introducción a la lógica matemática

P. SUPPES
S. HILL

EDICION ECONOMICA

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

introducción a la lógica matemática

P. SUPPES
S. HILL

PRIMER CURSO

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Titulo de la obra original:
FIRST COURSE IN MATHEMATICAL LOGIC

Editada por:
AISDELL PUBLISHING COMPANY
División of Ginn and Company
Nueva York

Edición en papel:
ISBN 978-84-291-5150-3 (España)
ISBN 978-968-6708-01-1 (México)

Edición e-book (PDF):
ISBN 978-84-291-9139-4

Versión española de:
DR. ENRIQUE UNES ESCARDO
Catedrático de la Facultad de
Ciencias de Barcelona (España)

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S.A. y **REVERTÉ EDICIONES, S.A. DE C.V.**
Loreto 13-15 LocalB
08029 Barcelona,España
Tel.:(+34) 93 419 33 36
E-mail (Internet):
reverte@reverte.com

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso del editor

PRÓLOGO

Modernamente la Lógica se ha convertido en una materia no sólo profunda, sino de gran amplitud y aplicación a otras Ciencias. Sólo desde hace algunos años se han establecido relaciones sistemáticas entre la Lógica y la Matemática, formulándose una teoría de inferencia completamente explícita que se adecua a todos los ejemplos típicos del razonamiento deductivo en Matemáticas y a las Ciencias empíricas. En la mente de todos los matemáticos modernos está el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. El propósito de este libro es introducir al estudiante en el método deductivo de la Matemática moderna, a un nivel que, aun siendo riguroso, sea lo suficientemente sencillo en presentación y contexto, para que permita una fácil comprensión.

No se puede poner en duda la importancia en la Matemática moderna, de la teoría de la demostración y de la metodología en la deducción de teoremas a partir de axiomas. Sin embargo, el desarrollo de la destreza en los razonamientos deductivos, ha sido considerado como de interés secundario en los planes de enseñanza de especialización matemática. El punto de vista representado en este libro es el de que una enseñanza de lógica matemática bien meditada y planeada, al principio de la carrera del estudiante le proporcionará una base para estudios de Matemáticas más profundos y penetrantes.

El objetivo del presente volumen comprende la teoría proposicional de inferencia, inferencia con cuantificadores universales, y aplicaciones de la teoría de la inferencia al desarrollo de la teoría elemental de grupos conmutativos, o la teoría de la adición, que es como se ha desarrollado en el texto. Debido a las complejidades que introducen los cuantificadores existenciales se ha dejado su consideración para el volumen siguiente, *Segundo curso de Lógica matemática*. Se puede observar que la restricción a los cuantificadores universales que se presentan al principio de fórmulas no es tan severa como pudiera parecer. La mayor parte de las teorías matemáticas elementales con las que se puede encontrar el estudiante pueden formularse dentro de esta armazón. Esta restricción proporciona al estudiante una oportunidad para aprender cómo se hacen demostraciones matemáticas rigurosas y no triviales, sin adentrarse en las sutilezas que envuelven los cuantificadores existenciales. Se ha insistido también mucho a lo largo del libro en la importancia del problema de traducir a símbolos lógicos o matemáticos proposiciones enunciadas en lenguaje corriente.

El presente libro es la cuarta versión de un conjunto de notas desarrolladas en 1960-61 para ser utilizadas en una clase experimental de alumnos seleccionados de una escuela elemental. La segunda versión del texto se utilizó en once clases de estudiantes seleccionados de la escuela elemental en 1961-62. La tercera versión se utiliza experimentalmente en 1962-63 con diez clases de estudiantes seleccionados de la escuela elemental y 200 estudiantes del «College» en un proyecto patrocinado conjuntamente por el Office of Education y la National Science Foundation. La edición del libro fue subvencionada por la Carnegie Corporation de Nueva York.

Se ha intentado escribir el libro de manera que lo puedan utilizar los estudiantes con un margen de edad y habilidad muy amplio. La Lógica, afortunadamente, es una de las materias que no requiere gran base o experiencia para poder llegar a un buen adiestramiento. Por esta razón, un libro de este tipo particular puede ser utilizado por una gran variedad de estudiantes. La experiencia con las versiones citadas indica que el material que contiene es razonablemente satisfactorio para los estudiantes seleccionados de Segunda enseñanza y, por otra parte, no demasiado elemental para que no pueda ser utilizado por alumnos de primer curso de la Universidad. Creemos que este libro será útil a una gran diversidad de alumnos de Enseñanza media y a las clases de Matemáticas de Selectivo de la Facultad. Está en preparación el *Segundo curso de Lógica matemática* para aquellas clases que dispongan de tiempo para una exposición más amplia de esta materia.

Agradecemos a Mrs. Madeline Anderson su trabajo paciente y competente de mecanografiar el manuscrito. Manifestamos nuestro mayor reconocimiento a Mr. Frederick Binford por sus valiosas sugerencias y críticas, quien se ha hecho también responsable de preparar la detallada Edición para el maestro. Mr. Richard Friedberg hizo muchos comentarios y críticas muy útiles al último borrador de manuscrito.

