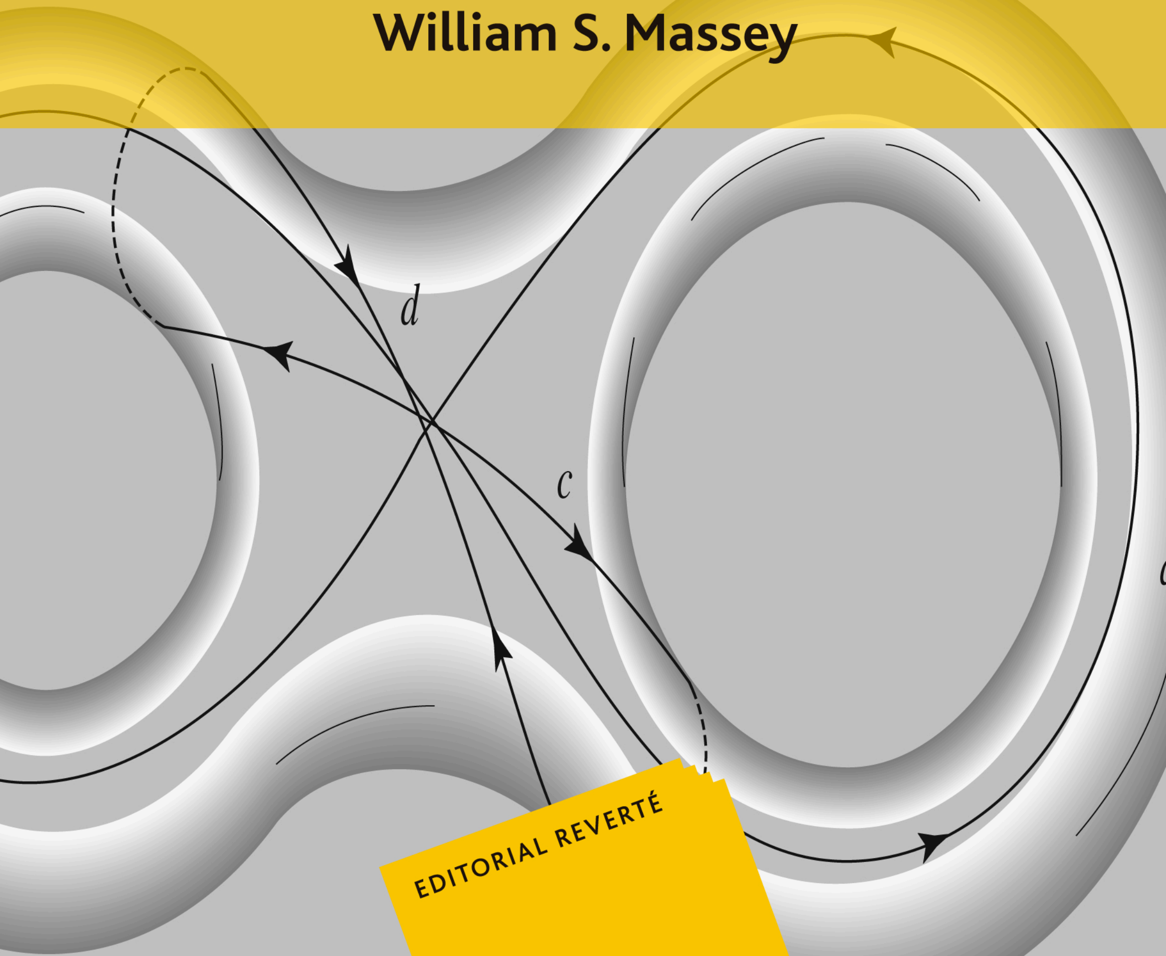
Introducción a la
topología algebraica

William S. Massey



EDITORIAL REVERTÉ

Introducción a la topología algebraica

William S. Massey

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Algebraic Topology: An Introduction

Edición original en lengua inglesa publicada por
Harcourt, Brace & World, Inc., New York (NY). USA

Edición en español:

Edición en papel
ISBN: 978-84-291-5091-9

Edición en e-book
ISBN: 978-84-291-9120-2

Versión española por
Dr. Manuel Castellet Solanas
Profesor Adjunto de Topología
en la Facultad de Ciencias de Barcelona

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Prefacio

Hemos emprendido la edición de Harbrace College Mathematics Series como respuesta a la creciente demanda de flexibilidad de los planes de estudio de los colegios universitarios. Esta serie de libros de texto de temas concretos y concisos está destinada a cumplir dos propósitos: Primero, suministrar material para programas básicos en unidades coordinadas y compactas. Segundo, proporcionar diferentes libros de texto suplementarios que abarquen temas concretos.

Para llevar a cabo estos objetivos, los redactores y editores han seleccionado, para iniciar la colección, una serie de seis textos sobre Funciones, Cálculo, Algebra lineal, Cálculo de varias variables, Teoría de funciones y Funciones de varias variables. Esta serie está completada por un cierto número de volúmenes sobre temas tales como Probabilidades, Estadística, Ecuaciones diferenciales, Topología, Geometría diferencial y Funciones de variable compleja.

Al permitir una mayor flexibilidad en la estructuración de cursos o series de cursos, esta colección promoverá mayor variedad e individualidad en los distintos planes de estudio. Además, si un profesor desea programar su propia serie de materias para un curso, Harbrace College Mathematics Series le proporciona un conjunto de libros construidos sobre un patrón flexible, a partir del cual podrá elegir los elementos de su nueva estructuración. O bien, si un profesor desea complementar un texto ordinario, esta colección le proporciona un conjunto de tratados compactos de materias concretas.

