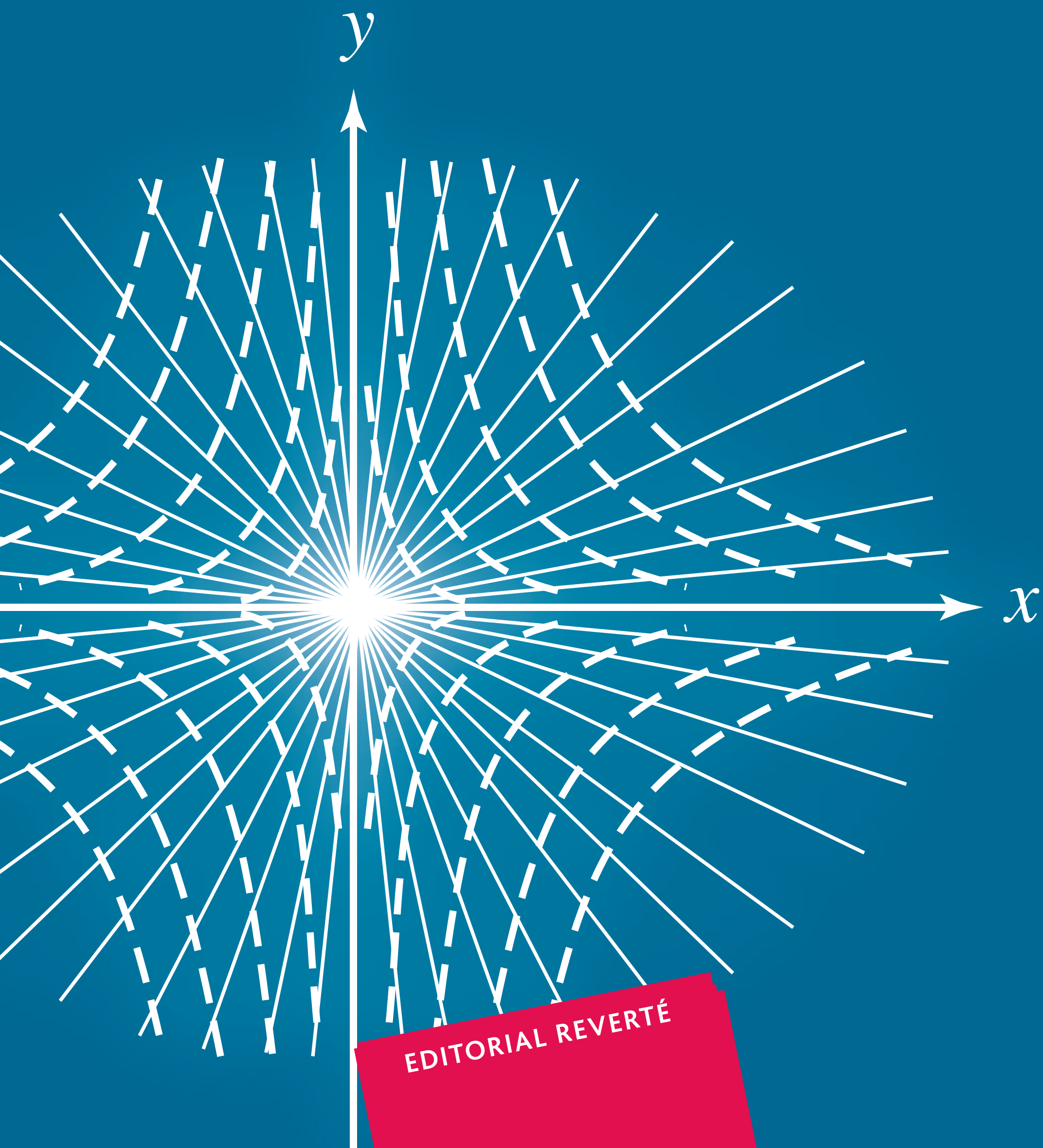
Tom M. Apostol

CALCULUS I

Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal



EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

CALCULUS I

Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:
CALCULUS, One – Variable Calculus
with an Introduction to Linear Algebra