PATRICK SUPPES
SHIRLEY HILL

Universidad de Stanford
Stanford, California
Enero, 1963

INDICE ANALÍTICO

CAPITULO 1

SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

1.1 *Proposiciones*

Con el estudio de la Lógica se persigue llegar a ser preciso y cuidadoso. La Lógica tiene un lenguaje exacto. Pero aunque así sea, vamos a intentar construir un vocabulario para este lenguaje preciso utilizando el lenguaje cuotidiano algunas veces un tanto confuso. Es necesario redactar un conjunto de reglas que sean perfectamente claras y definidas y que estén libres de las vaguedades que pueden hallarse en nuestro lenguaje corriente. Para realizar este trabajo se utilizarán proposiciones en lengua castellana, de la misma manera que se usa la lengua castellana para explicar las reglas precisas de un juego a alguien que no ha jugado a ese juego. Por supuesto, la lógica es algo más que un juego. Puede ayudarnos a aprender una forma de razonar que es exacta y a la vez muy útil.

Para empezar, consideremos las proposiciones en lengua castellana. Cada proposición tiene una forma lógica a la que se le dará un nombre. En primer lugar, se consideran y simbolizan dos clases de proposiciones en Lógica; unas se denominan proposiciones *atómicas* y otras proposiciones *moleculares*.

En este siglo de la Ciencia se utiliza la palabra *atómico* muchas veces. Efectivamente, el significado de esta palabra en el lenguaje de la Lógica es análogo a su significado original en las Ciencias físicas. En Lógica, *atómicas* son las proposiciones de forma más simple (o más básicas). Si se juntan una o varias proposiciones atómicas con un término de enlace, se tiene una proposición *molecular*. Una proposición atómica es una proposición completa sin términos de enlace. Se utilizan términos de enlace para formar proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Por ejemplo, considérense dos proposiciones atómicas,

Hoy es sábado.
No hay clase.

Ambas proposiciones son atómicas. Mediante un término de enlace se pueden unir y se tendrá una proposición molecular. Por ejemplo, se puede decir

Hoy es sábado y no hay clase.

Esta proposición molecular se ha construido con dos proposiciones atómicas y el término de enlace «y». Cuando analizamos una proposición molecular la descomponemos en las más pequeñas proposiciones atómicas completas. En el ejemplo anterior se puede descomponer la proposición molecular en dos proposiciones atómicas. El término de enlace «y» no forma parte de ninguna de las proposiciones atómicas. Se ha añadido a las proposiciones atómicas para construir una proposición molecular.

• 1.2 *Términos de enlace*

Las palabras de enlace, por cortas que sean, no deben subestimarse, pues son de gran importancia. Tanto es así, que se estudiarán algunas reglas muy precisas para el uso de esta clase de términos. Gran parte de lo que se tratará en el estudio de la Lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace. El término de enlace en la proposición del ejemplo «Hoy es sábado y no hay clase» es la palabra «y». Hay otros, pero antes de considerar cada uno de ellos separadamente, les daremos el nombre lógico correcto. Se les denominará *términos de enlace de proposiciones*. Este nombre será fácil de recordar, porque indica efectivamente cuál es el papel que desempeñan. Enlazan proposiciones. Forman proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas.

Los términos de enlace que se utilizarán en este capítulo son las palabras «y», «o», «no», y «si..., entonces». En la gramática castellana se les da a veces otros nombres, pero en Lógica los denominaremos, como ya hemos indicado, *términos de enlace de proposiciones* o simplemente *términos de enlace*. Recuérdese que al añadir un término de enlace a una o dos proposiciones atómicas se ha formado una proposición molecular. Los tres términos de enlace considerados, «y», «o», «si..., entonces», se usan para enlazar dos proposiciones atómicas, pero el otro se agrega a una sola proposición atómica para formar una molecular. Este término de enlace es la palabra «no». Se puede decir que el término de enlace «no» cada vez actúa sobre *una* sola proposición atómica y que los otros términos de enlace actúan sobre *dos* proposiciones atómicas a la vez. Recuérdese que el término de enlace «no», es el único que no conecta realmente *dos* proposiciones. Cuando a una sola proposición se le agrega «no» se forma una proposición molecular.

Se dan a continuación algunos ejemplos de proposiciones moleculares que utilizan los términos de enlace considerados.

La proposición

La luna no está hecha de queso verde

es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». En este caso, el término de enlace actúa sólo sobre *una* proposición atómica: «La luna está hecha de queso verde».

Un ejemplo de una proposición en la que se utiliza el término de enlace «o» es

El viento arrastrará las nubes o lloverá hoy con seguridad.

El término de enlace «o» actúa sobre *dos* proposiciones atómicas. Son «El viento arrastrará las nubes» y «Lloverá hoy con seguridad».

La proposición molecular:

Si estamos en diciembre entonces llegará pronto Navidad

ilustra sobre el uso del término de enlace «si..., entonces», que también actúa sobre *dos* proposiciones atómicas. ¿Cuáles son?

Ya se ha dado un ejemplo de proposición que utiliza el término de enlace «y». Otra es:

El terreno es muy rico y hay suficiente lluvia.

¿Cuáles son las dos proposiciones atómicas contenidas en esta proposición molecular??

Los ejercicios que se ponen a continuación ofrecen una oportunidad para comprobar la habilidad del lector para reconocer proposiciones atómicas, proposiciones moleculares y términos de enlace. Recuérdese que cada proposición que contiene un término de enlace es molecular.