Una característica nueva y adicional de Harbrace Mathematics Series es su continua adaptabilidad. Tan pronto como nuevos temas ganen en interés en los planes de estudio, o tan pronto como aparezcan nuevos tratamientos prometedores, serán añadidos libros a la colección, o serán revisados los volúmenes ya existentes. De esta forma saldremos al encuentro de la demanda en la enseñanza de las Matemáticas con rapidez y flexibilidad.

SALOMON BOCHNER

W. G. LISTER

Prólogo

Este libro está destinado a iniciar a los estudiantes de primer ciclo en el estudio de la Topología algebraica con el menor esfuerzo posible. Los principales temas que se tratan son: variedades de dimensión dos, el grupo fundamental y espacios recubridores, más la teoría de grupos que se necesita en ellos. Los únicos conocimientos previos necesarios son, rudimentos de teoría de grupos, lo que normalmente se da en los primeros cursos del primer ciclo, y un primer semestre de topología general.

Las materias tratadas en este libro son "standard" en el sentido de que varios textos y tratados muy conocidos, les dedican un capítulo o unas cuantas secciones. Creo que éste es el primer texto que contiene un estudio directo de estas materias, desligado de toda definición, terminología, etc., innecesarias, y con numerosos ejemplos y ejercicios, haciéndolas así inteligibles a los estudiantes que por primera vez abordan estas materias en una licenciatura.

Los temas tratados se utilizan en varias ramas de la Matemática distintas de la Topología algebraica, tales como Geometría diferencial, Teoría de grupos de Lie, Teoría de superficies de Riemann, o Teoría de nudos. En el desarrollo de la teoría existe una bonita interdependencia entre Álgebra y Topología, lo que hace que cada una refuerce interpretaciones de la otra. Una tal interdependencia entre diferentes materias de la Matemática rompe la a menudo artificial subdivisión de la Matemática en diferentes "ramas" y acentúa la unidad esencial de toda esta ciencia.

Sin duda, algunos expertos se extrañarán de que un libro que se propone ser una introducción a la Topología algebraica ni siquiera mencione la teoría de la homología. Ciertamente es verdad que la teoría de la homología y cohomología constituye el núcleo de la Topología algebraica. Sin embargo, es difícil de motivar para el estudiante que por primera vez estudia estas materias, y su tratamiento sistemático requiere el desarrollo paciente de gran acopio de instrumentos. Por esta razón creo que es más fácil para el estudiante entender y apreciar la teoría de la homología después del estudio del grupo fundamental y materias relacionadas, presentado en este libro.

Para aquellos que posean un criterio estrictamente lógico, el Capítulo I, que estudia las variedades bidimensionales, les podrá parecer, quizás, la parte menos rigurosa de este libro. Ciertamente, no existiría problema alguno en dar *una exposición estrictamente rigurosa de este tema. Sin embargo, una exposición de este tipo sería bastante aburrida y pesada, con interminables demostraciones de hechos que se visualizan obviamente. Más aún, los resultados del Capítulo I no son básicos para los principales teoremas del resto del libro; más bien nos proporcionan ejemplos, ilustraciones y aplicaciones de los resultados de los capítulos posteriores.*

En el Capítulo II se da la definición y propiedades básicas del grupo fundamental y del homomorfismo inducido por una aplicación continua. Los métodos generales para determinar la estructura del grupo fundamental de un espacio se desarrollan más adelante, en el Capítulo IV, después de haber introducido, en el Capítulo III, algunas nociones esenciales de teoría de grupos.

En los Capítulos III y IV se destaca la caracterización de ciertas estructuras matemáticas como soluciones de "problemas de aplicaciones universales", por dos diferentes razones. En primer lugar, parece que el método más eficaz para determinar la estructura del grupo fundamental de una amplia gama de espacios es el teorema de Seifert-Van Kampen (Capítulo IV); la adecuada formulación de este teorema esencial lleva consigo el concepto de problema de aplicaciones universales. En segundo lugar, este método de caracterizar estructuras matemáticas como soluciones de problemas de aplicaciones universales parece ser uno de los principios matemáticos realmente unificadores que han surgido desde 1945, y debe introducirse en los estudios de matemáticas tan pronto como sea posible.

El Capítulo V contiene un estudio bastante completo de los espacios recubridores. A lo largo del mismo hemos destacado la relación entre los espacios recubridores y el grupo fundamental.

En los Capítulos VI y VII se dan demostraciones topológicas de varios conocidos teoremas de teoría de grupos, en particular el teorema de Nielsen-Schreier sobre subgrupos de un grupo libre, el teorema de Kurosh sobre subgrupos de un producto libre, y el teorema de Grushko sobre la descomposición de un grupo finitamente generado en producto libre. Estos teoremas pertenecen a una parte de la teoría de grupos cuyo desarrollo original fue principalmente motivado por la Topología combinatoria. Creo que las demostraciones de estos teoremas utilizando el grupo fundamental y espacios recubridores de ciertos complejos de baja dimensión se comprenden más fácilmente que las demostraciones puramente algebraicas. Espero que el tratamiento conjunto de estos teoremas por métodos esencialmente geométricos hará esta parte de la teoría de grupos menos imponente y más fácilmente accesible.

El Capítulo VIII es bastante corto y de naturaleza puramente descriptiva; no se demuestra ningún teorema. Su propósito es ayudar al estudiante en la transición al estudio de temas más avanzados de Topología algebraica.

