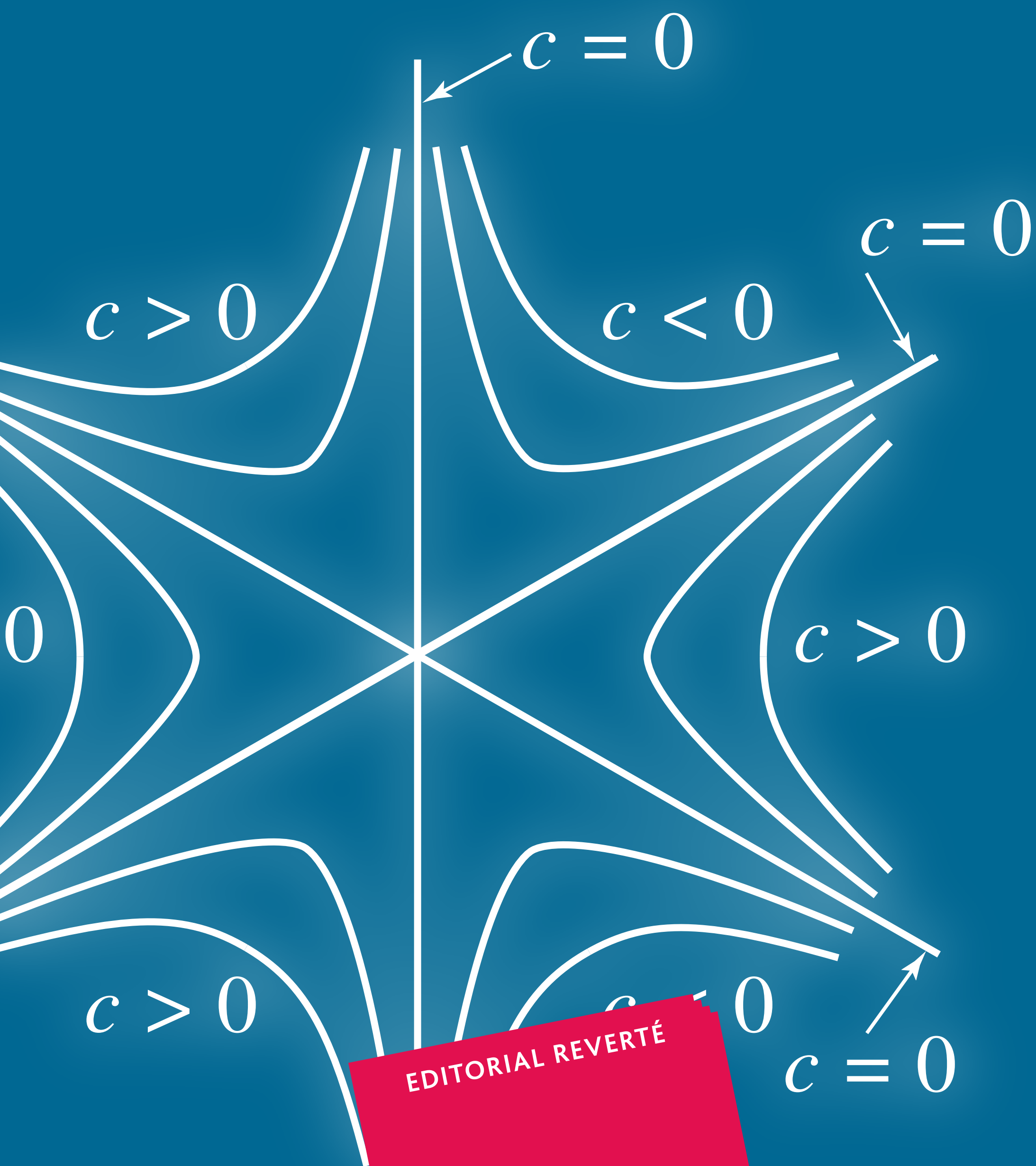
Tom M. Apostol

# CALCULUS II

Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra Lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad




EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

# CALCULUS II

**Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra Lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad**

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

*Título de la obra original:*
**CALCULUS, Multi – Variable Calculus and Linear Algebra,**
**With applications to Differential Equations and Probability**

*Edición original en lengua inglesa publicada por*
**Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.**