Edición original en lengua inglesa publicada por
Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Edición en español:

Edición en papel
ISBN: 978-84-291-5002-5 Tomo 1
ISBN: 978-84-291-5001-8 Obra completa

Edición e-book (PDF)
ISBN: 978-84-291-9481-4 Tomo 1

Versión española por:
Dr. D. Francisco Vélez Cantarell
Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias de Barcelona

Revisada por:
Dr. D. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com

#449

a

Jane y Stephen

PRÓLOGO

Extracto del prólogo a la primera edición

Parece que no hay acuerdo sobre lo que ha de constituir un primer curso de Cálculo y Geometría Analítica. Unos sostienen que el camino verdadero para entender el Cálculo principia con un estudio completo del sistema de los números reales desarrollándolo paso a paso de manera lógica y rigurosa. Otros insisten en que el Cálculo es ante todo un instrumento para los ingenieros y físicos; y por consiguiente, que un curso debe llevar a las aplicaciones del Cálculo apelando a la intuición, para después, por el ejercicio en la resolución de problemas, alcanzar destreza operatoria. En ambos puntos de vista hay mucha parte de razón. El Cálculo es una ciencia deductiva y una rama de la Matemática pura. Al mismo tiempo es muy importante recordar que el Cálculo tiene profundas raíces en problemas físicos y que gran parte de su potencia y belleza deriva de la variedad de sus aplicaciones. Mas es posible combinar un desarrollo teórico riguroso con una sana formación técnica, y este libro representa un intento de establecer un sensible equilibrio entre las dos tendencias. Aunque se trate el Cálculo como ciencia deductiva, no por eso se abandonan las aplicaciones a problemas físicos. Las demostraciones de todos los teoremas importantes se consideran como una parte esencial en el desarrollo de las ideas matemáticas, y con frecuencia van precedidas de una discusión geométrica o intuitiva para dar al estudiante una visión más penetrante del porqué de la demostración. Aunque estas discusiones intuitivas pueden ser suficientes para el lector que no esté interesado en los detalles de la demostración, también se incluye la demostración completa para aquellos que prefieran una exposición más rigurosa.

La disposición de este libro ha sido sugerida por el desarrollo histórico y filosófico del Cálculo y la Geometría Analítica. Por ejemplo, se estudia la integración antes de la diferenciación. Aunque esta manera de ordenar la materia del curso sea poco frecuente, es históricamente correcta y pedagógicamente adecuada. Además, es el mejor camino para hacer patente la verdadera conexión entre la derivada y la integral.

El concepto de integral se define en primer lugar para funciones escalonadas. Puesto que la integral de una función escalonada no es más que una suma, la teoría de la integración es extremadamente sencilla en este caso. Mientras el estudiante aprende las propiedades de la integral para funciones escalonadas, adquiere experiencia en el uso de la notación sumación y al mismo tiempo se familiariza con el simbolismo de la integral. De esta manera se van construyendo los peldaños para que la transición de funciones escalonadas a otras funciones más generales parezca fácil y natural.

Prólogo a la segunda edición

La segunda edición difiere de la primera en muchos aspectos. Se ha añadido el Álgebra lineal; los teoremas del valor medio y las aplicaciones del Cálculo se han introducido en los primeros capítulos, y se ha añadido buen número de nuevos y sencillos ejercicios. Una inspección del índice revela que el libro se ha dividido en capítulos de menor extensión, desarrollándose cada uno sobre un concepto importante. Varias secciones han sido escritas de nuevo y reorganizadas para proporcionar una mejor fundamentación y mejorar la fluidez de las ideas.