Aunque en el Capítulo I utilizamos triangulaciones de 2-variedades, y en el último capítulo introducimos los CW-complejos de J. H. C. Whitehead, no damos ningún tratamiento sistemático de los complejos simpliciales en este libro. Esto puede sorprender a algunos lectores, ya que muchos tratados de Topología algebraica empiezan precisamente con el estudio de los complejos simpliciales. Sin embargo, no se ve la manera de simplificar su exposición. Más aún, personalmente, opino que un estudio de este tema tiene que ser necesariamente bas-

tante pesado. Una de las tendencias de la Topología algebraica en los últimos quince años ha sido la sustitución de los complejos simpliciales, como principal objeto de estudio, por los CW-complejos.

Las secciones que señalamos a continuación no son estrictamente necesarias para el desarrollo de la teoría, y pueden omitirse por completo o darles menos importancia en un curso breve o en una primera lectura del libro:

Capítulo I, Secciones 9-13
Capítulo II, Secciones 7 y 8
Capítulo III, Sección 7
Capítulo IV, Sección 6
Capítulo V, Secciones 10-12
Capítulo VI, Sección 8
Capítulo VII, Secciones 5 y 6

Puede programarse también un curso breve con el material de los cinco primeros capítulos, omitiendo las mismas secciones.

Este libro ha sido desarrollado a partir de las lecciones dadas en la Universidad de Yale a estudiantes de primer ciclo y licenciatura ("undergraduate" y "graduate") durante un período de varios años. Me complace reconocer mi deuda para con estos estudiantes. Sus preguntas, críticas y sugerencias han sido para mí de gran importancia. Estoy también profundamente reconocido a todos mis colegas por sus discusiones sobre las ideas presentadas en este libro. La mayoría de teoremas y definiciones de este libro pueden encontrarse en conocidos textos o en artículos de revistas matemáticas. A este respecto, hay que hacer especial mención de los siguientes libros alemanes: B. Kerekjarto, "Topologie" (Springer, 1923); K. Reidemeister, "Einführung in die Kombinatorische Topologie" (Teubner, 1932); H. Seifert y W. Threlfall, "Lehrbuch der Topologie" (Vieweg, 1934). En muchos casos he intentado indicar la persona o personas a las cuales, en mi opinión, se les debe reconocer una idea o teorema. Sin embargo, en una materia como ésta, cuyo desarrollo se extiende en gran parte a lo largo del siglo pasado, y que ha sido labor conjunta de matemáticos de muchos países, es inevitable que haya cometido algún error en tales atribuciones. A todos aquellos cuyos nombres han sido involuntariamente omitidos, pido disculpas; espero contar con su comprensión.

W. S. MASSEY

New Haven, Connecticut

Notas para el estudiante

Prerrequisitos *En este libro se supone que el estudiante posee suficientes conocimientos de teoría de grupos como para comprender términos corrientes como grupo, subgrupo, subgrupo normal, homomorfismo, grupo cociente, clase lateral, grupo abeliano y grupo cíclico. Más aún, es de esperar que haya visto suficientes ejemplos y trabajado en bastantes ejercicios para haber asimilado el verdadero significado de estos conceptos. Para aquellos que no estén familiarizados con grupos de transformaciones y permutaciones, se ha incluido un apéndice sobre dichos temas. La mayor parte de las restantes cuestiones de teoría de grupos que se necesitan, están desarrolladas en el texto, especialmente en el Capítulo III.*

El material necesario de Topología conjuntista puede obtenerse en un semestre de un curso de primer ciclo. En un apéndice, haremos un pequeño estudio sobre espacios cocientes, ya que la mayoría de textos de este nivel tratan muy brevemente u omiten por completo este tema. No se precisa conocimiento alguno de ninguna otra rama de Álgebra; en particular, no se utiliza nada de teoría de anillos, cuerpos, módulos o espacios vectoriales.

Terminología y notación *Puesto que la mayor parte de la notación y terminología es la corriente en los libros de matemáticas de este nivel, bastarán muy pocas explicaciones. En teoría de grupos, todos los grupos (con muy pocas excepciones, tales como el grupo aditivo de los enteros) están escritos multiplicativamente, no aditivamente. Un homomorfismo de un grupo en otro se llama un* epimorfismo *si es exhaustivo, un* monomorfismo *si es inyectivo (es decir, si su núcleo contiene sólo el elemento neutro), y un* isomorfismo *si es biyectivo. Un diagrama de grupos y homomorfismos*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

se dice conmutativo, *si son iguales todos los posibles homomorfismos de un grupo en otro del diagrama. En el diagrama anterior hay dos homomorfismos del grupo A en el D, a saber, gf (es decir, f seguido de g) y f'g'. Así, la condición de que el diagrama sea conmutativo equivale a* $gf = f'g'$. *Obsérvese que el hecho de imponer a un diagrama que sea conmutativo no tiene nada que ver con que los grupos que aparecen en el diagrama sean conmutativos o no. Por ejemplo, el diagrama anterior podría ser conmutativo incluso si A, B, C y D no son grupos abelianos.*
En teoría de conjuntos, la notación

$$\prod_{i \in I} S_i$$

indica el producto (o producto cartesiano) de la familia de conjuntos S_i, $i \in I$. *Un elemento* x *del producto cartesiano es una función que asigna a cada índice* $i \in I$ *un elemento* $x_i \in S_i$. *El elemento* $x_i \in S_i$ *se llama* coordenada del elemento x *correspondiente al índice* $i \in I$.

