Ernst-Erich Doberkat

Die Drei

Ein Streifzug durch die Rolle der Zahl in Kunst, Kultur und Geschichte

Springer Spektrum

Die Drei

Ernst-Erich Doberkat

Die Drei

Ein Streifzug durch die Rolle der Zahl in Kunst, Kultur und Geschichte

Springer Spektrum

Ernst-Erich Doberkat
Lewackerstr. 6 b
44879 Bochum, Deutschland

ISBN 978-3-662-58787-4 ISBN 978-3-662-58788-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-58788-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

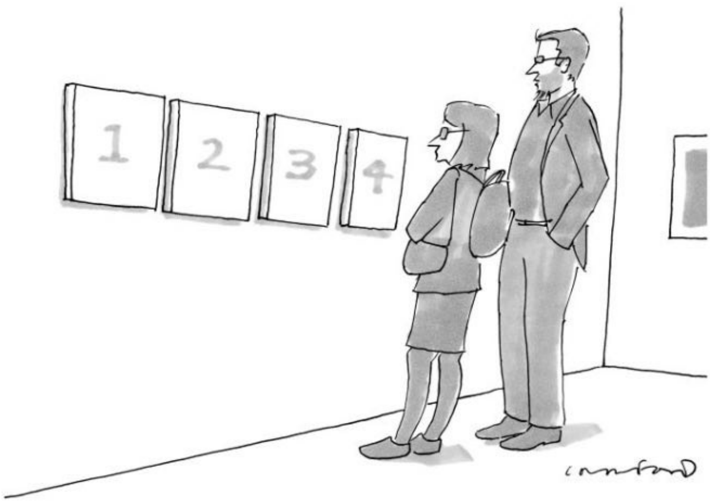
Planung/Lektorat: Annika Denkert

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Für Anneke Marika

Vorwort

Der *New Yorker* zeigte neulich einen Cartoon, in dem ein Paar in einer Gallerie vor einer Reihe von Gemälden steht und sie diskutiert. Die Gemälde hängen in einer Reihe und zeigen jeweils lediglich die Ziffern 1, 2, 3, 4, nichts sonst. Die Wand ist leer, von den Bildern abgesehen. Offenbar ist die Diskussion ernsthaft, man spürt förmlich, dass die beiden jeden Aspekt der einzelnen Zahlen erfassen möchten und in sie eindringen wollen.



“ ‘3’ is genius. We need to buy ‘3.’ ”

Dieses Buch stellt die Zahl Drei in den Mittelpunkt, wir sehen uns an, in welchen Zusammenhängen die Drei vorkommt, in der Dichtung, der bildenden Kunst, in der Musik, bei den Chinesen, als Dreiermenge und bei Fraktalen, als Fibonacci-Zahl. Das Thema ist sicher unerschöpflich, hier wird denn auch nur ein kleiner Ausschnitt präsentiert. Wir haben in jedem Fall versucht, einen Bezug zur Mathematik herzustellen, mal mehr, mal weniger, und dabei zu zeigen, dass die Mathematik keine weltabgewandte, bedrohliche, langweilige und ziemlich unverständliche Kunst ist, dass sie vielmehr zum Kern der Dinge vordringt und daher unverzichtbar ist. Dazu sollte man wohl mathematische Argumente und die Argumentation verstehen. Auch hierzu möchte dieses Buch beitragen, vergnüglich, aber ohne die notwendige Strenge zu vernachlässigen (doch, doch, Sie werden sehen, das geht).

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Buch über die Zahl Drei?

Übersicht

1.1 Gute Güte – wirklich?

Das Gedicht *Der römische Brunnen* von Conrad Ferdinand Meyer (Meyer 1928, Bd. 2, p. 99) beschreibt einen Brunnen in der römischen Villa Borghese:

> Aufsteigt der Strahl und fallend gießt
> Er voll der Marmorschale Rund,
> Die, sich verschleiernd, überfließt
> In einer zweiten Schale Grund;
> Die zweite gibt, sie wird zu reich,
> Der dritten wallend ihre Flut,
> Und jede nimmt und gibt zugleich
> Und strömt und ruht.

Der Brunnen besteht aus drei übereinander angeordneten Schalen. Meyer beschreibt den Fluss des Wassers in diesen drei Schalen, von oben nach unten. Offensichtlich muss dieser Brunnen aus drei Schalen bestehen, sonst würde das Gedicht seine Mitte und damit seinen Zweck verlieren: Stellen wir uns vor, dass eine der Schalen fehlt, so würde das Wasser einfach von oben nach unten fließen. Das Gedicht wäre gleichsam ohne inneren Kern, langweilig. Hätte man dagegen eine Schale mehr, so wäre die Schilderung auch ziemlich langweilig. Diese zusätzliche Schale würde wenig zur Poesie des Gedichts beitragen, halt eine Schale mehr, Serialisierung.

