der Kettenschwinger ist eine Ausnahme. Der Anwender muss die sehr einfache Bedienung nur *einmal* lernen.
- Die Dgln. können mit sieben verschiedenen mathematischen Verfahren, die MatLab zur Verfügung stellt, numerisch gelöst werden.
- Das Programm erkennt die meisten Eingabefehler und fordert den Benutzer zur Korrektur auf.
- Zwei Arten von 3D-Animationen werden angeboten:
  1) 43 mechanische Systeme ermöglichen 3D-Animationen, die sich sofort nach der numerischen Lösung der Dgln. starten lassen (siehe die beiden Momentaufnahmen auf Seite XI). Diese Animationen sind relativ einfach: Sie enthalten zwar Glanzpunkte auf den Oberflächen, aber keine Schatten. Üblicherweise werden etwa 15 bis 30 Bilder pro Sekunde abgespielt.
  2) Für 31 mechanische Systeme hat der Autor über 80 aufwendige, fotorealistische 3D-Animationen erstellt (siehe die Momentaufnahmen auf den Seiten XII bis XVI).

Die Bilder und Texte auf den folgenden drei Seiten IX–XI geben dem Leser einen ersten Eindruck von den Eingabemasken und den Möglichkeiten von MECHANICUS. Eine **Bedienungsanleitung** steht im Verzeichnis Hilfe des Programmpaketes unter

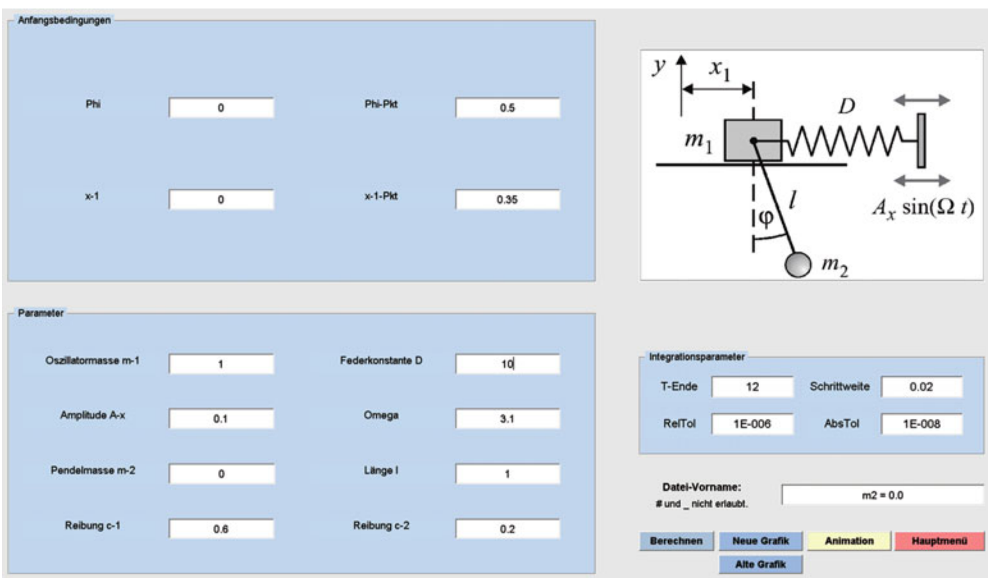
Mechanicus\Hilfe\Bedienungsanleitung.doc oder
Mechanicus\Hilfe\Bedienungsanleitung.pdf



Pulldown-Menü Eingebettete Systeme

In MECHANICUS sind 54 Systeme fest installiert, deren Dgln. nicht geändert werden können. Im zweiten Menü kann im Untermenü Eingebettetes System wählen ein neues System gewählt werden.

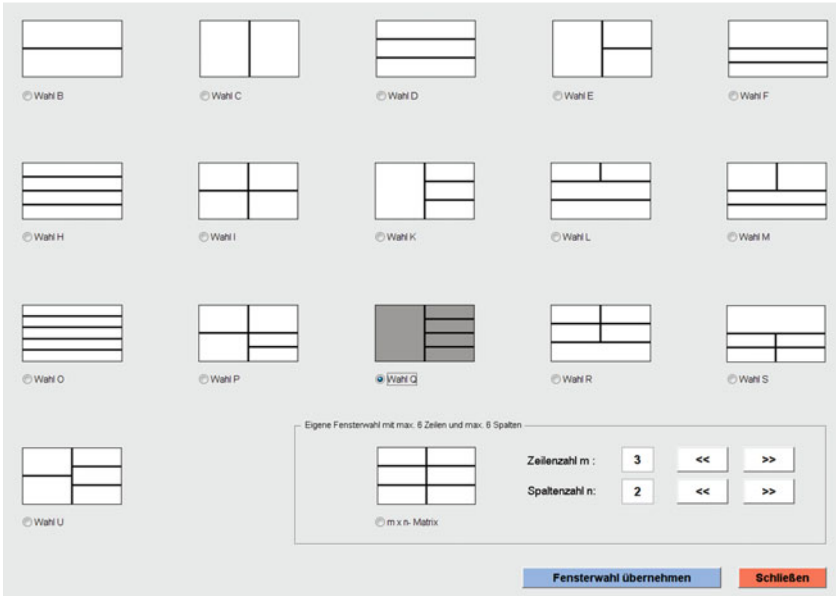
Das zweite und dritte Untermenü öffnen eine Acrobat- bzw. eine Word-Datei mit ausführlichen Kommentaren, evtl. auch mit Dgln. und Literaturhinweisen zum aktuell gewählten System.



Numerische Lösung der Dgln.