Al igual que en la primera edición, cada concepto nuevo importante viene precedido de una introducción histórica, que describe su desarrollo desde una primera noción física intuitiva hasta su formulación matemática precisa. El estudiante descubre en parte los esfuerzos del pasado y los triunfos de los hombres que más han contribuido al tema. De este modo el estudiante se convierte en participante activo en la evolución de las ideas y no queda como mero observador pasivo de los resultados.

La segunda edición, como la primera, está dividida en dos volúmenes. Las dos terceras partes primeras del Volumen I tratan del Cálculo con funciones de una variable, incluyendo las series y una introducción a las ecuaciones diferenciales. La última tercera parte del Volumen I introduce el Álgebra lineal con aplicaciones a la Geometría y al Análisis. Gran parte de estos temas se apoya sólidamente en el cálculo de ejemplos que ilustran la teoría general. Ello proporciona una mezcla de Álgebra y de Análisis y contribuye a preparar el camino para la transición del Cálculo con una variable al Cálculo con varias variables, que se trata en el Volumen II. Un desarrollo más amplio de Álgebra lineal se hará necesario en la segunda edición del Volumen II.

Una vez más reconozco con agrado mi deuda con los profesores H. F. Bohnenblust, A. Erdélyi, F. B. Fuller, K. Hoffman, G. Springer, y H. S. Zuckerman. Su influencia en la primera edición ha continuado en la segunda. En la preparación de la segunda edición, recibí también la ayuda del profesor Basil Gordon, que sugirió muchas mejoras. Estoy también agradecido a George Springer y William P. Ziemer, que leyeron las últimas pruebas. El personal de Blaisdell Publishing Company, como siempre, ha prestado una gran ayuda; aprecio su simpática aceptación de mis deseos en lo relativo al formato y a la tipografía.

Por último, tengo especial satisfacción en expresar mi gratitud a mi esposa por haber contribuido en diversas formas a la preparación de las dos ediciones. En testimonio de mi agradecimiento le dedico este libro.

T. M. A.

Pasadena, California

ÍNDICE ANALÍTICO

I. INTRODUCCIÓN

Parte 1. Introducción histórica

Parte 2. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Parte 3. Un conjunto de axiomas para el sistema de números reales

Parte 4. Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas

1. LOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO INTEGRAL

2. ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

3. FUNCIONES CONTINUAS

4. CÁLCULO DIFERENCIAL

5. RELACIÓN ENTRE INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN

6. FUNCIÓN LOGARITMO, FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

7. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS

8. INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

9. NÚMEROS COMPLEJOS

10. SUCESIONES, SERIES, INTEGRALES IMPROPIAS

11. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

12. ÁLGEBRA VECTORIAL

13. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

14. CÁLCULO CON FUNCIONES VECTORIALES

15. ESPACIOS LINEALES

16. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

INTRODUCCIÓN

Parte I. - Introducción histórica

I 1.1 Los dos conceptos básicos del Cálculo

El considerable progreso habido en la ciencia y en la técnica durante los últimos cien años procede en gran parte del desarrollo de las Matemáticas. La rama de la Matemática conocida por Cálculo integral y diferencial es un instrumento natural y poderoso para atacar múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Química, Geología, Biología, y en otros campos, incluyendo recientemente algunos de Ciencias sociales.

Para dar una idea al lector de los muy diversos tipos de problemas que pueden tratarse por los métodos de Cálculo se expone a continuación una pequeña muestra de cuestiones seleccionadas entre los ejercicios que aparecen en capítulos posteriores de este libro.

¿Con qué velocidad debería ser impulsado un cohete para que nunca volviera a la Tierra? ¿Cuál es el radio del menor disco circular que cubra a todo triángulo isósceles de perímetro L? ¿Cuál es el volumen de material extraído de una esfera de radio $2r$ al atravesarla por un orificio cilíndrico de radio r cuyo eje pase por el centro de la esfera? Si un cultivo de bacterias crece en razón directa a la cantidad que hay en cada instante, y la población se duplica en una hora, ¿en cuánto se habrá incrementado al cabo de dos horas? Si una fuerza de diez libras estira una cuerda elástica una pulgada, ¿qué trabajo se necesita para estirarla un pie?