*Edición en español:*



Edición en papel:
ISBN: 978-84-291-5003-2 Tomo 2
ISBN: 978-84-291-5001-8 Obra completa

Edición e-book (PDF)
ISBN: 978-84-291-9482-1 Tomo 2

*Versión española por:*
**Dr. D. Francisco Vélez Cantarell**
Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias de Barcelona

*Revisada por:*
**Dr. D. Enrique Linés Escardó**
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

**Propiedad de:**
**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com



#471

*a*

*Jane y Stephen*

# PRÓLOGO

*Este libro es una continuación de mi* Calculus, *volumen I, segunda edición. El presente volumen fue escrito con el mismo plan fundamental que inspiró al primero. Un adecuado enfoque hacia la técnica se combina con un riguroso desarrollo teórico. Se ha procurado hacer llegar al estudiante el espíritu de la matemática moderna sin exagerar el formalismo. Como en el volumen I, se han incluido comentarios de tipo histórico para hacer vivir al lector la evolución de las ideas.*

*El segundo volumen está dividido en tres partes, tituladas.* Análisis lineal, Análisis no lineal, *y* Temas especiales. *Los dos últimos capítulos del volumen I han sido repetidos y son los dos primeros capítulos del volumen II, de modo que toda la materia relativa al álgebra lineal está completa en cada volumen.*

*La parte 1 contiene una introducción al álgebra lineal, incluyendo transformaciones lineales, matrices, determinantes, autovalores y formas cuadráticas. Se dan aplicaciones al análisis, en particular al estudio de las ecuaciones diferenciales lineales. Se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales con la ayuda del cálculo matricial. Se demuestran los teoremas de existencia y unicidad por medio del método de Picard de aproximaciones sucesivas, que también se trata utilizando los operadores de contracción.*

*En la parte 2 se discute el cálculo de funciones de varias variables. El cálculo diferencial se unifica y simplifica con la ayuda del álgebra lineal. Se incluyen reglas de la cadena para campos escalares y vectoriales, y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y a problemas de extremos. En cálculo integral se incluyen integrales de línea, integrales múltiples y de superficie, con aplicaciones al análisis vectorial. En esto la exposición sigue más o menos la línea clásica y no incluye un desarrollo formal de las formas diferenciales.*

*Los temas especiales tratados en la parte 3 son* Probabilidades *y* Análisis numérico. *El de probabilidades está dividido en dos capítulos, uno que trata de los espacios muestrales finitos o infinitos numerables; el otro de espacios muestrales no numerables, variables aleatorias, y funciones de distribución. Las aplicaciones se ilustran en el estudio de variables aleatorias uni- y bi-dimensionales.*

*El último capítulo contiene una introducción al análisis numérico, poniendo especial atención en los distintos tipos de polinomios de aproximación. Termina el libro con un estudio de las fórmulas de integración aproximada, tales como la regla de Simpson y una discusión de la fórmula de sumación de Euler.*

*En este volumen hay materia suficiente para un curso anual completo con tres o cuatro sesiones semanales. Presupone un conocimiento del cálculo con una variable como se desarrolla en la mayoría de los cursos del primer año de cálculo. El autor ha imaginado el curso con cuatro sesiones semanales, dos de exposición por parte del profesor y dos para preguntar a los alumnos, empleando aproximadamente diez semanas en cada parte y omitiendo las secciones señaladas con asterisco.*