Ejercicio 1

A. Señalar cada proposición atómica con una A y cada proposición molecular con una M. Escribir junto a cada proposición molecular el término de enlace utilizado.

1. La comida será hoy a las tres en punto.
2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
4. A este perro grande le gusta cazar gatos.

5. Él pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.
6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.
7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.
8. California está al oeste de Nevada y Nevada al oeste de Utah.
9. Muchos estudiantes estudian Lógica en el primer año de carrera.
10. Los gatitos no acostumbran a llevar mitones.
11. Si los gatitos llevan mitones, entonces los gatos pueden llevar sombreros.
12. Se puede encontrar a Juana en casa de Susana.
13. A las focas no les crece el pelo.
14. Si María canta, entonces es feliz.
15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.
16. La asignatura preferida de Jaime es Matemáticas.
17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.
18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.
19. Esta proposición es atómica o es molecular.
20. El sol calentaba y el agua estaba muy agradable.
21. Si $x=0$ entonces $x+y=1$.
22. $x+y>2$.
23. $x=1$ o $y+z=2$.
24. $y=2$ y $z=10$.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando una o dos de las proposiciones escritas a continuación junto con un término de enlace. Por ejemplo, se puede poner el término de enlace «y» entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese cada uno de los cuatro términos de enlace *una sola vez,* de manera que cada una de las proposiciones moleculares tenga distinto término de enlace.

1. El viento sopla muy fuerte.
2. Pablo podría ganar fácilmente.
3. La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.
4. Veremos qué planes hay para mañana.
5. Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.
6. El amigo de Juan tiene razón.
7. Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.

C. Decir cuáles son los términos de enlace en las proposiciones siguientes. Decir cuántas proposiciones atómicas se encuentran en cada proposición molecular. Recuérdese que «si..., entonces» es un solo término de enlace.

1. Este no es mi día feliz.
2. Ha llegado el invierno y los días son más cortos.
3. Muchos gérmenes no son bacterias.
4. Los anfibios se encuentran en el agua fresca o se encuentran en la tierra cerca de sitios húmedos.
5. Si hay fallas en las grandes masas rocosas, entonces es posible que ocurran terremotos.
6. Este número es mayor que dos o es igual a dos.
7. Si es un número positivo entonces es mayor que cero.
8. Este chico es mi hermano y yo soy su hermana.
9. Mi puntuación es alta o recibiré una calificación baja.
10. Si usted se da prisa entonces llegará a tiempo.
11. Si $x>0$ entonces $y=2$.
12. Si $x+y=2$ entonces $z>0$.
13. $x=0$ o $y=1$.
14. Si $x=1$ o $z=2$ entonces $y>1$.
15. Si $z>10$ entonces $x+z>10$ y $y+z>10$.
16. $x+y=y+x$.

D. Escribir primero cinco proposiciones atómicas y formar después cinco proposiciones moleculares.

• 1.3 *La forma de las proposiciones moleculares*

Las reglas para el uso de los términos de enlace son las mismas, cualesquiera que sean las proposiciones atómicas que enlazan o en las que se han utilizado. En uno de los ejercicios anteriores se vio que era posible elegir una o dos proposiciones atómicas cualesquiera de un grupo y combinarlas con un término de enlace. La *forma* de las proposiciones moleculares construidas depende del término de enlace seguido, no del contenido de la proposición o proposiciones atómicas. Es decir, si en una proposición molecular se sustituyen las proposiciones atómicas por otras proposiciones atómicas cualesquiera, la forma de la proposición molecular se conserva. La misma manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» lo indica. Los puntos suspensivos después de «si» y los puntos suspensivos después de «entonces» ocupan el lugar de las proposiciones. Para formar proposiciones moleculares utilizando este término de enlace basta simplemente sustituir los puntos suspensivos por proposiciones atómicas *cualesquiera*.

Podemos darnos cuenta fácilmente de la *forma* de una proposición molecular, no escribiendo las proposiciones atómicas de que consta y sólo indicando el lugar que ocupan. Se puede representar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «y» de la manera siguiente

―――――― y ――――――

o bien

( ) y ( )

Se pueden sustituir los espacios por cualquier proposición y la forma es la misma. Por ejemplo, eligiendo las proposiciones «Es rojo» y «Es azul» y poniéndolas en los espacios señalados, se tiene la proposición molecular «Es rojo y es azul». Se podrían haber escogido otras dos proposiciones atómicas y formar, por ejemplo, la proposición «Yo soy alto y él es bajo». La forma permanece la misma. Se trata de una proposición molecular en la que se utiliza el término de enlace «y». Otra manera de poner de manifiesto la forma es encerrar entre paréntesis las proposiciones atómicas, cuando se ha escrito la proposición molecular como en los ejemplos siguientes:

(Es rojo) y (es azul).
(Llueve) y (Pedro se ha mojado).

Hemos dicho que se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, incluso sin limitarnos a proposiciones atómicas. Se pueden también utilizar proposiciones moleculares y la *forma* es la misma. Por ejemplo, se puede llenar el primer espacio con la proposición molecular «Juan no está aquí», y el segundo espacio con la proposición molecular «Andrés no está aquí». La proposición será entonces

Juan no está aquí y Andrés no está aquí.