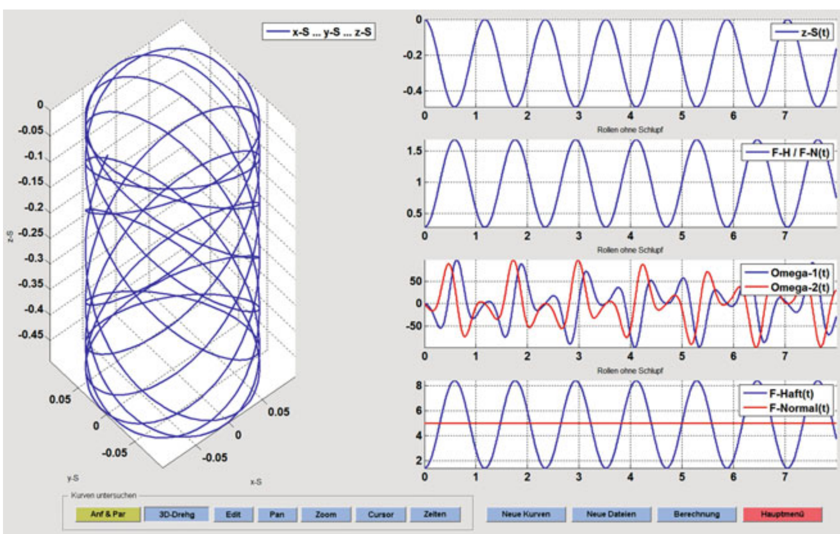
Vor der numerischen Lösung der Dgln. müssen die Anfangsbedingungen, die physikalischen Parameter, vier Integrationsparameter und der Name der Datei, die die numerische Lösung aufnimmt, eingegeben werden. Klicken des Buttons Berechnen startet die numerische Berechnung.

Nach der numerischen Lösung führt der Button Neue Grafik auf die Auswahl *neuer* Kurven. Der Button Alte Grafik liefert – für die neu berechnete Datei – automatisch die bereits früher ausgewählten Kurven. Eine einfache 3D-Animation der neu berechneten Bewegung ist hier ebenfalls möglich.



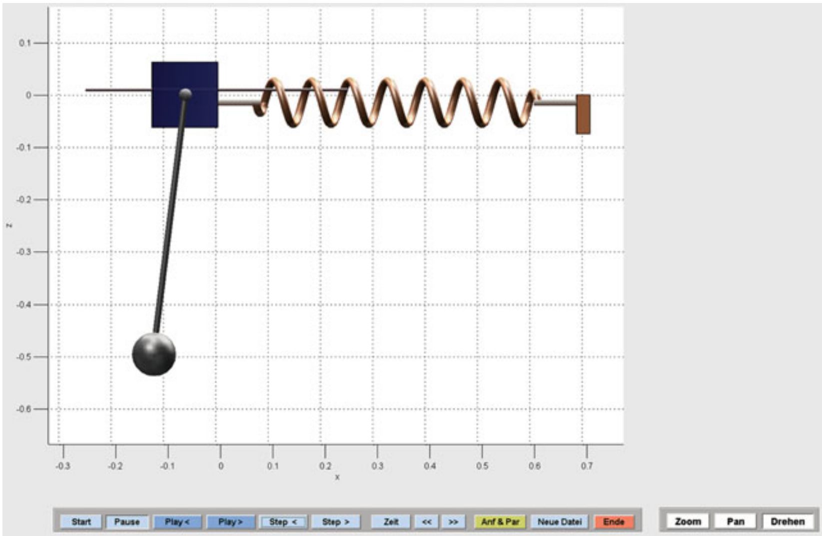
Ausschnitt der Fensterauswahl

Ein Mausklick legt Zahl und Anordnung der Fenster fest, in denen die numerisch berechneten Kurven gezeichnet werden sollen.



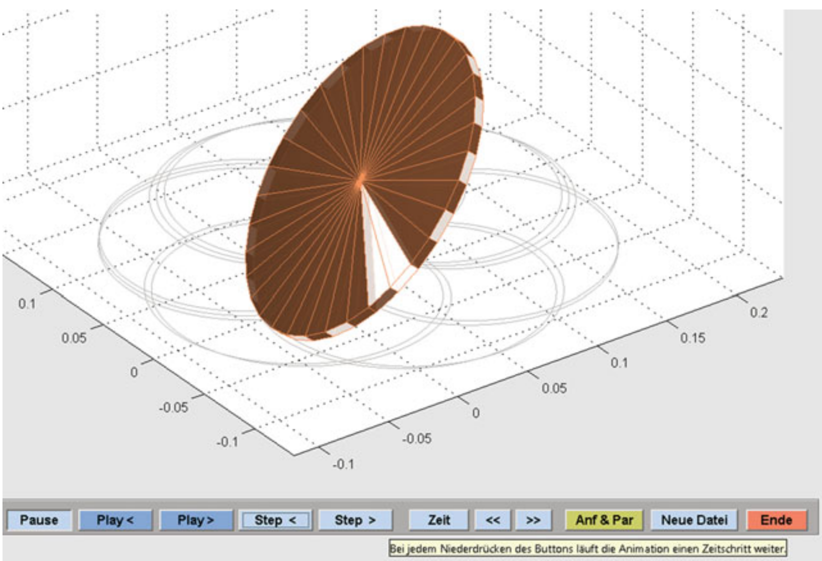
Kurvenansicht

Hier werden links eine 3D-Kurve und rechts sechs 2D-Kurven gezeigt. Die Bedeutung der Pushbuttons am unteren Bildschirmrand wird durch Kommentare verdeutlicht, die nach kurzem Kontakt mit der Maus automatisch eingeblendet werden.



Einfache 3D-Animation des Gleitpendels

Direkt nach der numerischen Berechnung kann MECHANICUS für 43 mechanische Systeme eine 3DAnimation starten, wobei etwa zwischen 15 und 30 Bilder pro Sekunde abgespielt werden.



Einfache 3D-Animation einer rollenden Scheibe – Vergrößerter Teilausschnitt

Die Bedeutung der Pushbuttons am unteren Bildschirmrand wird durch Kommentare verdeutlicht, die nach kurzer Verzögerung eingeblendet werden, wenn die Maus auf dem entsprechenden Button steht. Hier ruht die Maus auf dem Button Step >.

In Aufgabe 12–18 werden die Dgln. aufgestellt und die Bewegungen untersucht.