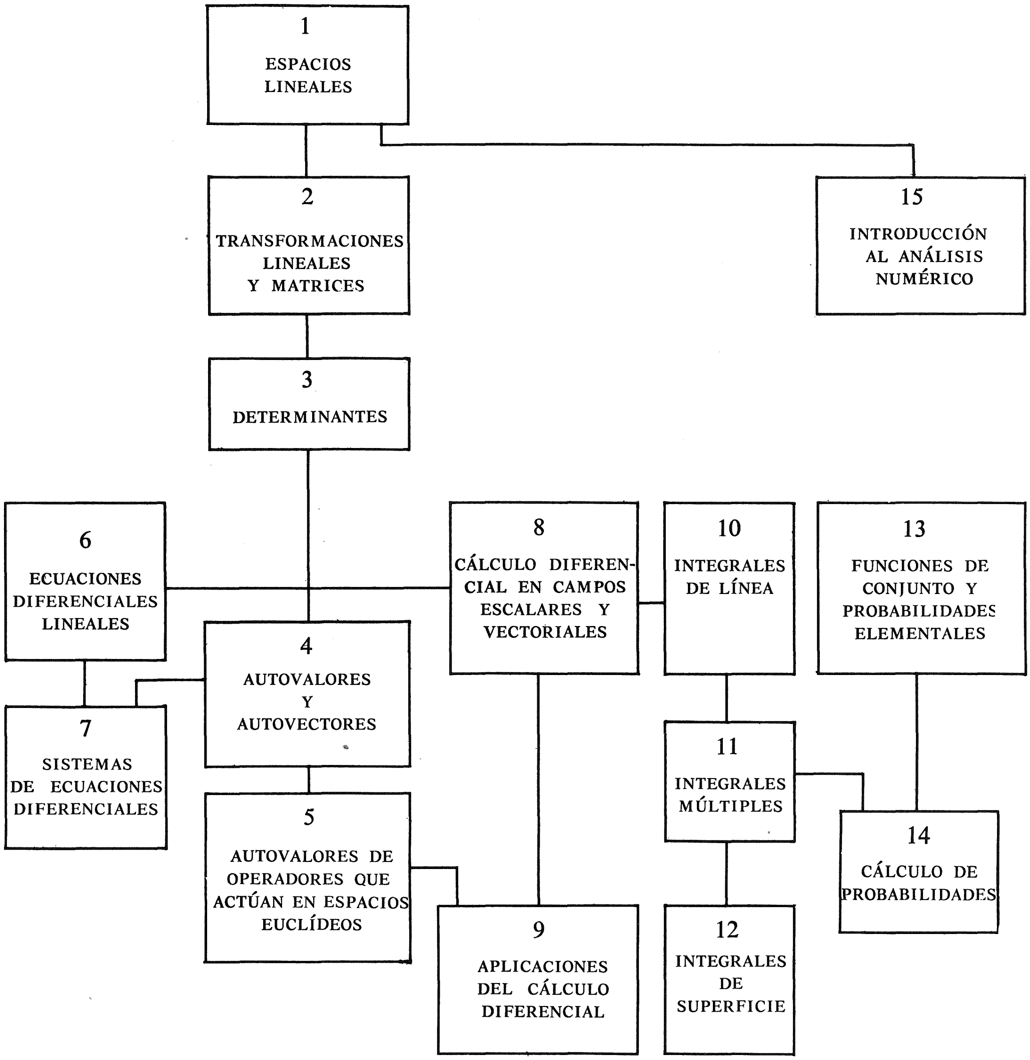
*Este segundo volumen ha sido planeado de modo que muchos capítulos pueden omitirse en cursos abreviados. Por ejemplo, el último capítulo de cada parte puede suprimirse sin romper la continuidad de la exposición. La parte primera proporciona material para un curso combinado de álgebra lineal y de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada profesor puede elegir los temas adecuados a sus necesidades y preferencias consultando el diagrama de la página siguiente que muestra la interdependencia lógica de los capítulos.*

*Una vez más reconozco con agrado el asesoramiento de numerosos amigos y colegas. Al preparar la segunda edición recibí valiosa ayuda de los profesores Herbert S. Zuckerman de la Universidad de Washington, y Basil Gordon de la Universidad de California, Los Ángeles, cada uno de los cuales sugirió varias mejoras. Agradezco también al personal de la Blaisdell Publishing Company su cooperación y ayuda.*

*Como en otras ocasiones me da especial satisfacción expresar mi gratitud a mi esposa por su valiosa y variada contribución. En reconocimiento le dedico gustosamente este libro.*

*T. M. A.*

*Pasadena, California*


1
ESPACIOS LINEALES
2
TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES
15
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO
3
DETERMINANTES
6
ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
8
CÁLCULO DIFERENCIAL EN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES
10
INTEGRALES DE LÍNEA
13
FUNCIONES DE CONJUNTO Y PROBABILIDADES ELEMENTALES
4
AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
7
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
11
INTEGRALES MÚLTIPLES
5
AUTOVALORES DE OPERADORES QUE ACTÚAN EN ESPACIOS EUCLÍDEOS
14
CÁLCULO DE PROBABILIDADES
9
APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL
12
INTEGRALES DE SUPERFICIE