De nuevo, la forma es la misma. El término de enlace «y» enlaza dos proposiciones, pero en este caso son proposiciones moleculares.

También se podría utilizar una proposición molecular y una proposición atómica, como en:

Juan no está aquí y Luis está aquí.

Lo importante es que cualesquiera que sean las proposiciones con las que se llenen los espacios, la forma es la de una proposición molecular con el término de enlace «y».

Todo lo dicho es aplicable a los otros términos de enlace. Podemos poner de manifiesto la forma de otros tipos de proposiciones moleculares de la manera siguiente:

( ) o ( ).
Si ( ) entonces ( ).

Se pueden llenar los espacios con proposiciones cualesquiera, atómicas o moleculares. A continuación se dan ejemplos, en algunos de los cuales se usan paréntesis para mayor claridad.

María está aquí o Elena está en casa.
(Juan está en la ciudad) o (María no está en casa).
Si $2+3=x$ entonces $x=5$.
Si $(y+1=4)$ entonces $(y=3)$.
Si (José no es infiel) entonces (Juan es fiel).

Algunas veces, en castellano se utiliza una sola palabra para un término de enlace particular, pero otras veces se usan dos o más. Por ejemplo, se puede utilizar la única palabra «o» como término de enlace como en:

Es muy pesado o es hueco,

o se puede escribir la misma frase añadiendo la palabra «o» al principio como una parte del término de enlace:

O es muy pesado o es hueco.

Las dos palabras «o» son partes del mismo término de enlace. En las proposiciones en castellano algunas veces se utiliza «o»-«o» y otras sólo «o». Cuando se hable del término de enlace «o» se sobreentenderá que puede incluir también una «O» inicial, si se desea utilizar. La forma para el término de enlace «o» puede ser, por tanto:

O (   ) o (   ).

Los ejemplos que siguen son de esta forma:

O Juan está aquí o no llueve.
O (María no está aquí) o (Susana no está aquí).
O $x+y=6$ y $y=2$, o $x=0$.
O $(x+y=7$ y $y\neq 2)$ o $(x>0)$.

En algunos casos, al utilizar el término de enlace «y» pueden incluirse las palabras «A la vez». Por ejemplo, se puede decir:

A la vez llueve y sale el sol.

Las palabras «a la vez» e «y» son partes de un mismo término de enlace. En general sólo se utiliza «y», pero ocasionalmente también «a la vez». Siempre nos referiremos al término de enlace «y», pero podrá presentarse en la forma:

A la vez ( ) y ( ).

Por ejemplo,

A la vez $(x>0)$ y $(y\neq 0)$.
A la vez $x\neq y$ y $y\neq z$.

En muchos casos en que se utiliza el término de enlace «si..., entonces...» se incluyen ambas palabras, sin embargo, frecuentemente nos encontramos que se suprime la palabra «entonces». Por ejemplo:

Si es Felipe, es lento.

Proposiciones de esta clase están formadas por el término de enlace «si..., entonces...» y son de la forma:

Si ( ), ( ).

Ejemplos de esta forma son:

Si $x+y=2$ y $y=0$, $x=2$.
Si $(x+y=7$ y $x=6)$, $(y=1)$.
Si María quiere a Juan, Juan quiere a María.

La palabra «no», en castellano, se encuentra muy frecuentemente dentro de las proposiciones atómicas. Por este motivo es fácil olvidarla. Pero una proposición tal como:

La lógica no es difícil,

es una proposición molecular puesto que contiene el «no». Es posible escribir este término de enlace utilizando la frase «no ocurre que». La proposición se leería entonces:

No ocurre que la lógica sea difícil.

Entonces es posible presentar la forma de una proposición molecular utilizando el término de enlace «no» del siguiente modo:

No ocurre que ( ),

o más brevemente:

no ( ).

Ejemplos de esta forma son:

No ocurre que $(x=0)$.

No ocurre que $(x+y>2)$.
No $(x=2+1)$.
No $(7>x+y)$.

Evidentemente, el uso de «No (   )» es infrecuente en el lenguaje castellano, pero se verá más tarde que es de utilidad su uso en los contextos matemáticos.

En las proposiciones matemáticas en las que se utiliza el signo igual $=$, se indica con frecuencia la negación con un trazo inclinado sobre el signo igual: $\neq$. Así, «$x\neq 1$» se lee «x no es igual a 1».

En ninguna de las dos proposiciones «$x\neq 1$» y «Juan no está aquí», se puede utilizar el paréntesis para mostrar la forma de la proposición molecular, porque el término de enlace «no» aparece dentro de la proposición atómica.

Ejercicio 2

A. Utilizar el paréntesis para poner de manifiesto la forma de las siguientes proposiciones moleculares.

1. Juan está aquí y María ha salido.
2. Si $x+1=10$ entonces $x=9$.
3. O María no está aquí o Juan se ha ido.
4. Si $x=1$ o $y=2$ entonces $z=3$.
5. Si $x\neq 1$ y $x+y=2$ entonces $y=2$.
6. Si Pedro está en casa o Juan está en el patio, entonces José es inocente.
7. $y=0$ y $x=0$.
8. O $y=0$ y $x\neq 0$ o $z=2$.
9. No ocurre que $6=7$.
10. No ocurre que si $x+0=10$ entonces $x=5$.