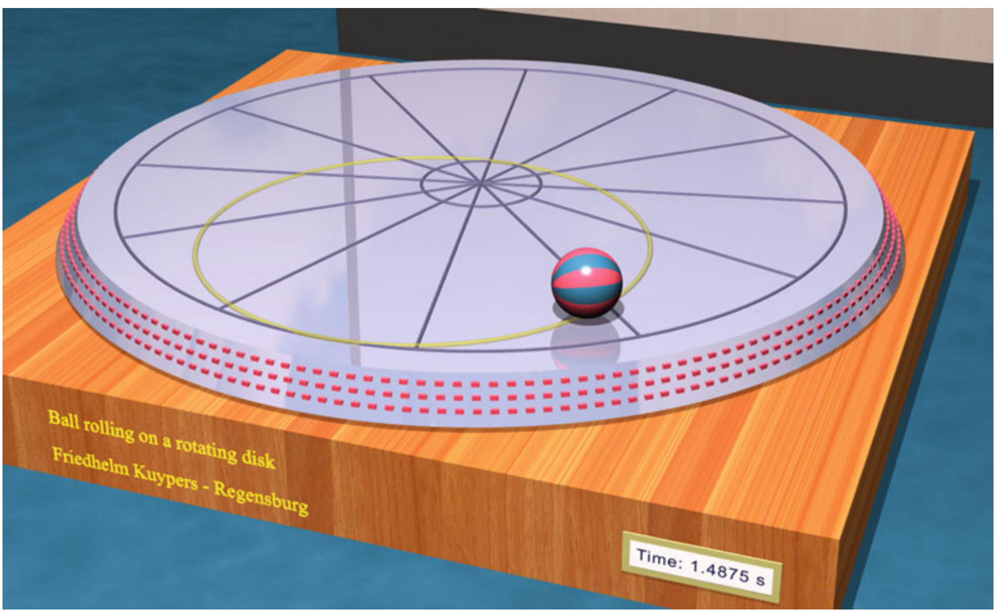
Fotorealistische Filme

Das Programmpaket enthält über 80 fotorealistische Filme, die mit dem kostenfreien Renderpropramm POVRay für 31 mechanische Systeme erstellt wurden. Die Filme im avi-Format können von MECHANICUS aus oder aber auch durch Doppelklick im Windows-Explorer gestartet und z. B. mit dem VLC-Media-Player abgespielt werden.

Die POV-Ray-Filme

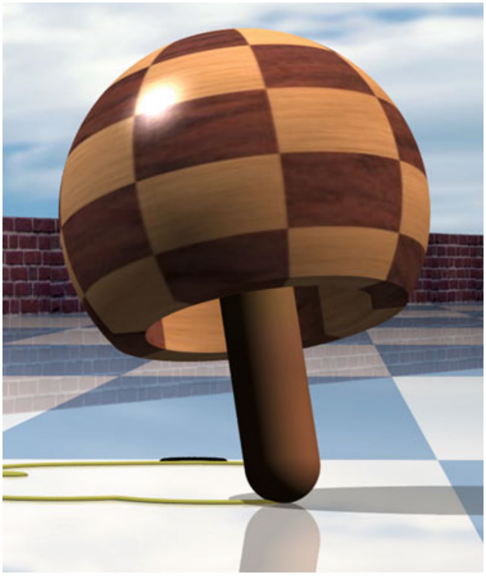
- haben in der Regel eine Auflösung von 1280x1024 Pixel.
- haben 3 Byte Farbtiefe.
- spielen mindestens 25 Bilder pro Sekunde ab.
- haben meistens eine Abspielzeit von 2 Minuten (mit 3000 Einzelbildern).

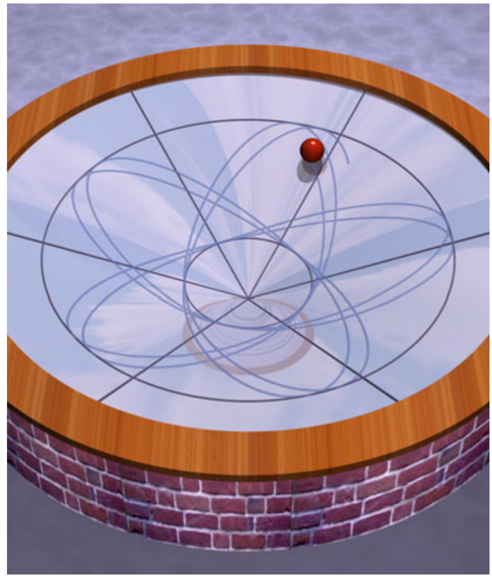
Die folgenden Farbbilder zeigen **Ausschnitte von Momentaufnahmen** einiger Filme.



Ball rollt auf rotierender Scheibe. Man mag es kaum glauben: Auf einer waagerechten, rotierenden Scheibe – hier als Plattenspieler dargestellt – rollen Bälle, deren Reibungsverluste vernachlässigt werden können, auf raumfesten Kreisbahnen. Noch verwunderlicher sind die Bewegungen, wenn die rotierende Scheibe geneigt ist.

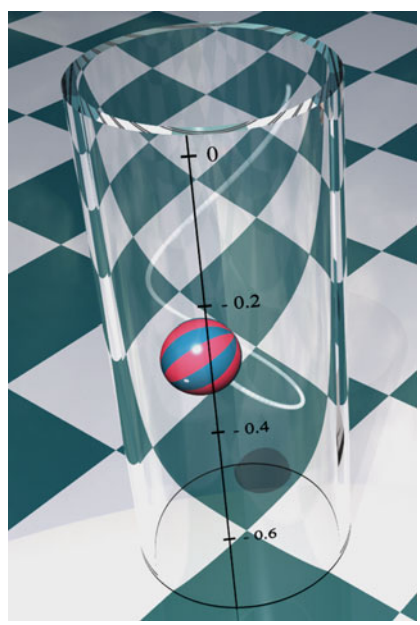
In Aufgabe 12–16 werden die Dgln. aufgestellt und analytisch gelöst. Die Ergebnisse von Experimenten werden kurz beschrieben und mit der Theorie verglichen. Die Übereinstimmung von Theorie und Experimenten ist überzeugend. Abschließend werden bemerkenswerte Analogien zu den Bewegungen geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern aufgezeigt.