Estos ejemplos, elegidos en distintos campos, ilustran algunas de las cuestiones técnicas que pueden ser resueltas como aplicaciones más o menos rutinarias del Cálculo.

El Cálculo no sólo es un instrumento técnico, sino que contiene una colección de ideas fascinadoras y atrayentes que han ocupado el pensamiento humano durante centurias. Estas ideas están relacionadas con *velocidad, área, volumen, razón de crecimiento, tangente a una línea,* y con otros conceptos referentes a otros dominios. El Cálculo obliga a detenerse y a pensar cuidadosamente acerca del significado de estos conceptos. Otro carácter notable del Cálculo es su poder unificador. Muchos de estos problemas pueden ser formulados de manera que se reduzcan a otros problemas de naturaleza puramente geométrica. A continuación se procede a una breve descripción de tales problemas.

Considérese una curva C situada encima de una línea horizontal base, como se indica en la figura I.1. Se supone que esta curva tiene la propiedad de ser cortada por cada vertical, en un punto a lo más. La parte sombreada de la figura está formada por aquellos puntos situados por debajo de la curva C, encima de la horizontal, y entre dos segmentos verticales paralelos que unen C con la base. El primer problema fundamental del Cálculo es el siguiente: *Determinar un número que mida el área de esta región sombreada.*

Considérese después una recta que sea tangente a la curva, tal como se ve en la figura I.1. El segundo problema fundamental puede formularse de la siguiente manera: *Determinar un número que mida la pendiente de esta recta.*

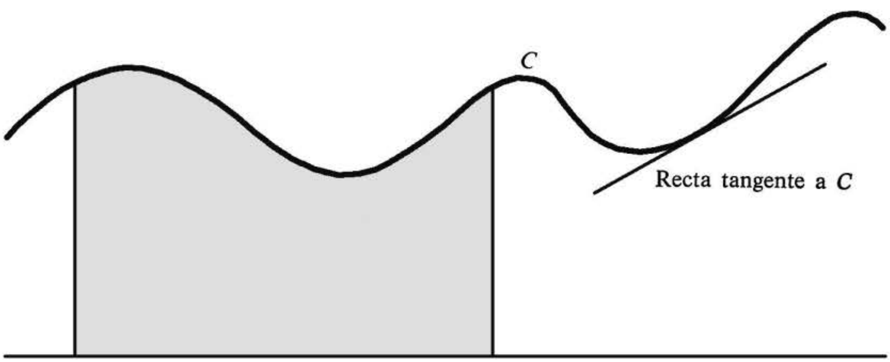


FIGURA I.1

Fundamentalmente, el Cálculo se ocupa en la formulación precisa y la resolución de estos dos problemas considerados. En el Cálculo se *definen* los conceptos de área y tangente y se *calculan* el área de una región dada y la pendiente de la tangente a una curva dada. El *Cálculo integral* se ocupa del problema del área y será discutido en este capítulo 1. El *Cálculo diferencial* se ocupa del problema de la tangente y será introducido en el capítulo 4.

El estudio del Cálculo exige una cierta preparación matemática. El presente capítulo trata de estos conceptos básicos y está dividido en cuatro partes: La 1.ª parte da una perspectiva histórica; la 2.ª se refiere a la notación y terminología en la matemática de conjuntos; la 3.ª trata del sistema de números reales; la 4.ª ofrece la inducción matemática y la notación sumatoria. Si el lector está informado de estos temas, puede abordar directamente el desarrollo del Cálculo integral en el capítulo 1. Si no, deberá familiarizarse con las materias contenidas en esta introducción antes de iniciar el capítulo 1.

I 1.2 Introducción histórica

El origen del Cálculo integral se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron *método de exhaución.* Las ideas esenciales de este método son realmente muy simples y se pueden describir brevemente como sigue: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada. La figura I.2 es una ilustración del método en el caso de una región semicircular. Este método fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 A.C.) para hallar fórmulas exactas de las áreas del círculo y de algunas otras figuras especiales.