Das Beispiel zeigt, dass die Zahl „Drei“ eine interessante Rolle spielen kann: Zwei Objekte einer Anordnung können gelegentlich zu wenig sein, damit etwas im gewünschten Sinne funktioniert. Vier Objekte hingegen können zu viel sein oder die Situationen unübersichtlich gestalten. Es ist bekannt, dass Conrad Ferdinand Meyer intensiv an diesem Gedicht gefeilt hat, die hier wiedergegebene Version ist die siebte Fassung. In

E. Doberkat, *Die Drei*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-58788-1_1

den Vorgängerversionen wurden viele Dinge verändert, die Dreizahl der Schalen blieb jedoch in jedem Fall erhalten. Mag auch der originale Brunnen aus drei Schalen bestehen, es geht hier vielmehr darum, die Interaktion von drei Objekten (nicht zwei, nicht vier) in einem Gedicht zu beschreiben: Das ist der wesentliche Aspekt, den wir hier festhalten wollen.

Wir werden diese Gedanken an der einen oder anderen Stelle in diesem Buch noch verschärfen können, wenn wir sehen, dass drei exakt die Anzahl von Objekten ist, die man benötigt, um genau das zu bekommen, was man haben möchte.

Conrad Ferdinand Meyer hat übrigens mit *Plautus im Nonnenkloster* (Meyer 1928, Bd. 3, p. 124–154) eine elegante Novelle geschrieben, in der Poggio Bracciolini eine wesentliche Rolle spielt. Dieser italienische Gelehrte und Kirchendiplomat war nach Abschluss des Konzils zu Konstanz im Jahre 1417 wesentlich damit beschäftigt, Manuskripte antiker Autoren in Klöstern nördlich der Alpen aufzuspüren, ja, ihnen nachzujagen. Sein größter Erfolg war die Auffindung des Manuskripts *De rerum natura* von Lukrez (Lucretius 1973), das er in die Diskussion seiner gelehrten Zirkel in Florenz und in Rom eingebracht hat, ein Phänomen, das als der Beginn der italienischen Renaissance gefeiert wird (Greenblatt 2012). Man kann sicher darüber diskutieren, ob diese griffige, wohl auch verkaufsfördernde These den Tatsachen entspricht, schließlich ist die italienische Renaissance ein komplexes Phänomen mit vielen offenen und verborgenen Wurzeln. Die These hat aber den Vorteil, dass sie uns mitten in die Diskussion führt, die einen Teil dieses Buchs ausmacht.

Einer der wichtigen Maler der Frührenaissance, der sich gleichzeitig als Mathematiker einen Namen gemacht hat, war Piero della Francesca, der mit der *Geißelung Christi* ein Bild geschaffen hat, das auch heute noch Kunsthistorikern Rätsel aufgibt und in seiner Bedeutung alles andere als klar ist, der gleichzeitig auch die mathematischen Grundlagen der Zentralperspektive genau untersucht und aufgeschrieben hat. Es ist diese Kombination aus Mathematik und bildender Kunst, die die Beschäftigung mit Piero in dem vorliegenden Buch so attraktiv macht. Wir werden einen Blick auf dieses Bild werfen und uns gleichzeitig mit seinen mathematischen Arbeiten auseinandersetzen, sogar zeigen können, wie aus seinen mathematischen Überlegungen zur Perspektive einige zentrale Konstruktionen in diesem Bild zustande gekommen sind.

Auch als Mathematiker war Piero produktiv, eines seiner Lehrbücher war ein Traktat über den Abakus. Damit stellte er sich in die Tradition der Abakus-Bücher, die von dem wohl wichtigsten Mathematiker des Mittelalters begründet wurde, nämlich von Leonardo Fibonacci. Dieser Mathematiker ist deshalb so wichtig, weil wir ihm die Einführung arabischer Ziffern verdanken, zunächst in kaufmännische Rechnungen, dann in die alltägliche Zahldarstellung, eine damals revolutionäre Neuerung, von der wir heute noch profitieren. Eine Seitenlinie der Arbeiten von Fibonacci ist die Folge der nach ihm benannten Zahlen, die wohl zuerst in der berühmten Kaninchenaufgabe zu finden sind. Wir diskutieren diese Zahlen, wobei es uns im Rahmen dieser Darstellung um die Möglichkeiten geht, mit unendlichen Folgen von Zahlen umzugehen und kombinatorische Aufgaben zu lösen. Es geht uns also gerade nicht um einen gefälligen Zugang zum Goldenen Schnitt, der ebenfalls in diesem Kontext steht und fast reflexhaft mit Fibonacci verbunden wird. Fibonacci war Kaufmann in Pisa zu einer Zeit, in der Pisa noch im Zentrum der politischen und ökonomischen Macht auf der italienischen Halbinsel angesiedelt war. Als international tätiger Kaufmann ist er weit gereist, in die arabischen Länder, wo er die jetzt als arabisch bezeichnete indische Notation für Ziffern kennengelernt hat.