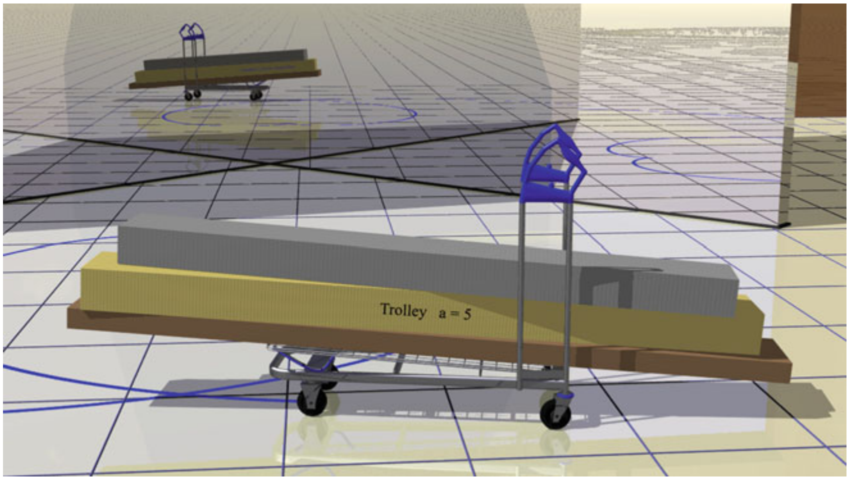


Stehaufkreisel. Der Stehaufkreisel kostet wenige Euro und gehört zu den faszinierendsten physikalischen Spielzeugen. Er richtet sich nach dem schnellen Andrehen zwischen Daumen und Zeigefinger auf dem Stift auf.
Aufgabe 12–19 untersucht die Reibung und stellt die Dgln. auf. Numerisch berechnete Kurven werden interpretiert.

Kreiskegel. Eine Kugel mit vernachlässigbarem Trägheitsmoment rollt ohne Reibungsverluste in einem Kreiskegel.
Die Dgln. werden mit verschiedenen Methoden in mehreren Beispielen aufgestellt. Beispiel 11.5–2 zeigt, dass die Kugel zwischen zwei Kreisen auf und ab läuft.

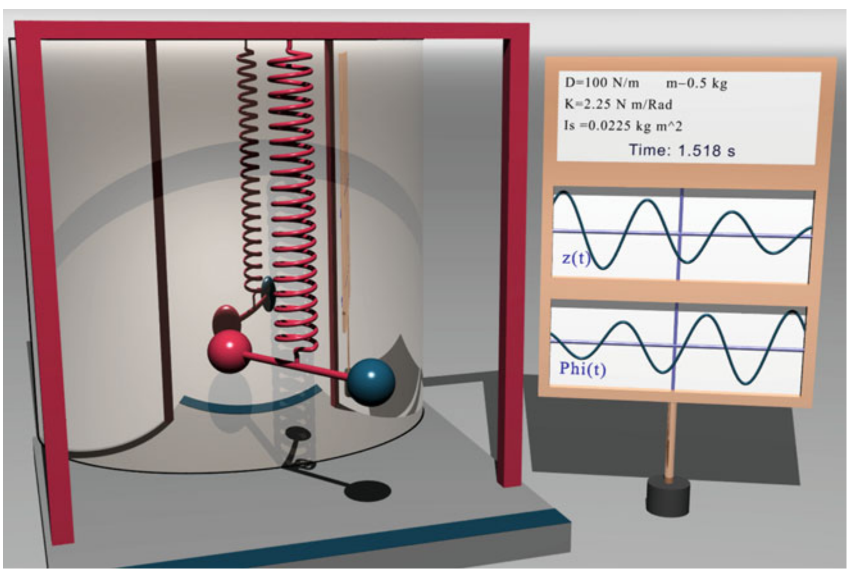


Ball rollt in vertikalem Rohr. Völlig unerwartet ist die Bewegung eines Balls, der ohne Schlupf und ohne Energieverlust in einem ruhenden vertikalen Rohr rollt: Der Ball rollt nicht nach unten, wie wohl jeder Physiker erwartet, sondern periodisch zwischen einem tiefsten und einem höchsten Punkt auf und ab – ohne auf den Boden zu treffen.
In Aufgabe 12–17 werden die Dgln. aufgestellt und numerische Lösungen untersucht.



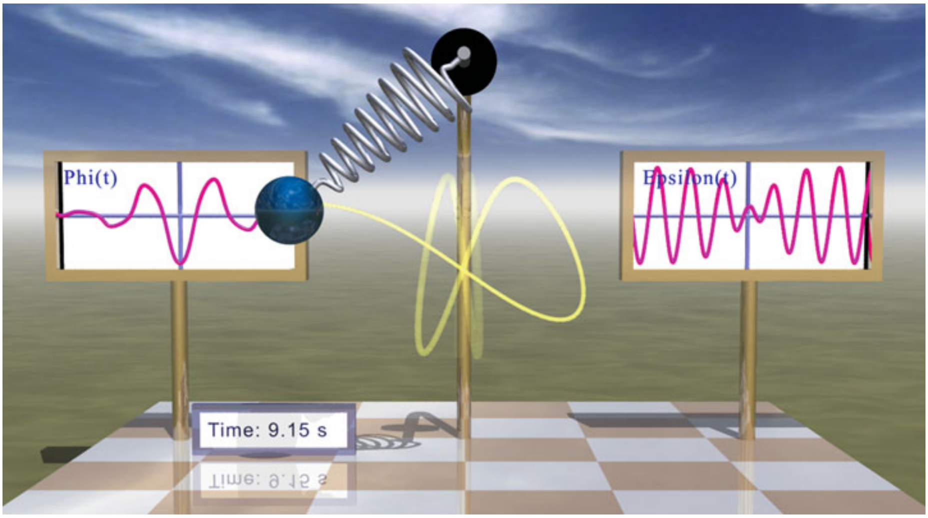
Einkaufswagen. Ein Einkaufswagen (hier vor zwei Spiegeln) rollt ohne menschliche Führung und reibungsfrei auf einer herzförmigen Kurve. Dabei dreht er sich mehrmals um die Hochachse, bevor er asymptotisch auf eine Gerade zuläuft. Physiker mit Spieltrieb können die berechneten Bewegungen mit solchen beladenen Einkaufswagen bestätigen, bei denen sich nur die beiden Räder unter den blauen Handgriffen um die Hochachse schwenken lassen.

In Aufgabe 9–14 werden die Dgln. aufgestellt. Die Zahl der Drehungen um die Hochachse wird analytisch berechnet.



Wilberforce-Pendel. Hier treten schwebungsartige Wechsel zwischen vertikalen Federschwingungen und Torsionsschwingungen auf.

Dieses Pendel wird im Lehrbuch nicht behandelt. Aber im Programm MECHANICUS können die Dgln. und Erläuterungen gelesen werden.