Desde Arquímedes, el desarrollo del método de exhaución tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de símbolos y técnicas algebraicas se hizo preciso en los estudios matemáticos. El Álgebra elemental que hoy día es familiar a la mayoría de los alumnos de los últimos cursos de enseñanza secundaria, era totalmente desconocida en tiempos de Arquímedes, lo que hacía imposible extender el método a cualquier clase de regiones, sin poseer manera adecuada de poder expresar los largos cálculos en forma simplificada.

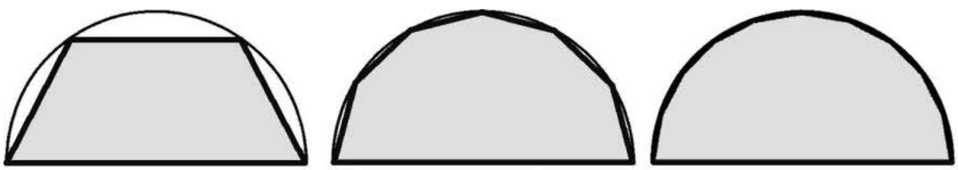


FIGURA I.2 *El método de exhaución aplicado a una región semicircular.*

Un cambio lento pero revolucionario, en el desarrollo de las notaciones matemáticas, empezó en el siglo XVI D.C. El engorroso sistema de numeración romano fue desplazado gradualmente por los caracteres arábigos utilizados hoy día; los signos + y — fueron introducidos por primera vez, y se empezaron a reconocer las ventajas de la notación decimal. Durante este mismo período, los brillantes resultados de los matemáticos italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari que dieron soluciones algebraicas a las ecuaciones cúbica y cuártica, estimuló el desarrollo de la Matemática y animó a la aceptación del lenguaje algebraico nuevo y superior. Con la introducción muy extendida de los bien elegidos símbolos algebraicos, revivió el interés por el antiguo método de exhaución y en el siglo XVI descubrieron múltiples resultados parciales, los que como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal y Wallis fueron pioneros.

Gradualmente, el método de exhaución fue transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo integral, nueva y potente disciplina que tiene numerosísimas aplicaciones no sólo en problemas relativos a áreas y volúmenes, sino también en problemas de otras ciencias. Este método, que mantiene alguno de los caracteres originales del método de exhaución, recibió su mayor impulso en el siglo XVII, debido a los esfuerzos de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), y su desarrollo continuó durante el siglo XIX, hasta que Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron una base matemática firme. Posteriores afinamientos y extensiones de la teoría han llegado hasta la Matemática contemporánea.

I 1.3 El método de exhaución para el área de un segmento de parábola

Antes de proceder al estudio sistemático del Cálculo integral, será instructivo aplicar el método de exhaución directamente a una de las figuras particulares tratadas por el mismo Arquímedes. La región en cuestión está presentada en la figura I.3 y puede describirse como sigue: Si se elige un punto arbitrario de la base de la figura y se designa por x su distancia a 0, la distancia vertical de este punto a la curva es x^2. En particular, si la longitud de la base es b la altura de la figura es b^2. La distancia vertical de x a la curva se denomina «ordenada» de x. La curva así descrita se denomina *parábola* y la región limitada por ella y por los dos segmentos rectilíneos, se llama *segmento parabólico*.