Es ist gesichert, dass Fibonacci auch einige Zeit in Palermo auf Sizilien gelebt hat. Ein Blick auf die Karte zeigt, dass Sizilien dreieckig ist, daher ist die Versuchung groß, sich Gedanken über die dreieckige Form von Sizilien zu machen. Einer handfesten Versuchung soll man nach Oscar Wilde bekanntlich nicht aus dem Wege gehen, daher verfolgen wir diesen Gedanken weiter, indem wir die Reisen des Odysseus um Sizilien näher betrachten und einige Stationen durch Zitate aus Homers *Odyssee* mit Leben füllen. Das gibt uns gleichzeitig die Gelegenheit, eingehender über einige Entwicklungen im Kontext von Sizilien zu berichten. Sizilien war in der Antike lange Zeit ein Teil von Groß-Griechenland (Magna Grecia). Auf diese Weise gerät der griechische Kulturkreis in den Blick. Hier kommt der Leserin natürlich gleich der Name Pythagoras in den Sinn, zusammen mit dem nach ihm benannten Satz. Wir werden uns mit Pythagoras zunächst im Umkreis des bekannten Theorems und seinen Folgerungen der Rationalität gewisser Zahlen befassen, wir werden dann aber auch in einem späteren Kapitel über die Bemühungen der pythagoräischen Schule berichten, Töne und Tonleitern als mathematische Objekte zu begreifen.

Aber bleiben wir noch kurz in diesem griechischen Kontext: Eine der berühmten Aufgaben der antiken griechischen Mathematik bestand darin, einen Winkel ausschließlich mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen. Dieses Problem hat die Mathematik lange beschäftigt, bis hierfür im 18. Jahrhundert eine Lösung gefunden werden konnte (nämlich ein Beweis dafür, dass es *keine* Lösung für dieses Problem gibt). Wir betrachten genau dieses Problem aus algebraischer Sicht, dazu überlegen wir, was es eigentlich mathematisch bedeutet, eine solche Aufgabe zu formulieren. Hierbei zeigen wir auch in einem Nebengedanken, dass man diese und ähnliche Aufgaben durch *Origami*, also das Falten von Papier, lösen kann. Das sieht wie ein Kinderspiel aus. Das ist es auch, es bedeutet aber manchmal mühsames mathematisches Manipulieren, wenn man nachweisen will, dass die Papierfaltungen den gewünschten Effekt haben.

Kehren wir kurz nach Italien zurück, diesem seit Jahrhunderten von ebenso sonnen- wie bildungshungrigen Reisenden durchpflügten, aber auch gelegentlich von grell agierenden Politikern gequälten und innerlich zerrissenen Land. Offensichtlich ist hier die katholische Kirche nicht zu vernachlässigen. Ihr Haupt, der Papst, hat bis vor relativ kurzer Zeit – *relativ* vor dem Hintergrund der langen Geschichte der römischen Kirche – die Tiara getragen, eine dreifache Krone, deren Entstehungsgeschichte wir kurz nachzeichnen. Ein solches Phänomen darf in einem Buch über die Zahl Drei gewiss nicht fehlen.

Wir vermerken in italienischen Zusammenhängen auch, dass mit *Tres faciunt collegium* ein Verwaltungsprinzip der Römer charakterisiert wurde, das sich als erstaunlich effektiv erwiesen hat und über dessen Wirken in der Römischen Republik vor Augustus kurz berichtet werden soll. Hierbei greifen wir gleich die Gelegenheit beim Schopf, über einige derartige Kollegien, also die Zusammenfassung von drei Einheiten zu einem Ganzen, zu berichten, sei es bei Shakespeare in seinem Drama *Macbeth*, sei es bei der Komposition mathematischer Strukturen, die gelegentlich auch gern in Dreierform daherkommen, sei es bei den Heiligen Drei Königen.