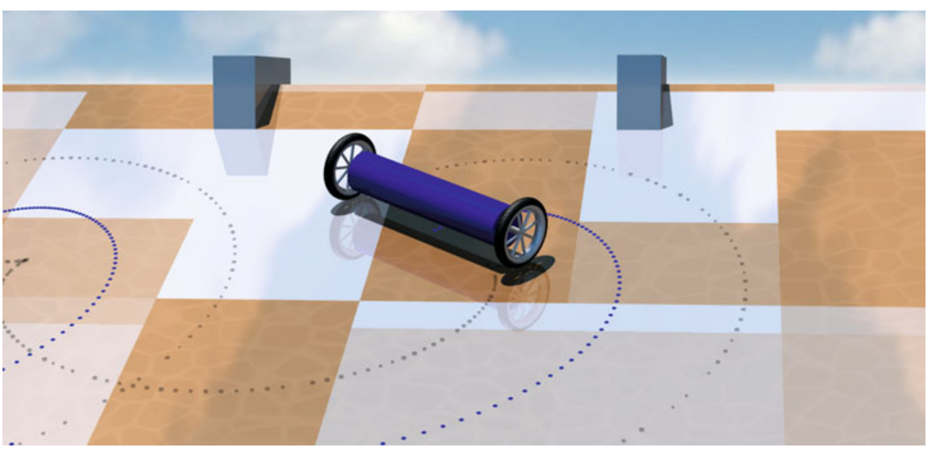


Federpendel. Die vertikale Schwingung eines harmonischen Oszillators ist instabil, wenn Masse m, Federkonstante D und Federlänge l die Gl.

$$\sqrt{g/l} = n/2 \cdot \sqrt{D/m} \qquad n = \text{natürliche Zahl}$$

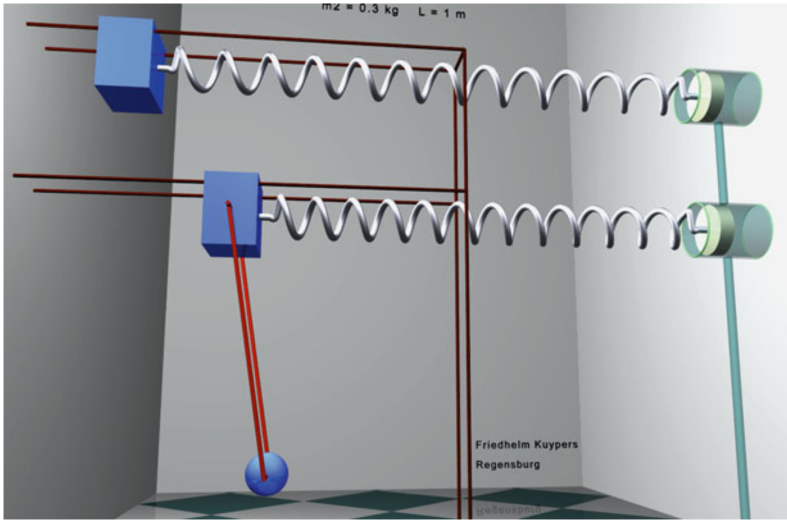
erfüllen. Auch bei kleinsten *seitlichen* Anfangs-Auslenkungen ($\varphi(0) \neq 0$) wechselt die Bewegung endlos zwischen nahezu vertikalen Schwingungen und starken seitlichen Pendelausschlägen. In der Aufnahme ist $\varphi \approx -48,5°$.

In Aufgabe 5–12 werden die Dgln. aufgestellt und die kritischen Bedingungen für die Parameter untersucht.



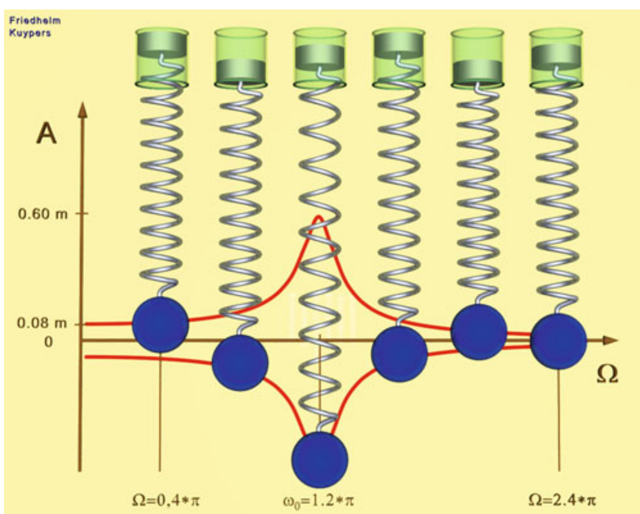
Schwere Achse. Auch hier erleben wir eine faustdicke Überraschung: Die schwere Achse läuft auf einer schiefen Ebene nicht den Hang hinab, sondern quer zum Hang auf zykloidenartigen Kurven.

In Beispiel 9.1–3 werden die Dgln. aufgestellt und gelöst. Die Begründung für die überraschende Bewegung ist sehr anschaulich.



Gleitpendel. Die erzwungenen Schwingungen des unten dargestellten Gleitpendels verdeutlichen die Wirkungsweise der Schwingungstilger in Hochhäusern. Im 500 m hohen Wolkenkratzer Taipeh 101 hängt ein Pendel mit einer Länge von 42 m und einer Pendelmasse von 660 Tonnen(!). Es soll die durch Taifune und Erdbeben ausgelösten Hochhaus-Schwingungen tilgen.

In Aufgabe 13–9c werden die Dgln. des angeregten Gleitpendels aufgestellt. Dort wird auch ausführlich auf den Wolkenkratzer Taipeh 101 eingegangen.



Harmonischer Oszillator. Die Animation zeigt die erzwungenen Schwingungen von 6 identischen, gedämpften Oszillatoren bei 6 verschiedenen Erregerfrequenzen Ω. Die rote Resonanzkurve $A(\Omega)$ und die Phasenverschiebung $\varphi(\Omega)$ zwischen Erregung und Schwingung werden bestätigt.

In Beispiel 13.1–2 werden erzwungene Schwingungen des linearen Oszillators untersucht.

Inhaltsverzeichnis

A Die Newtonsche Mechanik

Die Newtonsche Mechanik wird nur kurz und mit relativ wenigen Beispielen und Aufgaben besprochen, da ihre Inhalte und Aussagen großenteils aus der einführenden Vorlesung zur Experimentalphysik bekannt sein dürften. Aus diesem Grund kann ein versierter Leser diesen Teil A „Die Newtonsche Mechanik“ ohne weiteres übergehen und das Studium des Buches mit dem Teil B „Die Lagrangesche Mechanik“ beginnen.