# ÍNDICE ANALÍTICO

## Parte 1. Análisis lineal

### 1. ESPACIOS LINEALES



### 2. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

## 3. DETERMINANTES

## 4. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES



## 5. AUTOVALORES DE OPERADORES EN ESPACIOS EUCLÍDEOS

## 6. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

## 7. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

# Parte 2. Análisis no lineal

## 8. CÁLCULO DIFERENCIAL EN CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

## 9. APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL



## 10. INTEGRALES DE LÍNEA

## 11. INTEGRALES MÚLTIPLES

## 12. INTEGRALES DE SUPERFICIE

# Parte 3. Temas especiales

## 13. FUNCIONES DE CONJUNTO Y PROBABILIDAD ELEMENTAL



## 14. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

## 15. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS NUMÉRICO

# PARTE 1

# Análisis lineal

# 1

# ESPACIOS LINEALES

## 1.1 Introducción

A lo largo de la Matemática se encuentran muchos ejemplos de objetos matemáticos que pueden sumarse unos con otros y multiplicarse por números reales. Ante todo, los números reales son objetos de tal naturaleza. Otros ejemplos son las funciones vectoriales, los números complejos, las series y los vectores en el espacio *n-dimensional.* En este capítulo tratamos un concepto matemático general, llamado *espacio lineal,* que incluye todos esos ejemplos y muchos otros como casos particulares.

Brevemente, un espacio lineal es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse ciertas operaciones llamadas *adición* y *multiplicación por números.* Al definir un espacio lineal no especificamos la naturaleza de los elementos ni decimos cómo se realizan las operaciones entre ellos. En cambio, exigimos que las operaciones tengan ciertas propiedades que tomamos como axiomas de un espacio lineal. Vamos ahora a hacer con detalle una descripción de esos axiomas.

## 1.2 Definición de espacio lineal

Sea $V$ un conjunto no vacío de objetos, llamados *elementos.* El conjunto $V$ se llama espacio lineal si satisface los diez axiomas siguientes que se enuncian en tres grupos.

*Axiomas de clausura*

AXIOMA 1. CLAUSURA RESPECTO DE LA ADICIÓN. *A todo par de elementos $x$ e $y$ de $V$ corresponde un elemento único de $V$ llamado suma de $x$ e $y$, designado por $x + y$.*

AXIOMA 2. CLAUSURA RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN POR NÚMEROS REALES. *A todo $x$ de $V$ y todo número real $a$ corresponde un elemento de $V$ llamado producto de $a$ por $x$, designado por $ax$.*

*Axiomas para la adición*

AXIOMA 3. LEY CONMUTATIVA. *Para todo $x$ y todo $y$ de $V$, tenemos $x + y = y + x$.*

AXIOMA 4. LEY ASOCIATIVA. *Cualesquiera que sean $x, y, z$ de $V$, tenemos $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

AXIOMA 5. EXISTENCIA DE ELEMENTO CERO. *Existe un elemento en $V$, designado con el símbolo $O$, tal que*

$$x + O = x \qquad \text{para todo } x \text{ de } V.$$

AXIOMA 6. EXISTENCIA DE OPUESTOS. *Para todo $x$ de $V$, el elemento $(-1)x$ tiene la propiedad*

$$x + (-1)x = O\,.$$

*Axiomas para la multiplicación por números*

AXIOMA 7. LEY ASOCIATIVA. *Para todo $x$ de $V$ y todo par de números reales $a$ y $b$, tenemos*

$$a(bx) = (ab)x\,.$$

AXIOMA 8. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN EN $V$. *Para todo $x$ y todo $y$ de $V$ y todo número real $a$, tenemos*

$$a(x + y) = ax + ay\,.$$

AXIOMA 9. LEY DISTRIBUTIVA PARA LA ADICIÓN DE NÚMEROS. *Para todo $x$ de $V$ y todo par de números reales $a$ y $b$, tenemos*

$$(a + b)x = ax + bx\,.$$

AXIOMA 10. EXISTENCIA DE ELEMENTO IDÉNTICO. *Para todo $x$ de $V$, tenemos $1x = x$.*

Los espacios lineales así definidos, se llaman, a veces, espacios lineales *reales* para resaltar el hecho de que se multiplican los elementos de $V$ por números reales. Si en los axiomas 2, 7, 8 y 9 se reemplaza *número real* por *número complejo,* la estructura que resulta se llama *espacio lineal complejo.* Algunas veces un espacio lineal se llama también *espacio vectorial lineal* o simplemente *espacio vectorial*; los números utilizados como multiplicadores se llaman *escalares.* Un espacio lineal real tiene números reales como escalares; un espacio lineal complejo tiene como escalares números complejos. Si bien consideraremos principalmente ejemplos de espacios lineales reales, todos los teoremas son válidos para espacios lineales complejos. Cuando digamos espacio lineal sin más, se sobrentenderá que el espacio puede ser real o complejo.