Si A es un subconjunto de B, existe una única aplicación inclusión *de A en B: asigna a cada elemento* $x \in A$ *el mismo elemento* x. *En símbolos, si* $i : A \to B$ *denota la inclusión, entonces* $i(x) = x$ *para todo* $x \in A$. *Si C es otro conjunto y* $f : B \to C$ *es una función cualquiera de B en C, entonces* $f \mid A$ *denota la* restricción *de f al subconjunto A; esto es, para todo* $a \in A$, $(f \mid A)(a) = f(a) \in C$.

A lo largo del libro usaremos la siguiente notación:

$\mathbf{Z}$ = *conjunto de todos los enteros, positivos y negativos.*
$\mathbf{Q}$ = *conjunto de todos los números racionales.*
$\mathbf{R}$ = *conjunto de todos los números reales.*
$\mathbf{C}$ = *conjunto de todos los números complejos.*

$\mathbf{R}^n$ *(respectivamente* $\mathbf{C}^n$*), indica, para cada* $n > 0$, *el conjunto de todas las n-plas* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de números reales (respectivamente complejos);* $\mathbf{R}^n$ *es el* n-espacio euclídeo *con su topología usual. Si* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *es un punto de* $\mathbf{R}^n$, *la* norma o valor absoluto *de* x, *que designaremos por* $|x|$, *se define por*

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Con esta notación definimos los siguientes subconjuntos "standard" del n-espacio euclídeo, para todo $n > 0$:

$$E^n = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leqq 1\},$$

$$U^n = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\},$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}.$$

Estos espacios se denominan, bola o disco cerrado n-dimensional, bola o disco abierto n-dimensional, y esfera $(n-1)$-dimensional, respectivamente. *Cada uno de ellos está dotado de la topología inducida como subconjunto de* $\mathbf{R}^n$. *A veces se utilizan los mismos nombres para espacios topológicos homeomorfos a uno de los subconjuntos anteriores.*

Si a y b son números reales tales que $a < b$, *para los intervalos cerrado y abierto de extremos a y b, se usa la siguiente notación:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leqq x \leqq b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leqq b\}.$$

Diremos que dos espacios son topológicamente equivalentes *o del mismo* tipo de topología, *si son homeomorfos.*

Referencias

Una referencia al teorema o lema III. 8.4 indica el teorema o lema 4 de la sección 8 del Capítulo III; si la referencia es simplemente: teorema 8.4, entonces el teorema está en la sección 8 del mismo capítulo en el que figura la referencia.

Al final de cada capítulo hay una breve bibliografía. Los números entre corchetes en el texto se refieren a los correspondientes de la bibliografía.

Al estudiar este libro

Los ejercicios y ejemplos son una parte esencial del texto; sin ellos sería mucho más difícil alcanzar una buena comprensión de la materia expuesta. Aparecen muchas afirmaciones sin demostración y se omiten los detalles de algunas demostraciones. Se pueden considerar como ejercicios para comprobar si efectivamente se han asimilado los conceptos utilizados.

Recuérdese que, en cualquier materia, el camino desde la ignorancia al conocimiento, no es uniforme y recto, sino casi siempre bastante zigzagueante. Parece que aprender las cosas es llegar a la verdad por aproximaciones sucesivas. Así, la primera tentativa de dominar algunos de los más difíciles teoremas de este libro, es posible que no se realice con pleno éxito. Sin embargo, no desalentarse. Antes al contrario, con el estudio de los ejercicios y ejemplos y algo de la materia posterior, estamos seguros que la perseverancia se verá recompensada con una más profunda comprensión de las ideas expuestas.

Índice analítico

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

APÉNDICE A

APÉNDICE B

Introducción a la
topología algebraica

CAPÍTULO 1

Variedades bi-dimensionales

1 Introducción

El concepto topológico de superficie o variedad de dimensión 2 es una abstracción matemática del concepto familiar de superficie hecha de papel, lámina metálica, plástico u otro material delgado cualquiera. Una variedad de dimensión 2 es un espacio topológico con las mismas propiedades que el plano familiar de la Geometría euclídea. Un microbio inteligente, con un alcance visual limitado, que se arrastrase sobre una superficie, no la distinguiría de un plano.

Para dimensiones superiores, el equivalente natural de una superficie es una variedad n-dimensional, que es un espacio topológico con las mismas propiedades locales que un espacio euclídeo n-dimensional. Puesto que aparecen frecuentemente y tienen aplicaciones en muchas otras ramas de la Matemática, las variedades son, sin lugar a dudas, una de las clases más importantes de espacios topológicos. Aunque definiremos y daremos algunos ejemplos de variedades n-dimensionales, para cualquier entero positivo n, dedicaremos la mayor parte de este capítulo al caso $n = 2$. La existencia de un teorema de clasificación de variedades compactas de dimensión 2, hace que nuestros conocimientos sobre variedades 2-dimensionales sean incomparablemente más completos que nuestros conocimientos sobre los casos de dimensión superior. Este teorema de clasificación da un procedimiento simple para obtener todas las variedades compactas de dimensión 2. Más aún, existen invariantes simples calculables que nos permiten determinar si dos variedades compactas de dimensión dos son homeomorfas o no. Puede considerarse éste como un teorema ideal. Gran parte de las investigaciones en Topología han estado dirigidas hacia el desarrollo de teoremas de clasificación análogos para otras situaciones. Por desgracia no se conoce ningún teorema de este tipo para variedades compactas de dimensión 3, y los especialistas en lógica han probado que no podemos ni esperar un resultado completo de variedades n-dimensionales, $n \geqq 4$. Sin embargo, la teoría de variedades de dimensión superior es actualmente un campo de investigación matemática muy activo y lo seguirá siendo probablemente durante mucho tiempo.