Anspruchsvolle Anwendungen der Mechanik – dies sind vor allem starre Körper und Schwingungen – werden weiter hinten nach der Lagrangeschen Mechanik im Teil C „**Anwendungen**“ untersucht. Dann hat der Leser sich schon ein wenig in die Methoden und die Denkweise der Theoretischen Physik eingearbeitet.

Die folgenden Zeilen geben einen kurzen Überblick über die Themen, die in diesem einführenden Teil A „Die Newtonsche Mechanik“ behandelt werden.

1. Einteilchensysteme
   Zu Beginn werden die vier Newtonschen Axiome kurz, aber doch relativ sorgsam besprochen. Der zweite Abschnitt führt die wichtigen konservativen Kräfte und ihre Potentiale ein. Zum Schluss werden die Bewegungsgleichungen. in beschleunigten Bezugssystemen aufgestellt. Durch die Einführung von Scheinkräften – vor allem Fliehkraft und Corioliskraft – können die Gesetze der Newtonschen Mechanik auch für beschleunigte Bezugssysteme beibehalten werden.

2. Mehrteilchensysteme
   Mit Schwerpunkt, Drehimpuls und Drehmoment werden fundamentale Begriffe der Mechanik eingeführt. Impulssatz, Schwerpunktsatz und Drehimpulssatz sind grundlegende Sätze der Mechanik, die sich später als sehr wichtig erweisen werden. Kinetische Energie, Drehimpuls und Drehmoment lassen sich in einen Schwerpunktanteil und einen Relativanteil zerlegen.
   Bei konservativen Kräften haben abgeschlossene Mehrteilchensysteme mindestens zehn Erhaltungsgrößen.

1 Einteilchensysteme

1.1 Die Newtonschen Axiome

Das erste Newtonsche Axiom lautet in der bekannten Form: „Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt." Es wurde um 1640 von Galilei aus Versuchen an schiefen Ebenen abgeleitet und heißt daher auch „Trägheitsgesetz von Galilei". Die Entdeckung dieses Gesetzes war eine geniale Leistung, denn Bewegungen in Labor und Natur sind nicht gleichförmig und geradlinig. Zur Aufrechterhaltung solcher Bewegungen muss man sogar im scheinbaren Gegensatz zum Trägheitsgesetz Kräfte aufbringen (zur Überwindung der Reibung). Das Trägheitsgesetz ist also eine Extrapolation vieler Beobachtungen auf einen idealisierten, reibungsfreien Grenzfall.

Das Trägheitsgesetz enthält den Begriff ‚Kraft', der hier noch nicht physikalisch definiert wurde. Daher muss die obige Fassung des Axioms so umformuliert werden, dass sie ohne den Begriff ‚Kraft' auskommt. Wir gehen von der Erfahrung aus, dass alle Umgebungseinflüsse mit der Entfernung r abnehmen und schließlich für r gegen unendlich gegen null gehen. Dann lautet die zweite Fassung des ersten Newtonschen Axioms folgendermaßen:

> Jeder Körper, der von allen anderen unendlich weit entfernt ist, der also keine Umgebung hat, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Auch diese zweite Fassung ist noch nicht präzise genug. Sie hat nämlich nur dann einen Sinn, wenn das Bezugssystem[1], auf das sie sich bezieht, angegeben wird. Ein Körper kann ja nicht in allen Bezugssystemen zugleich unbeschleunigt sein. In der dritten (endgültigen) Formulierung lautet das **erste Newtonsche Axiom**:

> Es gibt Bezugssysteme, in denen sich *alle* Körper, die keine Umgebung haben, gleichförmig und geradlinig bewegen oder ruhen.

Wie diese Bezugssysteme, die man **Inertialsysteme** (lateinisch: *inertia* = Trägheit) nennt, aussehen, wird im Axiom nicht gesagt.

1) Bezugssysteme sind physikalische Systeme mit Vorrichtungen zur Orts- und Zeitmessung, also mit Maßstäben und Uhren. Ein gutes Beispiel dafür ist ein periodisches Gitter aus geradlinigen, unendlich langen und dünnen Fäden mit regelmäßig angeordneten, synchronisierten Uhren. Beispiele sind auch der Hörsaal und der Laborraum mit entsprechenden Messgeräten. Alle Bezugssysteme enthalten einen Bezugspunkt 0.

Führt man im Bezugssystem Koordinaten ein, um Bewegungen oder Positionen von Körpern mathematisch zu beschreiben, so wird das Bezugssystem zum Koordinatensystem. Ein Koordinatensystem wird durch die Angabe $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ des Bezugspunktes (Koordinatenursprunges) 0 und der drei Basisvektoren festgelegt.

Viele Physiker unterscheiden nicht streng zwischen den Begriffen „Bezugssystem" und „Koordinatensystem". Auch für uns sollen diese beiden Begriffe gleichwertig sein.

Klassische Mechanik, 10. Aufl. Friedhelm Kuypers.

Nach unserer Erkenntnis sind alle Systeme inertial, die fest mit dem Fixsternhimmel verbunden sind. Dann sind auch alle Bezugssysteme, die sich mit konstanten Geschwindigkeitsvektoren gegen den Fixsternhimmel bewegen – ohne zu rotieren –, inertial. Die Geschwindigkeiten in diesen verschiedenen Systemen unterscheiden sich nur durch *konstante* Relativgeschwindigkeiten. Zum Beweis betrachten wir ein Bezugssystem S, das fest mit dem Fixsternhimmel verbunden ist, und ein weiteres Bezugssystem S′, das sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ im System S bewegt. Eine Punktmasse habe in beiden Bezugssystemen die Ortsvektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$. Zwischen beiden Ortsvektoren besteht die Beziehung:

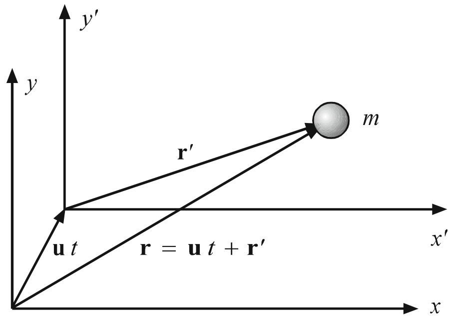


Abb. 1.1–1 Die beiden Bezugssysteme S und S′ haben eine konstante Relativgeschwindigkeit **u**, so dass Ortsvektoren und Geschwindigkeiten in beiden Bezugssystemen verschieden sind, nicht aber die Beschleunigungen.