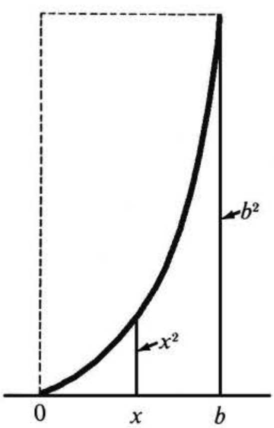


FIGURA I.3 *Segmento parabólico*

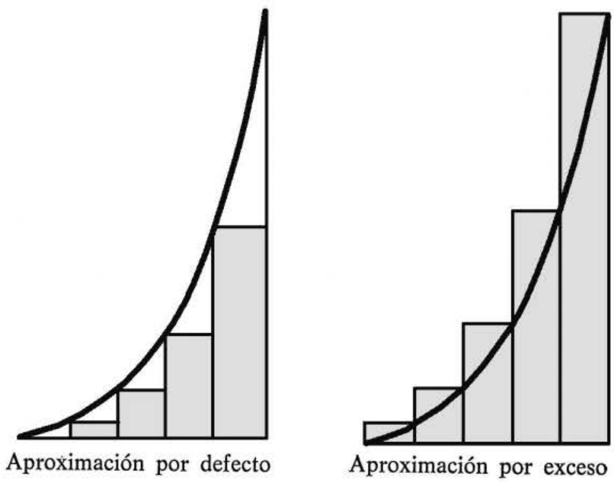


FIGURA I.4

Esta figura puede encerrarse en un rectángulo de base b y altura b^2, como se ve en la figura I.3. Observando la figura parece natural afirmar que el área del segmento parabólico es menor que la mitad del área del rectángulo. Arquímedes hizo el sorprendente descubrimiento de que el área del segmento parabólico es exactamente *un tercio* de la del rectángulo; es decir, $A=b^3/3$, donde A designa el área del segmento parabólico. Se verá a continuación cómo se llega a este resultado.

Se hace notar que el segmento parabólico dibujado en la figura I.3 no está elegido exactamente tal como lo dibujó Arquímedes y que los detalles que

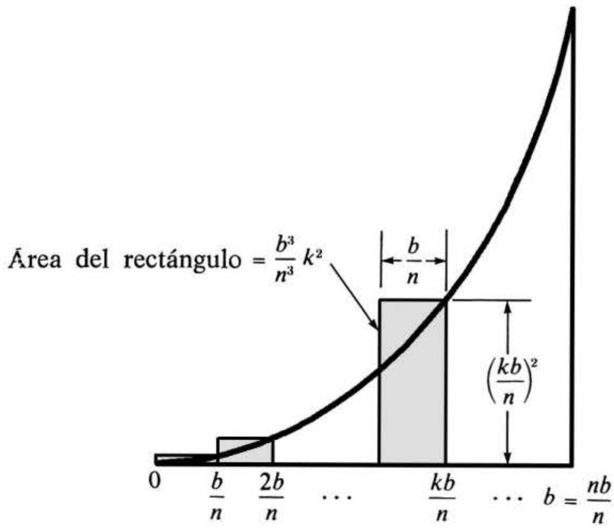


FIGURA I.5 *Cálculo del área de un segmento parabólico.*

siguen no son exactamente los utilizados por él. Sin embargo, las *ideas* esenciales son las de Arquímedes; lo que aquí se expone puede considerarse como el método de exhaución expuesto con la notación moderna.

El método consiste simplemente en lo siguiente: se divide la figura en un cierto número de bandas y se obtienen dos aproximaciones de la región, una por defecto y otra por exceso, utilizando dos conjuntos de rectángulos como se indica en la figura I.4. (Se utilizan rectángulos mejor que polígonos arbitrarios para simplificar los cálculos.) El área del segmento parabólico es mayor que el área total de los rectángulos interiores pero menor que la de los rectángulos exteriores.

Si cada banda se subdivide a su vez, se obtiene una nueva aproximación con mayor número de bandas, la reunión de las áreas de los rectángulos interiores *crece,* mientras que el total de las áreas de los rectángulos exteriores *decrece.* Arquímedes vio que se podía lograr el área con el grado de aproximación deseado sin más que tomar un número suficiente de bandas.