La materia expuesta en este capítulo, especialmente en las secciones 1-8, se usará en el resto del libro.

2 Definición y ejemplos de n-variedades

Sea n un entero positivo. Una *variedad n-dimensional* es un espacio de Hausdorff (es decir, un espacio que satisface el axioma T_2 de separación), tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n-dimensional U^n $(= \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\})$. Por brevedad, la llamaremos usualmente «n-variedad».

Ejemplos

2.1 El espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ es obviamente una variedad n-dimensional. Podemos demostrar fácilmente que la esfera unidad de dimensión n

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

es una n-variedad. En efecto, para el punto $x = (1, 0, \ldots, 0)$, el conjunto $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0$ es un entorno con las propiedades exigidas, como puede verse por proyección ortogonal sobre el hiperplano de $\mathbf{R}^{n+1}$ definido por $x_1 = 0$. Para cualquier otro punto $x \in S^n$, existe una rotación que transforma x en el punto $(1, 0, \ldots, 0)$. Dicha rotación es un homeomorfismo de S^n sobre sí mismo; por tanto x tiene también un entorno del tipo deseado.

2.2 Si M^n es una variedad n-dimensional, cualquier abierto de M^n es también una variedad n-dimensional. La demostración es inmediata.

2.3 Si M es una variedad m-dimensional y N una variedad n-dimensional, el espacio producto $M \times N$ es una variedad $(m + n)$-dimensional. Esto se sigue del hecho de que $U^m \times U^n$ es homeomorfo a U^{m+n}. Para demostrarlo observemos que, si k es un entero positivo cualquiera, U^k es homeomorfo a $\mathbf{R}^k$, y $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbf{R}^{m+n}$.

Además de la esfera de dimensión $2, S^2$, el lector puede encontrar fácilmente ejemplos de muchos otros subconjuntos del espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, que son 2-variedades; por ejemplo, superficies de revolución, etc.

Como se desprende de todos estos ejemplos, una n-variedad puede ser conexa o no conexa, compacta o no compacta. En cualquier caso una n-variedad es siempre localmente compacta.

Lo que no es tan obvio es que una variedad conexa no tenga necesariamente que satisfacer el segundo axioma de numerabilidad (esto es, no tenga necesariamente una base numerable). El ejemplo más simple es la «línea transfinita».[1] Estas variedades se consideran patológicas y limitaremos nuestra atención a variedades con base numerable.

Observemos que, en nuestra definición, exigimos que una variedad satisfaga el axioma de separación de Hausdorff. Debemos exigirlo explícitamente en la definición, ya que *no* es consecuencia de las demás condiciones impuestas a una variedad. Dejamos al lector la construcción de ejemplos de espacios que no

[1] Véase *General Topology* de J. L. Kelley. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1955. Ejercicio L, p. 164.

son de Hausdorff y en los que cada punto tiene un entorno homeomorfo a U^n, para $n = 1$ ó 2.

3 Variedades orientables y no orientables

Las variedades conexas de dimensión n, $n > 1$, están divididas en dos clases: orientables y no orientables. Trataremos de aclarar bien la diferencia sin esforzarnos en una precisión matemática.

Consideremos, primero, el caso $n = 2$. Podemos dotar de una orientación al plano euclídeo $\mathbf{R}^2$ y, en general, a una pequeña región del plano, de varias maneras. Por ejemplo, podemos fijar cuál de las dos clases de sistemas de coordenadas del plano será considerada como positiva y cuál como negativa. Otra manera sería fijar el sentido de rotación en el plano, alrededor de un punto, que se considera como positivo y el que se considera como negativo. Imaginemos un microbio o algún ser de dimensión 2, inteligente, sujeto a moverse en un plano; una vez que él ha decidido la elección de una orientación en cualquier punto del plano, puede llevar esta elección consigo al desplazarse. Si dos de estos seres coinciden en orientación en un punto dado del plano, y uno de ellos hace un largo viaje a otro punto distante del plano y eventualmente vuelve al punto de partida, ambos seres coincidirán aún en la elección de orientación.

Consideraciones análogas se aplican a cualquier variedad conexa de dimensión 2, ya que cualquier punto tiene un entorno homeomorfo a un entorno de un punto del plano. Aquí, nuestros dos seres hipotéticos coinciden en la elección de orientación en un punto. Sin embargo, es posible que, tras el regreso de uno de ellos de un largo viaje a algún punto distante de la variedad, se encuentren con que sus orientaciones ya no coinciden. Este fenómeno puede suceder incluso suponiendo que ambos han tenido un cuidado extremo en ir manteniendo una comprobación precisa de la orientación positiva.