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}\,t + \mathbf{r}'(t) \\ \Rightarrow\quad & \mathbf{v}(t) = \mathbf{u} + \mathbf{v}'(t) \\ \Rightarrow\quad & \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) \end{aligned}$$

Die Beschleunigungen sind in allen Inertialsystemen gleich groß.

Fest auf der Erde verankerte Bezugssysteme sind wegen der Erdrotation und der beschleunigten Translation der Erde im Weltraum nicht exakt inertial.[2] Sie können aber im Maschinenbau und in den meisten Problemen der Mechanik in sehr guter Näherung als inertial angesehen werden.

Sehr lange dauernde Vorgänge – z. B. mehrstündige Schwingungen eines Foucault-Pendels – und sehr großräumige Bewegungen – z. B. Geschossbahnen sowie Luft- und Meeresströmungen – werden aber entscheidend durch die Erdrotation beeinflusst. Daher ist bei langfristigen oder bei großräumigen Bewegungen unbedingt zu berücksichtigen, dass die Erde kein exaktes Inertialsystem ist, sondern rotiert. Wir werden in Abschn. 1.4 „Beschleunigte Bezugssysteme" darauf näher zurückkommen.

Nach dem ersten Newtonschen Axiom sind alle umgebungsfreien, d. h. kräftefreien Körper in Inertialsystemen unbeschleunigt. Wir gehen nun einen Schritt weiter und untersuchen die Wirkung der Umgebung auf die Bewegung. Dabei verbleiben wir in Inertialsystemen.

Der Einfluss der Umgebung äußert sich in Kräften. Die Kräfte sind für Abweichungen von der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung und für das Verlassen der Ruhelage verantwortlich. Mit dem **Impuls**

$$\mathbf{p} := m\,\mathbf{v} \qquad (1.1\text{–}1)$$

---

2) Das Sonnenlicht braucht für den Weg von der Sonne zur Erde knapp 8,5 Minuten. Der mittlere Radius der leicht elliptischen Erdbahn beträgt daher $r \approx 1{,}5 \times 10^{11}$ m. Folglich wird die Erde mit $a = \omega^2 r \approx 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$ zur Sonne hin beschleunigt. Die Sonne wiederum umläuft das Zentrum der Milchstraße mit der Geschwindigkeit $v \approx 250$ km/s und dem Radius $r \approx 30\,000$ Lichtjahre $\approx 2{,}8 \cdot 10^{20}$ m. Deshalb wird die Sonne zum Zentrum der Milchstraße beschleunigt mit $a = v^2/r \approx 2{,}2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$.

lautet das **zweite Newtonsche Axiom**:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{p} = \frac{d}{dt}\,(m\,\mathbf{v}) = \dot{m}\,\mathbf{v} + m\,\mathbf{a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur für } m\,=\,\text{const}}}{=} m\,\mathbf{a} \qquad (1.1\text{–}2)$$

Wenn nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, dann betrachten wir nur konstante Massen.

Das zweite Newtonsche Axiom gilt in Inertialsystemen. Es gilt in beschleunigten Bezugssystemen nur, wenn wir Trägheitskräfte einbeziehen (siehe Abschn. 1.4). In der *einen* Gl. (1.1–2) treten mit Masse m und Kraft $\mathbf{F}$ zugleich *zwei* neue Begriffe auf, die noch nicht definiert sind.

Wir definieren zuerst die Masse m mit dem dritten Newtonschen Axiom. Das **dritte Newtonsche Axiom** lautet:

Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft $\mathbf{F}_{21}$ aus, so übt der Körper 2 auf den Körper 1 die Kraft $\mathbf{F}_{12}$ aus, die denselben Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie $\mathbf{F}_{21}$ hat:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \qquad (1.1\text{–}3)$$

In Worten: „actio = reactio“.

Für zwei konstante Massen, die nur untereinander wechselwirken und keine Umgebung haben, gilt nach dem zweiten Axiom:

$$\begin{aligned} & m_1\ddot{r}_1 = F_{12} \qquad m_2\ddot{r}_2 = -F_{12} \\ \Rightarrow\quad & \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}_2|}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|} \end{aligned} \qquad (1.1\text{–}4)$$

Daher ermöglichen die Beschleunigungsmessungen in inertialen Systemen mit nur *zwei* Teilchen die Bestimmung jeder Masse als Vielfaches der normierten Masseneinheit. Damit sind die Massen vollständig bestimmt: Die Einheit der Masse ist international abgestimmt, das Vielfache der Einheit wird mit Gl. (1.1–4) gemessen.[3]

Nach der Bestimmung der Massen können nun endlich die Kräfte festgelegt werden. Zu diesem Zweck wird für einen Krafttyp eine *begrenzte* Zahl von Bahnen möglichst genau vermessen, d. h. Geschwindigkeit und Beschleunigung werden entlang der Bahnen gemessen. Aufbauend auf diesen Messungen *postuliert* (!) man eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)$ derart, dass die mit der Gl. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \dot{\mathbf{p}}$ berechneten Bahnen mit den gemessenen Bahnen übereinstimmen.

Nach der Postulierung der Kräfte werden alle anderen Bahnen mit dem zweiten Newtonschen Axiom berechnet, d. h. der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens wird als Funktion der Zeit berechnet. Die Differentialgleichung (1.1–2) heißt daher auch **Bewegungsgleichung**.

3) Natürlich kann man Gl. (1.1–4) auch einfacher beweisen, indem man verschiedene Massen m_1, m_2, … einer einzigen Kraft $\mathbf{F}$ aussetzt, die mit Sicherheit für alle Massen gleich groß ist. Dann gilt: $F = m_1\ddot{r}_1 = m_2\ddot{r}_3 = \cdots$.

Daraus folgt ebenfalls Gl. (1.1–4). Der Nachteil dieser einfachen Methode besteht darin, dass man absolut sicher sein muss, dass auf alle Teilchen dieselbe Kraft $\mathbf{F}$ wirkt. In den Zweikörpersystemen ist dies wegen „actio = reactio“ automatisch sichergestellt. (Siehe auch Aufgabe 2–4.)