## 1.3 Ejemplos de espacios lineales

Si precisamos el conjunto $V$ y decimos cómo se suman sus elementos y cómo se multiplican por números, obtenemos un ejemplo concreto de espacio lineal. El lector fácilmente puede comprobar que cada uno de los ejemplos siguientes satisface todos los axiomas para un espacio lineal real.

EJEMPLO 1. Sea $V = \mathbf{R}$, el conjunto de todos los números reales, y sean $x + y$ y $ax$ la adición y la multiplicación ordinarias de números reales.

EJEMPLO 2. Sea $V = \mathbf{C}$ el conjunto de todos los números complejos, definimos $x + y$ como la adición ordinaria de números complejos, y $ax$ como la multiplicación del número complejo $x$ por el número real $a$. Aunque los elementos de $V$ sean números complejos, éste es un espacio lineal real porque los escalares son reales.

EJEMPLO 3. Sea $V = V_n$, el espacio vectorial de todas las $n$-plas de números reales, con la adición y la multiplicación por escalares definidas en la forma ordinaria en función de los componentes.

EJEMPLO 4. Sea $V$ el conjunto de todos los vectores $V_n$ ortogonales a un vector no nulo dado $N$. Si $n = 2$, este espacio lineal es una recta que pasa por $O$ con $N$ como vector normal. Si $n = 3$, es un plano que pasa por $O$ con $N$ como vector normal.

Los siguientes ejemplos se llaman *espacios funcionales.* Los elementos de $V$ son funciones vectoriales, con la suma de dos funciones $f$ y $g$ definidas en la forma ordinaria:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo real $x$ en la intersección de los dominios de $f$ y $g$. La multiplicación de una función $f$ por un escalar real $a$ se define así: $af$ es aquella función cuyo valor en cada $x$ del dominio de $f$ es $af(x)$. El elemento cero es la función cuyos valores son nulos para todo $x$. El lector puede comprobar fácilmente que cada uno de los conjuntos siguientes es un espacio funcional.

EJEMPLO 5. El conjunto de todas las funciones definidas en un intervalo dado.

EJEMPLO 6. El conjunto de todos los polinomios.

EJEMPLO 7. El conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$, siendo $n$ fijo. (Siempre que consideremos este conjunto, se sobrentenderá que siempre está incluido el polinomio nulo.) El conjunto de todos los polinomios de grado *igual* a $n$ no es una espacio lineal porque no se satisfacen los axiomas de clausura. Por ejemplo, la suma de dos polinomios de grado $n$ puede no ser de grado $n$.

EJEMPLO 8. El conjunto de todas las funciones continuas en un intervalo dado. Si el intervalo es $[a, b]$, designamos este espacio con $C(a, b)$.

EJEMPLO 9. El conjunto de todas las funciones derivables en un punto dado.

EJEMPLO 10. El conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo dado.

EJEMPLO 11. El conjunto de todas las funciones $f$ definidas en el punto 1 siendo $f(1) = 0$. El número 0 es esencial en este ejemplo. Si reemplazamos 0 por un número no nulo $c$, violamos el axioma de clausura.

EJEMPLO 12. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + ay' + by = 0$, donde $a$ y $b$ son constantes dadas. También aquí es esencial el 0. El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial no homogénea no satisface los axiomas de clausura.

Estos ejemplos y muchos otros hacen patente cómo el concepto de espacio lineal está extendido por el Álgebra, la Geometría y el Análisis. Cuando se deduce un teorema de los axiomas de un espacio lineal, obtenemos un resultado válido para cada ejemplo concreto. Unificando varios ejemplos de este modo, conseguimos un conocimiento más profundo en cada uno. En ocasiones el conocimiento de un determinado ejemplo ayuda para anticipar o interpretar resultados válidos para otros ejemplos y pone en evidencia relaciones que de otro modo podrían pasar inadvertidas.