El ejemplo más simple de una variedad 2-dimensional que presenta este fenómeno, es la famosa banda de Möbius. Como el lector seguramente ya sabe, puede construirse un modelo de banda de Möbius tomando una tira rectangular de papel, larga y estrecha, y pegando los extremos en sentidos opuestos (véase figura 1.1). Matemáticamente, una banda de Möbius es un espacio topológico que se define como sigue. Designemos por X el siguiente rectángulo del plano:

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -10 \leqq x \leqq +10,\ -1 < y < +1\}.$$

Formemos entonces el espacio cociente de X obtenido al identificar los puntos $(10, y)$ y $(-10, -y)$ para $-1 < y < +1$ (para una información sobre espacios cocientes, véase el Apéndice A). Obsérvese que los dos bordes del rectángulo correspondientes a $y = +1$ e $y = -1$ se omiten. Esta omisión es esencial; en caso contrario el resultado no sería una variedad (sería una variedad con borde, concepto que estudiaremos más tarde, en este mismo capítulo). Podríamos también definirla mediante un subconjunto de $\mathbf{R}^3$ que fuera homeomorfo al espacio cociente que acabamos de describir.

Como quiera que definamos la banda de Möbius, la línea central de la tira rectangular pasa a ser un círculo tras la unión o identificación de los dos extre-

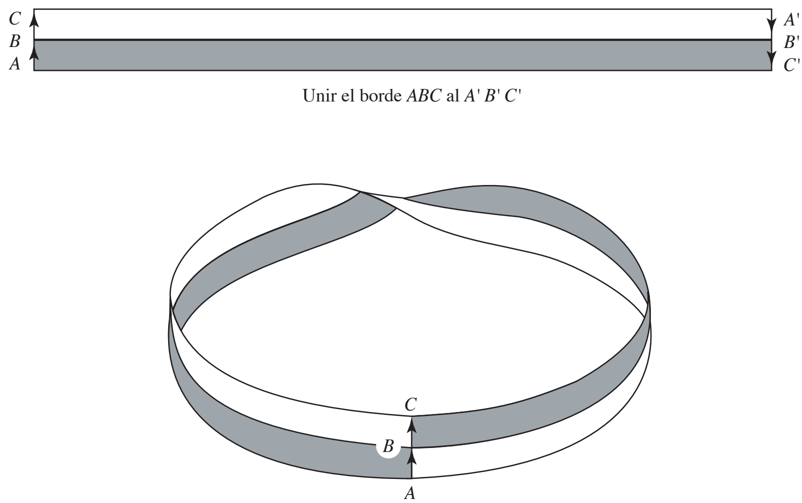


FIGURA 1.1
Construcción de una banda de Möbius.

mos. Dejamos al lector la comprobación de que si nuestro ser imaginario partiera de cualquier punto de esta circunferencia con una determinada orientación y diera una vuelta a la circunferencia llevando consigo esta orientación, cuando volviera al punto inicial su orientación original estaría invertida. De un tal camino en una variedad diremos que *invierte la orientación*. De un camino que no tenga esta propiedad diremos que *conserva la orientación*. Por ejemplo, cualquier camino cerrado del plano conserva la orientación.

Por definición, una variedad 2-dimensional conexa es *orientable* si todo camino cerrado conserva la orientación; una variedad 2-dimensional conexa es *no orientable* si existe al menos un camino que invierte la orientación.

Consideremos ahora la orientabilidad en variedades de dimensión 3. Podemos dotar de una orientación al 3-espacio euclídeo, o a una pequeña región del mismo, fijando la clase de sistemas de coordenadas considerada como positiva y la clase considerada como negativa. Otra manera sería fijar el tipo de hélice, o rosca de tornillo, que se considera que avanza en sentido directo, y el que lo hace en sentido inverso. Podemos ahora decir que un camino cerrado de una 3-variedad *invierte* o *conserva la orientación* según que un viajero que recorra el camino vuelva o no al punto inicial con los sentidos directo e inverso, que se han elegido inicialmente, cambiados. Si nuestro universo no fuera orientable, un astronauta que hiciera un viaje a lo largo de un camino que invirtiera la orientación, volvería a la tierra con los lados derecho e izquierdo de su cuerpo cambiados: Su corazón no estaría ya en el costado izquierdo, etc.

Existe una generalización de la banda de Möbius para dimensión 3, que nos proporciona un ejemplo sencillo de 3-variedad no orientable. Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -10 \leqq x \leqq +10, -1 < y < +1, -1 < z < +1\}.$$

Formemos un espacio cociente de X por identificación de los puntos $(10, y, z)$ y $(-10, -y, z)$ para $-1 < y < +1$ y $-1 < z < +1$. Este espacio puede ser considerado también como producto de la banda de Möbius ordinaria por el intervalo $\{z \in \mathbf{R} : -1 < z < +1\}$. En todo caso, el segmento $-10 \leqq x \leqq +10$ del eje x, pasa a ser un círculo después de la identificación; dejamos al lector la tarea de convencerse de que este círculo es un camino que invierte la orientación de la 3-variedad resultante.

Para poder dar definiciones análogas en el caso de n-variedades, tenemos primero que distinguir entre dos clases de sistemas de coordenadas en un n-espacio euclídeo. Esta distinción puede hacerse como sigue. Si tenemos dos sistemas de coordenadas, cualquier punto x tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x_1', \ldots, x_n')$ en los dos sistemas, y estas coordenadas están relacionadas por ecuaciones del siguiente tipo:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3-1}$$

Las a_{ij} y b_i que aparecen, son números reales que no dependen del punto x escogido. Además es un hecho conocido que el determinante de las a_{ij},

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

es distinto de cero. Decimos que estos dos sistemas de coordenadas son *de la misma clase* si este determinante es > 0. De las propiedades clásicas del determinante de un sistema de ecuaciones lineales tal como (1.3-1), se sigue que la relación «ser de la misma clase» es una relación de equivalencia entre sistemas de coordenadas de $\mathbf{R}^n$, y que hay exactamente dos clases de equivalencia. Elegir una orientación de $\mathbf{R}^n$ es elegir una de estas dos clases de equivalencia de sistemas de coordenadas como clase distinguida. Podemos designar a un tal sistema de coordenadas distinguido con algún adjetivo como «positivo» o «directo».