Es gibt noch ein **viertes Newtonsches Axiom**, das bei Newton nur als Zusatz auftritt und uns so selbstverständlich zu sein scheint, dass es oft übersehen wird. Dieses auch „Regel vom Parallelogramm der Kräfte" genannte Axiom besagt: Kräfte addieren sich wie Vektoren: $m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$.

Danach ruft jede Kraft die ihr zukommende Beschleunigung hervor, unabhängig davon, ob noch andere Kräfte wirken. Die Unabhängigkeit der Kraftwirkungen voneinander ist ein Superpositionsprinzip für Kräfte.

1.2 Konservative Kräfte und Potentiale

Die Kräfte auf ein Teilchen können vom Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens, von seiner Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und von der Zeit t abhängen. Es gibt keine Kräfte, die von der Beschleunigung abhängen. Die Arbeit längs eines infinitesimalen Wegelementes ist

$$dW = \mathbf{F}\,[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot d\mathbf{r} \tag{1.2–1}$$

Die Arbeit längs einer endlichen Kurve C wird durch ‚Summation' der infinitesimalen Arbeiten berechnet. So entstehen **Linien-** oder **Kurvenintegrale**. Linienintegrale werden meistens durch die Parametrisierung der Raumkurve C berechnet, wobei als Parameter oft die Zeit t verwendet wird. Wenn eine im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durchlaufene Kurve durch die *Parameterdarstellung* $\mathbf{r}(t)$ beschrieben wird, dann ist $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)\,dt$ und das *Linienintegral geht in ein gewöhnliches Integral über*:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot \mathbf{v}(t)\,dt \tag{1.2–2}$$

Für geschwindigkeits- oder zeitabhängige Kräfte hängt die Arbeit vom zeitlichen Ablauf der Bewegung ab, also von der Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird. Für diese Kräfte sind im Zusammenhang mit der Arbeit keine nennenswerten Gleichungen und Eigenschaften zu verzeichnen – abgesehen von der Lorentzkraft in Beispiel 1.2–2. Das ändert sich aber, wenn wir rein ortsabhängige Kräfte untersuchen. *Für* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ *hängt die Arbeit nicht davon ab, wie schnell die Kurve durchlaufen wird*. Hinter den folgenden zwei Beispielen werden wir sogar – für die Physik besonders wichtige und häufig auftretende – Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kennenlernen, deren Arbeit nicht einmal vom durchlaufenen Weg abhängt, sondern nur noch vom Anfangs- und Endpunkt des Weges. Diese Kräfte lassen sich durch ein Potential $V(\mathbf{r})$ beschreiben.

Beispiel 1.2–1 Linienintegral für zwei verschiedene Wege

Die Kraft $\mathbf{F} = (y, x^2/(2\,\mathrm{m}), x + z)\,\mathrm{N/m}$, die hier nur als einfaches Beispiel dient und keine physikalische Bedeutung hat, bewegt einen Körper zwischen den beiden Punkten

$$\mathbf{r}_1 = (2\,\mathrm{m}, 0, 0) \qquad \mathbf{r}_2 = (2\,\mathrm{m}, 0, 4\,\mathrm{m})$$

a) auf einer Geraden parallel zur z-Achse.

b) auf einer Schraubenlinie, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt.

Berechne die Arbeit auf beiden Wegen.

Lösung:

a) Mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_z$ in z-Richtung gilt: $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_z\, dz$. Die Arbeit beträgt daher

$$W_\mathrm{a} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{4\,\mathrm{m}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z\, dz$$

$$= \int_0^{4\,\mathrm{m}} (2\,\mathrm{m} + z)\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\, dz = 16\,\mathrm{N\,m}$$

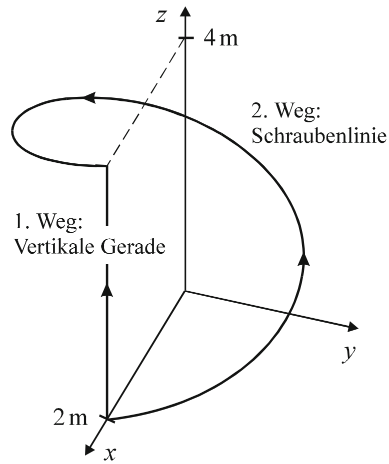


Abb. 1.2–1 Zwei Verschiebungen.

b) Die Schraubenlinie wird durch eine Parameterdarstellung beschrieben:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{m} \cdot \cos\varphi \\ 2\,\mathrm{m} \cdot \sin\varphi \\ 4\,\mathrm{m} \cdot \varphi/(2\pi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad W_\mathrm{b} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{m} \cdot \sin\varphi \\ 2\,\mathrm{m} \cdot \cos^2\varphi \\ 2\,\mathrm{m} \cdot \cos\varphi + 2\,\mathrm{m} \cdot \varphi/\pi \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{m} \cdot \sin\varphi \\ 2\,\mathrm{m} \cdot \cos\varphi \\ 2\,\mathrm{m}/\pi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \left[-4\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right) + 4\left(\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right) + \left(2\sin\varphi + \frac{\varphi^2}{\pi}\right)\frac{2}{\pi}\right]\Bigg|_0^{2\pi} \mathrm{N\,m}$$

$$= (8 - 4\pi)\ \mathrm{N\,m}$$

Auf beiden Wegen werden verschiedene Arbeiten geleistet: $W_\mathrm{a} \neq W_\mathrm{b}$. Die vorgegebene Kraft wird weiter unten „nicht konservativ“ genannt werden.

Beispiel 1.2–2 Arbeit der Lorentzkraft

Ein Magnetfeld $\mathbf{B}$ übt auf eine bewegte Ladung q die Lorentzkraft $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ aus. Zeige, dass die Lorentzkraft keine Arbeit verrichtet.

Lösung:

Da die Lorentzkraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, gilt[4]

$$W = \int_{t_1}^{t_2} q\ \underbrace{[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))] \cdot \mathbf{v}(t)}_{=0}\ dt = 0$$

4) Obwohl die Arbeit der Lorentzkraft für alle Wege gleich ist (nämlich null), ist die Lorentzkraft nicht konservativ, da nur rein ortsabhängige Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ – laut der später folgenden Definition – konservativ sein können.