B. Escribir en lenguaje corriente proposiciones de las formas siguientes. Suprimir los paréntesis al escribir las proposiciones.

1. O (   ) o (   ).
2. (   ) o (   ).
3. A la vez (   ) y (   ).
4. (   ) y (   ).
5. No (   ).
6. Si (   ) entonces (   ).
7. Si (   ), (   ).
8. Si no (   ) entonces no (   ).
9. No ocurre que (   ).

● 1.4 *Simbolización de proposiciones*

Generalmente se cree que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas, pero también algunas de las proposiciones atómicas del lenguaje corriente son largas, resultando por ello pesadas y de difícil manejo. En Lógica se afronta este problema utilizando *símbolos* en lugar de las proposiciones completas.

Los símbolos que usaremos en lógica para representar proposiciones, son letras mayúsculas tales como «**P**», «**Q**», «**R**», «**S**», «**A**», y «**B**». Por ejemplo, sea:

P = «La nieve es profunda».
Q = «El tiempo es frío».

Consideremos ahora la proposición «La nieve es profunda y el tiempo es frío». Primero escribiremos la forma lógica de la proposición haciendo uso de los paréntesis:

(La nieve es profunda) y (el tiempo es frío).

Utilizando «**P**» y «**Q**» queda simbolizada la proposición de la manera siguiente

(**P**) y (**Q**).

Supongamos ahora que se desea simbolizar una proposición molecular que utiliza el término de enlace «o», y se considera la proposición «Se puede elegir sopa o se puede elegir ensalada». La simbolizaremos de la manera siguiente:

Sea

R = «Se puede elegir sopa»
S = «Se puede elegir ensalada».

y la proposición quedará simbolizada por

(**R**) o (**S**).

Al simbolizar una proposición que contiene el término de enlace «no», la palabra «no» se pone delante del símbolo que sustituye a la proposición atómica, aunque ordinariamente en castellano la palabra «no» se encuentre dentro de la proposición atómica sobre la que actúa. El término de enlace, sin embargo, no es una parte de la proposición atómica y, por tanto, la palabra «no», debe separarse de la proposición atómica. Por ejemplo, simbolizaremos la proposición «Los patos no son animales de cuatro patas» de la siguiente manera:

Sea

Q =«Los patos son animales de cuatro patas»,

la proposición molecular será entonces

No (**Q**).

El último símbolo sustituye sólo a la proposición atómica y no incluye el término de enlace.

Se verá más adelante que si se utilizan símbolos para las proposiciones atómicas es más fácil trabajar con las proposiciones moleculares, que pueden resultar muy largas y complicadas.

Los ejercicios que se dan a continuación pueden servir para adquirir práctica en la simbolización de proposiciones.

Ejercicio 3

A. Simbolizar las proposiciones moleculares siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas.

1. Necesito ponerme las gafas o esta luz es débil.

Sea

G =«Necesito ponerme las gafas»
L = «Esta luz es débil»,

entonces la proposición queda simbolizada en la forma

(**G**) o (**L**).

2. Los patitos no se transforman en cisnes.
3. Daba tres pasos hacia la derecha y entonces iba dos pasos hacia adelante.
4. Estos problemas no son fáciles para mí.
5. Si suena el timbre, entonces es hora de empezar la clase.
6. Si la clase de Química ya ha empezado entonces llego tarde.
7. Una parte de la Luna no se ve desde la Tierra.
8. O Antonio irá al teatro o irá al cine.
9. Las rosas son rojas y las violetas son azules.
10. Si Brasil está en Sudamérica entonces está en el hemisferio Sur.

B. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras que tengan la misma forma. (Utilizar el mismo término de enlace y sustituir las letras con proposiciones atómicas.) Especificar cuál es la proposición atómica representada por cada una de las letras.

1. Si (**P**), entonces (**Q**)
2. (**R**) o (**S**)
3. (**P**) y (**Q**)
4. No (**E**)
5. Si (**S**), entonces (**B**)
6. No (**P**)
7. (**R**) y (**T**)
8. (**S**) o (**Q**)
9. No (**T**)
10. Si (**R**), entonces (**S**).

C. Cada una de las proposiciones siguientes es molecular. Primero indicar cuáles son el término o términos de enlace de cada proposición. Después escribir separadamente las proposiciones atómicas que se encuentran en cada una de las proposiciones moleculares.

1. Juan es el segundo y Tomás es el cuarto.
2. O Jaime es el ganador o Luis es el ganador.
3. José no es el ganador.
4. Si Tomás es el ganador entonces él tendrá la medalla.
5. Si Tomás no es el ganador entonces debe colocarse en segundo lugar.
6. Los Alpes son montañas jóvenes y los Appalaches son montañas viejas.
7. Las arañas no son insectos.
8. Si las arañas son insectos entonces han de tener seis patas.
9. Si un material se calienta entonces se dilata.
10. Muchos planetas son o demasiado cálidos para que vivan seres como nosotros o demasiado fríos para que vivan seres como nosotros.

D. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por letras mayúsculas. Recuérdese que $\neq$ es la negación de $=$.