Una vez se ha escogido la clase de sistemas de coordenadas distinguida, un camino que invierta o conserve la orientación en una n-variedad conexa se define, esencialmente, del mismo modo que para variedades de dimensión 2 y 3. La única diferencia es que tenemos escasa intuición geométrica para guiarnos en los casos de dimensión superior. En el desarrollo completo de este tema es necesario entrar en muchos más detalles para conseguir un rigor matemático.

En cualquier caso, es posible definir los conceptos de orientabilidad y no orientabilidad para las n-variedades conexas. El espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ y la esfera S^n son ejemplos de n-variedades orientables. Podemos definir sin dificultad una generalización para dimensión n, de la banda de Möbius, que es una n-variedad no orientable. Consiste en el producto de una banda de Möbius ordinaria y una bola abierta de dimensión $n-2$, U^{n-2}.

En el resto del capítulo nos referiremos principalmente a variedades 2-dimensionales; por tanto, no insistiremos más en estas cuestiones.

4 Ejemplos de 2-variedades conexas compactas

Para ahorrar palabras, de ahora en adelante, nos referiremos a una 2-variedad conexa como una *superficie*. El ejemplo más sencillo de superficie compacta es la esfera S^2; otro ejemplo importante es el *toro*. De una manera imprecisa, un toro puede describirse como cualquier superficie homeomorfa a la superficie de una rosquilla o de un anillo sólido. Con más precisión puede definirse así:

(a) Cualquier espacio topológico homeomorfo al producto de dos circunferencias, $S^1 \times S^1$.

(b) Cualquier espacio topológico homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}.$$

[Este conjunto se obtiene por rotación del círculo $(x-2)^2 + z^2 = 1$ del plano xz, alrededor del eje z].

(c) Sea X el cuadrado unidad en el plano $\mathbf{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}.$$

Entonces, un toro es cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de X obtenido por identificación de los lados opuestos del cuadrado X según las siguientes reglas: Se identifican los puntos $(0, y)$ y $(1, y)$ para $0 \leqq y \leqq 1$, y los puntos $(x, 0)$ y $(x, 1)$ para $0 \leqq x \leqq 1$.

Consideramos conveniente indicar simbólicamente cómo se lleva a cabo la identificación, mediante un diagrama como el de la figura 1.2. Los lados que se identifican están indicados con la misma letra del alfabeto, y las identificaciones deben hacerse de forma que las direcciones indicadas por las flechas coincidan.

Dejamos al lector la tarea de demostrar que los espacios topológicos descritos en (a), (b) y (c) son, en efecto, homeomorfos. El lector deberá también comprobar que el toro es orientable.

Otro ejemplo de superficie compacta es el *plano proyectivo real* (al que, por brevedad, designaremos como *plano proyectivo*). Debido a que no es homeomorfo a ningún subconjunto del espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, el plano proyectivo es mucho más difícil de visualizar que la esfera S^2 o el toro.

Definición Llamaremos *plano proyectivo* al espacio cociente de la esfera S^2 obtenido por identificación de cada par de puntos diametralmente opuestos. Cualquier espacio homeomorfo a este cociente también lo llamaremos plano proyectivo.

Para los lectores que hayan estudiado Geometría proyectiva, explicaremos por qué a esta superficie se le llama plano proyectivo real. Un tal lector, recordará que en el estudio de la Geometría proyectiva plana, un punto tiene coordenadas homogéneas (x_0, x_1, x_2) donde x_0, x_1 y x_2 son números reales y al menos uno de ellos es distinto de cero. El término «homogéneas» significa que (x_0, x_1, x_2) y (x_0', x_1', x_2') representan el mismo punto si y sólo si existe un número real λ (necesariamente $\neq 0$) tal que

$$x_i = \lambda x_i', \qquad i = 0, 1, 2.$$

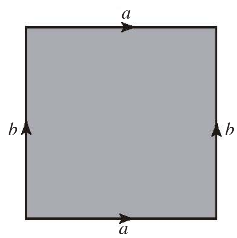


FIGURA 1.2
Construcción de un toro.

Si interpretamos (x_0, x_1, x_2) como coordenadas euclídeas ordinarias de un punto de $\mathbf{R}^3$, vemos que (x_0, x_1, x_2) y (x_0', x_1', x_2') representan el mismo punto del plano proyectivo si y sólo si están sobre una misma recta que pase por el origen. Así pues, podemos reinterpretar un punto del plano proyectivo como una recta de $\mathbf{R}^3$ que pase por el origen. La cuestión inmediata es ¿cómo dotar de una topología al conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de $\mathbf{R}^3$? Quizás la manera más fácil, es observar que cada recta de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen corta a la esfera unidad S^2 en un par de puntos diametralmente opuestos. Esto nos conduce a la definición anterior.