El cálculo efectivo en este caso se realiza como se indica a continuación. Con objeto de simplificar se subdivide la base en n *partes* iguales, cada una de longitud b/n (véase fig. I.5). Los puntos de subdivisión corresponden a los siguientes valores de x:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b\,.$$

La expresión general de un punto de la subdivisión es $x=kb/n$, donde k toma los valores sucesivos $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. En cada punto kb/n se construye el rectángulo exterior de altura $(kb/n)^2$ como se indica en la figura I.5. El área de este rectángulo es el producto de la base por la altura y es igual a:

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}k^2.$$

Si se designa por S_n la suma de las áreas de todos los rectángulos exteriores, puesto que el área del rectángulo k-simo es $(b^3/n^3)k^2$ se tiene la fórmula:

(I.1) $$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,.$$

De forma análoga se obtiene la fórmula para la suma s_n de todos los rectángulos interiores:

(I.2) $$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,.$$

La forma de estas sumas es de gran importancia para su cálculo. Nótese que el factor que multiplica a b^3/n^3 en la ecuación (I.1) es la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,.$$

(El factor correspondiente en la ecuación (I.2) es análogo salvo que la suma tiene únicamente $n-1$ sumandos.) Para valores grandes de n la obtención de esta suma por adición directa de sus sumandos es pesada, pero afortunadamente existe una interesante identidad que hace posible obtener esta suma por un camino más simple, y es la siguiente:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.3}$$

Esta identidad es válida para todo entero $n \geq 1$ y puede demostrarse del siguiente modo: Se parte de la fórmula $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ y se pone en la forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Haciendo $k = 1, 2, \ldots, n-1$, obtenemos las $n-1$ fórmulas

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 &= 2^3 - 1^3 \\ 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 &= 3^3 - 2^3 \\ &\;\vdots \\ 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 &= n^3 - (n-1)^3. \end{aligned}$$

Al sumar estas fórmulas, todos los términos del segundo miembro se reducen excepto dos y se obtiene

$$3[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - 1^3.$$

La segunda suma del primer miembro es la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo valor es $\frac{1}{2}n(n-1)$. Por tanto la última igualdad nos da

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{I.4}$$

Sumando n^2 a los dos miembros, obtenemos (I.3).

Las expresiones exactas dadas en los segundos miembros de (I.3) y (I.4) no son necesarias para el objeto que aquí se persigue, pero sirven para deducir fácilmente las dos *desigualdades* que interesan

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \tag{I.5}$$

que son válidas para todo entero $n \geq 1$. Estas desigualdades pueden deducirse fácilmente como consecuencias de (I.3) y (I.4), o directamente por inducción. (Véase la Sección I 4.1.)

Multiplicando ambas desigualdades en (I.5) por b^3/n^3 y haciendo uso de (I.1) y (I.2) se tiene:

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \tag{I.6}$$

para cada n, y observándose que se presenta por primera vez el número $b^3/3$. Las desigualdades en (I.6) expresan que para cada n el número $b^3/3$ está comprendido entre s_n y S_n. Pero ahora es fácil probar que $b^3/3$ es el *único* número que goza de esta propiedad; es decir, que si A es un número que verifica las desigualdades

$$s_n < A < S_n \tag{I.7}$$

para cada entero positivo n, ha de ser necesariamente $A = b^3/3$. Por esta razón dedujo Arquímedes que el área del segmento parabólico es $b^3/3$.

Para probar que $A = b^3/3$ se utilizan una vez más las desigualdades (I.5). Sumando n^2 a los dos miembros de la desigualdad de la izquierda en (I.5) se obtiene:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 .$$

Multiplicando por b^3/n^3 y utilizando (I.1) se tiene

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} . \tag{I.8}$$

Análogamente, restando n^2 de los dos miembros de la desigualdad de la derecha en (I.5) y multiplicando por b^3/n^3 se llega a la desigualdad:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n . \tag{I.9}$$

Por tanto, cada número A que satisfaga (I.7) ha de satisfacer también:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{I.10}$$

para cada entero $n \geq 1$. Ahora bien, hay sólo tres posibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \qquad A < \frac{b^3}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3} .$$