1. Si $x=y$ entonces $x=2$.
2. Si $x\neq 2$ entonces $y>1$.
3. Si $x\neq 2$ o $x\neq 3$ entonces $x=1$.
4. Si $x+y=3$ entonces $y+x=3$.
5. Si $x-y=2$ entonces $y-x\neq 2$.
6. $x+y=2$ y $y=1$.
7. $x+y+z=2$ o $x+y=10$.
8. Si $x\neq y$ y $y\neq z$ entonces $x>z$.
9. Si $x+y>z$ y $z=1$ entonces $x+y>1$.
10. Si $x\neq y$, entonces $x\neq 1$ y $x\neq 2$.

• 1.5 *Los términos de enlace y sus símbolos*

Ahora que ya sabemos simbolizar proposiciones atómicas, el trabajar con proposiciones moleculares resulta mucho más fácil. Pero también se pueden utilizar símbolos para los mismos términos de enlace. Se considerará cada término de enlace por separado y se le asignará un símbolo. También se dará un nombre a la proposición molecular que se forme utilizando cada uno de los términos de enlace. Estos términos de enlace son tan importantes que se estudiarán por separado en las secciones siguientes, revisando algunas de las cuestiones ya analizadas.

Y. La unión de dos proposiciones con la palabra «y», se denomina *conjunción* de las dos proposiciones. Un ejemplo de una conjunción es esta proposición:

Sus ojos son azules y los ojos de su hermano también son azules.

Sea **P** la proposición atómica «Sus ojos son azules» y sea **Q** la proposición atómica «Los ojos de su hermano también son azules». Entonces se puede simbolizar la proposición molecular, que es una conjunción, por

$$(\mathbf{P})\ \mathrm{y}(\mathbf{Q}).$$

Una conjunción es un tipo de proposición molecular. La proposición molecular es la conjunción de la proposición atómica **P** y la proposición atómica **Q**. Es también útil introducir un símbolo para «y». Nosotros usaremos el símbolo que se encuentra en la mayoría de las máquinas de escribir:

$$\&.$$

Utilizando este símbolo, se puede escribir la conjunción de dos proposiciones **P** y **Q** de la forma:

$$(\mathbf{P})\ \&.\ (\mathbf{Q}).$$

Recuérdese que el símbolo & sustituye al término de enlace completo tanto si se refiere a «y» como si es «a la vez... y...» en lengua castellana.

EJERCICIO 4

A. Simbolizar las proposiciones siguientes, completamente, utilizando el símbolo lógico correspondiente para los términos de enlace. Indicar la proposición atómica que corresponde a cada letra.

1. Juan vive en nuestra calle y Pedro en la manzana contigua.
2. Los discos antiguos de José son buenos pero los modernos son todavía mejores.

3. Metió la nariz y ya sacó tajada.
4. El sol desaparece detrás de las nubes y en seguida empieza a refrescar.
5. El reactor se elevaba a nuestra vista y dejaba tras sí una fina estela blanca.
6. Juana tiene trece años y Rosa quince.
7. Jorge es alto y Andy es bajo.
8. La estrella de mar es un equinodermo y los erizos de mar son también equinodermos.
9. Hoy es día treinta y mañana será primero.
10. El juego ha empezado y llegaremos tarde.

B. Terminar la simbolización de las proposiciones que siguen sustituyendo el término de enlace por el correspondiente símbolo lógico.

1. (P) y (Q)
2. A la vez (A) y (B)
3. (H) y (K)
4. A la vez (T) y (G)
5. (S) y (Q)

C. Traducir al lenguaje corriente las poposiciones siguientes. Es decir, se han de sustituir las letras por proposiciones en lengua castellana y el símbolo lógico por el término de enlace correspondiente.

1. (P) & (Q)
2. (R) & (S)
3. (T) & (C)
4. (B) & (H)
5. (Q) & (P)

D. En las proposiciones matemáticas siguientes, simbolizar sólo el término de enlace «y».

1. $x=0$ y $y=4$.
2. $x\neq 0$ y $x+y=2$.
3. $x-x=0$ y $x+0=x$.
4. $x+y=y+x$ y $x+(y+z)=(x+y)+z$.

O La unión de dos proposiciones por medio de la palabra «o» se denomina *disjunción* de las dos proposiciones. Por ejemplo:

Ésta es el aula cuatro o es una aula de Física,

es la *disjunción* de dos proposiciones. Una disjunción es una proposición molecular formada por el término de enlace «o». La proposición antes escrita puede parecer un poco rara. Probablemente esto es debido a que en el lenguaje corriente se incluye la palabra «o» inicial junto con la palabra «o» central. Por ejemplo, se podría leer la proposición molecular considerada en la forma:

O ésta es el aula cuatro o es una aula de Física.

En ambos casos, las dos proposiciones atómicas son las mismas; primero, la proposición «Ésta es el aula cuatro», y segundo «Ésta es una aula de Física». Es decir, no debe incurrirse en el error de incluir la «o» inicial como parte de la primera proposición. Se trata de una parte del término de enlace.

El símbolo que utilizaremos para la disjunción es: $\vee$.

En el ejemplo precedente, si **F** es la proposición «Ésta es el aula cuatro» y **R** es la proposición «Ésta es una aula de Física», entonces la disjunción queda completamente simbolizada por:

$$(\mathbf{F}) \vee (\mathbf{R}).$$

Leeremos esta proposición diciendo (**F**) *o* (**R**), y algunas veces también *o* (**F**) *o* (**R**). Recuérdese que el símbolo $\vee$ representa el término de enlace completo, tanto si en la lectura o escritura de la proposición se emplea sólo «o» o bien «o..., o...».