Sea $H = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geqq 0\}$ el hemisferio superior cerrado de S^2. Es evidente que, de cada par de puntos de S^2 diametralmente opuestos, al menos uno se encuentra en H. Si los dos puntos se encuentran en H entonces están sobre el ecuador, que es el borde de H. Así, pues, podemos definir también el plano proyectivo [2] como el espacio cociente de H obtenido por identificación

[2] Para una justificación rigurosa de esta afirmación, debemos utilizar la proposición 4.2 del Apéndice A, que puede aplicarse ya que la aplicación natural de S^2 en el plano proyectivo es cerrada, y H es un subconjunto cerrado de S^2.

de puntos diametralmente opuestos del borde de H. Puesto que H es obviamente homeomorfo al disco unidad cerrado E^2 del plano,

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\},$$

el espacio cociente de E^2 obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde es un plano proyectivo. Pero E^2 puede sustituirse por cualquier espacio homeomorfo, en particular por un cuadrado. Así pues, un plano proyectivo se obtiene identificando los lados opuestos de un cuadrado tal como se indica en la figura 1.3. El lector comparará esta construcción con la de un toro dada en la figura 1.2.

Se ve fácilmente que el plano proyectivo no es orientable; de hecho, contiene un subconjunto homeomorfo a una banda de Möbius.

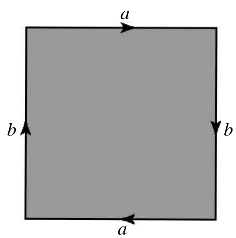


FIGURA 1.3
Construcción de un plano proyectivo a partir de un cuadrado.

Indicaremos ahora cómo se pueden dar muchos más ejemplos de superficies compactas formando lo que se llaman sumas conexas. Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas. Su *suma conexa,* designada por $S_1 \# S_2$, está formada practicando un pequeño agujero circular en cada superficie y pegando entonces las dos superficies a lo largo del borde de estos agujeros. Para ser precisos, escojamos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ tales que D_1 y D_2 sean discos cerrados (es decir, homeomorfos a E^2). Sea S_i' el complementario del interior de D_i en S_i, $i = 1, 2$. Escojamos un homeomorfismo h del círculo borde de D_1 sobre el círculo borde de D_2. Entonces $S_1 \# S_2$ es el espacio cociente de $S_1' \cup S_2'$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x del borde de D_1. Está claro que $S_1 \# S_2$ es una superficie. Parece natural, y puede ser demostrado rigurosamente, que el tipo topológico de $S_1 \# S_2$ no depende de la elección de los discos D_1 y D_2, ni de la elección del homeomorfismo h.

Ejemplos

4.1 Si S_2 es una 2-esfera, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a S_1.

4.2 Si S_1 y S_2 son dos toros, entonces $S_1 \# S_2$ es homeomorfo a la superficie de un bloque que tenga dos agujeros que lo perforen. (Se supone, desde luego, que los agujeros no están tan juntos que sus bordes se toquen o intersecten.)

4.3 Si S_1 y S_2 son dos planos proyectivos, $S_1 \# S_2$ es una «botella de Klein», esto es, homeomorfo a la superficie obtenida por identificación de los lados opuestos de un cuadrado como muestra la figura 1.4. Podemos probar esto por la técnica «cortar y pegar», como sigue. Si S_i es un plano proyectivo, y $D_i \subset S_i$ es un disco cerrado, entonces S_i', complementario del interior de D_i, es homeomorfo a una banda de Möbius (incluido el borde). En efecto, si consideramos S_i como el espacio obtenido por identificación de los puntos diametralmente opuestos del borde del disco unidad E^2 en $\mathbf{R}^2$, podemos elegir D_i como la imagen del conjunto $\{(x, y) \in E^2 : |y| \geqq \frac{1}{2}\}$ por la identificación, y entonces queda clara la veracidad de la afirmación. De aquí se deduce que $S_1 \# S_2$ se obtiene pegando dos bandas de Möbius a lo largo de sus bordes. Por otra parte, la figura 1.5 nos muestra cómo cortar una botella de Klein para obtener dos bandas de Möbius. Cortamos a lo largo de las líneas AB' y BA'; tras la identificación, este corte pasa a ser un círculo.

Consideraremos ahora algunas propiedades de esta operación de formar sumas conexas.

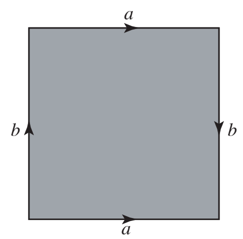


FIGURA 1.4
Construcción de la botella de Klein a partir de un cuadrado.

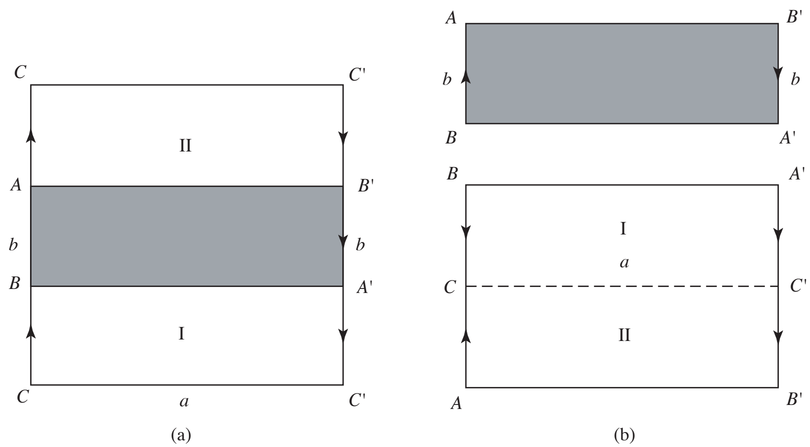


FIGURA 1.5
La botella de Klein es la unión de dos bandas de Möbius