## 1.4 Consecuencias elementales de los axiomas

Los teoremas que siguen se deducen fácilmente de los axiomas de un espacio lineal.

TEOREMA 1.1. UNICIDAD DEL ELEMENTO CERO. *En cualquier espacio lineal existe un elemento cero y sólo uno.*

*Demostración.* El axioma 5 nos asegura que existe por lo menos un elemento cero. Supongamos que existan dos, sean $O_1$ y $O_2$. Haciendo $x = O_1$ y $O = O_2$ en el axioma 5, obtenemos $O_1 + O_2 = O_1$. Análogamente, haciendo $x = O_2$ y $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Pero $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$ por la ley conmutativa, así que $O_1 = O_2$.

TEOREMA 1.2. UNICIDAD DE ELEMENTOS OPUESTOS. *En cualquier espacio lineal todo elemento tiene exactamente un opuesto. Esto es, para todo $x$ existe un $y$, y sólo uno tal que $x + y = O$.*

*Demostración.* El axioma 6 nos dice que cada $x$ tiene por lo menos un opuesto, a saber $(-1)x$. Supongamos que $x$ tenga dos opuestos, sean $y_1$ e $y_2$. Entonces $x + y_1 = O$ y $x + y_2 = O$. Sumando $y_2$ a los dos miembros de la primera igualdad y aplicando los axiomas 5, 4 y 3, obtenemos que

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2 ,$$

y

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1 .$$

Por consiguiente $y_1 = y_2$, con lo que $x$ tiene exactamente un opuesto, el elemento $(-1)x$.

*Notación.* El opuesto de $x$ se designa por $-x$. La diferencia $y - x$ se define como la suma $y + (-x)$.

El teorema siguiente muestra un conjunto de propiedades que rigen los cálculos algebraicos elementales en un espacio lineal.

TEOREMA 1.3. *En un espacio lineal, designemos con $x$ e $y$ dos elementos cualesquiera y con $a$ y $b$ dos escalares cualesquiera. Tenemos entonces las propiedades siguientes:*

a) $0x = O$.
b) $aO = O$.

c) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$.
d) *Si* $ax = O$, *entonces* $a = 0$ *o* $x = O$, *o los dos.*
e) *Si* $ax = ay$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $x = y$.
f) *Si* $ax = bx$ *y* $x \neq O$, *entonces* $a = b$.
g) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$.
h) $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, *y en general*, $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

Demostraremos a), b) y c) y dejamos como ejercicios las demostraciones de las otras propiedades.

*Demostración de* a). Sea $z = 0x$. Deseamos demostrar que $z = O$. Sumando $z$ a sí mismo y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

Sumemos ahora $-z$ a ambos miembros y obtenemos $z = O$.

*Demostración* de b). Sea $z = aO$, sumar $z$ a sí mismo, y aplicar el axioma 8.

*Demostración* de c). Sea $z = (-a)x$. Sumando $z$ a $ax$ y aplicando el axioma 9, encontramos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O,$$

así que $z$ es el opuesto de $ax$, $z = -(ax)$. Análogamente, si sumamos $a(-x)$ a $ax$ y aplicamos el axioma 8 y la propiedad b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

## 1.5 Ejercicios

En los ejercicios del 1 al 28, determinar si cada uno de los conjuntos dados es un espacio lineal real, si la adición y multiplicación por escalares reales está definida en la forma usual. Para aquellos en los que no es así, decir cuáles son los axiomas que no se cumplen. Las funciones de los ejercicios 1 al 17 son reales. En los ejercicios 3, 4 y 5, cada función tiene un dominio que contiene 0 y 1. En los ejercicios 7 al 12, cada dominio contiene todos los números reales.

1. Todas las funciones racionales.
2. Todas las funciones racionales $f/g$, con el grado de $f \leq$ que el grado de $g$ (incluyendo $f = 0$).
3. Todas las $f$ con $f(0) = f(1)$.
4. Todas las $f$ con $2f(0) = f'(1)$.
5. Todas las $f$ con $f(1) = 1 + f(0)$.
6. Todas las funciones escalonadas definidas en $[0, 1]$.
7. Todas las $f$ en las que $f(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.
8. Todas las funciones pares.
9. Todas las funciones impares.