Ejercicio 5

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando el símbolo que corresponde a cada término de enlace. Indicar la proposición atómica sustituida por cada letra.

1. El área del triángulo *ABC* es igual al área del triángulo *DEF*, o el área del triángulo *ABC* es menor que el área del triángulo *DEF*.
2. Tomará parte en el salto de altura o correrá media milla.
3. O tomará parte en la representación o ayudará en el vestuario.
4. O el bote cruzó la barra o se lo tragaron las olas.
5. Hemos de llegar allí antes, u otro recibirá el empleo.
6. O la aguja está gastada o la grabación es mala.
7. O Juan será reelegido o destinado para un puesto nuevo.
8. Se puede dar el vector por medio de dos componentes, o estamos en tres dimensiones.

9. Peces con pulmones pueden tomar el oxígeno del aire o pueden tomar el oxígeno del agua.
10. O una anémona es un animal o es una planta.

B. Acabar de simbolizar las proposiciones siguientes sustituyendo el término de enlace por su signo correspondiente.

1. (**P**) o (**Q**)
2. O (**P**) o (**Q**)
3. O (**R**) o (**S**)
4. (**T**) o (**E**)
5. O (**P**) o (**N**)

C. Traducir al lenguaje corriente las proposiciones siguientes en otras de la misma forma:

1. (**P**) $\vee$ (**Q**)
2. (**R**) $\vee$ (**S**)
3. (**G**) $\vee$ (**H**)
4. (**R**) $\vee$ (**Q**)
5. (**A**) $\vee$ (**E**)

D. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes utilizando los símbolos & y $\vee$, pero conservando los símbolos matemáticos.

1. O $x=0$ o $x>0$.
2. $x\neq 0$ y $y\neq 0$.
3. O $x>1$ o $x+y=0$.
4. O $y=x$ o $y\neq x$.
5. $y+x>y+x+z$ o $z=0$.
6. $y+z=z+y$ y $0+x=x$.

E. Simbolizar las proposiciones matemáticas siguientes utilizando & y $\vee$, pero conservando los símbolos matemáticos y los paréntesis.

1. O ($x+y=0$ y $z>0$) o $z=0$.
2. $x=0$ y ($y+z>x$ o $z=0$).
3. O $x\neq 0$ o ($x=0$ y $y>0$).
4. O ($x=y$ y $z=w$) o ($x<y$ y $z=0$).

No. Cuando a una proposición se le añade el término de enlace «no», el resultado se denomina la *negación* de la proposición. Así, una negación es una proposición molecular que utiliza el término de enlace «no». El término de enlace «no» es análogo a los otros términos de enlace, puesto que forma proposiciones moleculares a partir de proposiciones atómicas. Pero es distinto de los otros términos de enlace pues se usa con una *sola* proposición. La palabra «no» en el lenguaje corriente se acostumbra a encontrar dentro de la proposición. Sin embargo, en Lógica, nos acostumbraremos a considerar el término de enlace separado de la proposición sobre la que actúa. Esto es necesario para poder representar la negación por un símbolo lógico.

Un ejemplo de negación es la proposición:

Las elecciones presidenciales no siempre terminan con armonía.

A pesar de que parece una proposición atómica por contener una sola proposición, no lo es. Es la negación de la proposición atómica:

Las elecciones presidenciales sismpre terminan con armonía.

En Lógica la adición del término de enlace «no» a una proposición atómica da lugar a una proposición molecular. Como en el lenguaje corriente se acostumbra a hacer la negación colocando la palabra «no» *dentro* de la proposición atómica, es fácil cometer el error de olvidar la colocación de «no» delante de la letra mayúscula elegida para simbolizar la proposición atómica. La forma correcta de simbolizar la proposición, «Las elecciones presidenciales no siempre terminan con armonía» sería la siguiente:

Sea

P = «Las elecciones presidenciales siempre terminan en armonía»

entonces la proposición se indica como sigue:

No (**P**).

Para simbolizar completamente la proposición, emplearemos un símbolo para la negación:

$$\neg.$$

La proposición del ejemplo anterior, totalmente simbolizada, será:

$$\neg(\mathbf{P}).$$

A veces es más fácil traducir estas proposiciones al castellano empezando con la frase «No ocurre que», por lo que se puede considerar el símbolo $\neg$ como equivalente a «no ocurre que». Por ejemplo, para traducir al castellano la proposición $\neg(\mathbf{P})$ sobre elecciones presidenciales, se puede decir: «No siempre ocurre que las elecciones presidenciales terminen con armonía».

Los términos de enlace se pueden utilizar con una o más proposiciones moleculares, de la misma manera que con las atómicas. Por ejemplo, en la forma «*Si* ( ) *entonces* ( )», se pueden llenar los espacios vacíos con proposiciones atómicas o con proposiciones moleculares. Las negaciones se combinan frecuentemente con otras proposiciones para formar una proposición molecular más larga. Por ejemplo,

Si un número es mayor que 0, entonces no es un número negativo

es una proposición molecular de la forma «si..., entonces...» en la que el término de enlace une una proposición atómica y una negación. La forma, «O ( ) o ( )» puede incluir negaciones como en la siguiente disjunción:

O el juego no ha empezado o el público no es numeroso.

Aquí se tiene una disjunción de dos proposiciones moleculares, ambas negaciones. Se simboliza esta proposición de la misma manera que se simbolizan otras proposiciones moleculares. En primer lugar, su forma lógica se puede presentar con mayor claridad poniendo paréntesis en la proposición escrita:

(O el juego no ha empezado) o (el público no es numeroso).

Elegida una letra mayúscula para cada proposición atómica se expresa su negación poniendo el símbolo $\neg$ delante de la letra. Después, se enlazan las dos proposiciones moleculares por el término de enlace dominante, que en este caso es el término de enlace «o». La proposición completamente simbolizada se presenta en la forma

$$(\neg S) \vee (\neg C).$$

Ejercicio 6

A. Simbolizar completamente las proposiciones siguientes, utilizando los símbolos correspondientes a cada término de enlace. Indicar las proposiciones atómicas sustituidas por cada letra mayúscula.

1. En el hemisferio Sur, Julio no es un mes de verano.
2. Los tubos de neón no son incandescentes.
3. No ocurre que a todos los ingresos les correspondan impuestos proporcionales.

4. Marte no está tan cercano al Sol como la Tierra.
5. Texas no es el mayor estado en los Estados Unidos.
6. No ocurre que todos los líquidos hiervan a la misma temperatura.
7. John Quincy Adams no fue el segundo Presidente de los Estados Unidos.
8. No todos los gérmenes son bacterias.
9. No ocurre que la ortiga de mar sea una planta.
10. Luisa no es una persona alta.

B. Simbolizar las proposiciones siguientes utilizando el símbolo correspondiente para cada término de enlace.

1. No ocurre que (**R**)
2. No (**Q**)
3. No (**H**)
4. No ocurre que (**T**)
5. No (**J**)

C. En las proposiciones siguientes se utiliza más de un término de enlace. Simbolizar completamente las proposiciones sustituyendo los términos de enlace por los símbolos correspondientes.

1. (**P**) y no (**Q**)
2. No (**R**) y no (**M**)
3. (**S**) o no (**B**)
4. O no (**P**) o no (**Q**)
5. (**T**) y no (**R**)

D. Primero señalar cada término de enlace en las proposiciones que siguen. Después, simbolizar la proposición entera sustituyendo **P** = «Jaime es puntual» y **Q** = «Tom llega tarde» en las cinco proposiciones.

1. O Jaime es puntual o Tom llega tarde.
2. O Jaime no es puntual o Tom llega tarde.
3. Tom llega tarde y Jaime no es puntual.
4. Tom no llega tarde y Jaime no es puntual.
5. Jaime no es puntual y Tom llega tarde.

E. Identificar cada una de las proposiciones moleculares siguientes escribiendo la palabra que denota su forma (por ejemplo, «negación», «conjunción», «disyunción»).

1. $\neg(\mathbf{Q})$
2. $(\mathbf{P})\ \&\ (\mathbf{Q})$
3. $\neg(\mathbf{R})$
4. $(\mathbf{R}) \vee (\mathbf{S})$
5. $(\mathbf{R})\ \&\ (\mathbf{S})$
6. $\neg(\mathbf{T})$
7. $(\mathbf{P}) \vee (\mathbf{Q})$
8. $(\mathbf{R})\ \&\ (\mathbf{T})$
9. $\neg(\mathbf{S})$
10. $(\mathbf{T}) \vee (\mathbf{Q})$

F. Examinar las proposiciones siguientes y señalar cada término de enlace que se encuentre en ellas.

1. No es mediodía y el almuerzo no está listo.
2. Si no estamos allí, entonces perderemos nuestro voto.
3. Si dos números no son iguales, entonces uno es mayor que el otro.
4. María se ha ido o no está en su sitio.
5. Si es negro, entonces no reflejará la luz.
6. $x>0$ o $x=0$.
7. Si $x+y=z$, entonces $y+x=z$.
8. Si $x+y=0$ y $x>0$, entonces $y<0$.
9. Si $x+y=0$ y $x=0$, entonces $y=0$.
10. O $x=0$ o $x\neq 0$.

Si..., entonces.... Cuando se unen dos proposiciones mediante las palabras «si..., entonces...», la proposición molecular resultante se denomina una *proposición condicional.* Ya se dijo que la manera de escribir el término de enlace «si..., entonces...» da idea de la forma de la proposición condicional. En vez de los puntos se puede poner cualquier proposición. La palabra «si» precede a la primera proposición y la palabra «entonces» precede a la segunda proposición.

Un ejemplo de una proposición condicional es:

Si llueve hoy, entonces se suspende el picnic.

La primera proposición atómica es «Llueve hoy» y la segunda proposición atómica es «Se suspende el picnic». Para poder simbolizar completamente esta proposición condicional emplearemos el símbolo siguiente para el término de enlace:

$$\rightarrow.$$

Ahora ya podemos simbolizar la proposición considerada de la manera siguiente. Primero se escogen letras mayúsculas para las proposiciones atómicas: Sea

P = «Hoy llueve»
Q = «Se suspende el picnic»,

y entonces se sustituye el término de enlace por el símbolo:

$$(\mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{Q}).$$