In der chinesischen Mythologie kennt man die Dreierform ebenfalls. Sie kommt in der Gestalt der *Drei Mythischen Könige* daher, sagenumwobener Gestalten, die uns ebenfalls einen gezielten Blick wert sind. Das dient dann auch als Aufhänger dafür, über einige interessante Aufgaben der chinesischen Mathematik nachzudenken und damit zu zeigen, auf welche Weise und auch vor welchem Hintergrund deren Lösungen zustande gekommen sind. Es zeigt sich, dass sich die chinesische Mathematik nicht synchron mit der europäischen entwickelt hat (das wäre auch gar nicht zu erwarten gewesen), dass vielmehr von einigen Entwicklungen in der chinesischen Mathematik zu berichten ist, die der europäischen weit voraus waren. Auf der anderen Seite ist aber durch gewisse Eigentümlichkeiten vor allem in der Notation mathematischer Objekte zu beobachten, dass manche Entwicklungen, die spätestens seit dem Barock in Europa zu verzeichnen sind, in China erst später wahrgenommen werden können. Insbesondere hat die chinesische Mathematik keine Entwicklung aufzuweisen, die zu Werkzeugen und Methoden wie etwa der Mengenlehre geführt haben.

Der Vater der Mengenlehre, Georg Cantor, stellte in einem von ihm wohl eher als nebensächlich betrachteten Gegenbeispiel eine interessante Konstruktion vor, nämlich eine Dreiermenge. Sie hat sich zu so etwas wie einem Lieblingsobjekt in der Mengenlehre und der Logik entwickelt, aber auch in der Welt der Fraktale, also der selbstähnlichen Objekte. Die Menge selbst lässt sich recht einfach konstruieren, wir werfen einen Blick auf ihre merkwürdigen Eigenschaften. Das wird uns gleichzeitig erlauben, ein wenig über unendliche Objekte nachzudenken. Auf der eher anschaulichen Seite zeigen wir an einigen Beispielen, wie solche Fraktale, also selbstähnliche Gebilde, bei denen die Unendlichkeit sozusagen schon durch die Selbstähnlichkeit eingebaut ist, zustande kommen und beschrieben werden können. Hierzu werden Programmbeispiele, die in der Programmiersprache Python formuliert sind, eingeführt, ausgeführt und diskutiert.

Ohne die Drei hätten wir wenig Freude an der Musik, ist doch der Dreiklang einer der wichtigsten elementaren Bausteine jeder musikalischen Komposition. Auch hier kann man wieder beobachten, dass die Dreizahl aus konzeptionellen Gründen zentral ist: Ein Zweiklang wäre langweilig, ein Vierklang hat gewiss seine Reize, kann aber nicht als zentraler atomarer Baustein für Kompositionen verwendet werden. Die Konstruktion solcher Dreiklänge zeigt auch interessante mathematische Eigenschaften, von denen wir einige im letzten Kapitel des Buchs aufgreifen. Wir beobachten, dass die algebraischen Strukturen, die zum Beispiel bei der Behandlung der Dreiteilung des Winkels benutzt wurden, auch hier auf natürliche Weise auftreten, so dass ihre Eigenschaften im musikalischen Kontext interpretiert werden können. Wir diskutieren auch Beispiele für Opern, in der gerade die Dreierkonfiguration unter den Handelnden das zentrale Element darstellt. Das Schlusswort gebührt J. S. Bach, dessen h-Moll-Messe sich als eine Fundgrube für den Sammler der Zahl Drei erweist.

1.2 Ein Flug über die Kapitel aus großer Höhe

Wir haben es jetzt irgendwie geschafft, von Conrad Ferdinand Meyers *Römischem Brunnen* über die Fahrten des Odysseus zu Bachs h-Moll-Messe zu gelangen. Es ist jetzt an der Zeit, eine etwas mehr ins Detail gehende Übersicht über die einzelnen Kapitel zu geben. Die Kapitel werden sozusagen in großer Höhe überflogen, um ein Panorama auszubreiten, die Details werden dann bei der Beschäftigung mit den einzelnen Kapiteln klar. Die bis auf gelegentliche Verweise voneinander unabhängigen Kapitel sind in aller Regel so konzipiert, dass sie einen mathematischen Kern haben, auf den in einer Rahmengeschichte hingearbeitet wird. Diese Geschichte dient als Aufhänger oder als Referenzpunkt für die mathematischen Entwicklungen. Eine Ausnahme bildet hier das Kapitel über die Tiara, dessen mathematischer Kern allerhöchstens in der Diskussion der Teufelszahl 666 zu finden ist.

Einige Abschnitte sind mit einem Stern versehen, sie bieten zusätzliches Material. Jedes Kapitel schließt mit einer Art *Arabeske* – arabisch als الأرابيسك geschrieben – ab, einer kleinen Randbemerkung zu Vorkommen der Zahl Drei. Sie hat mit dem Inhalt des Kapitels nicht unbedingt etwas zu tun, erscheint gleichwohl interessant oder kurios und soll den Blick weiten helfen. Im Index wird in der Regel das erste Auftreten eines Begriffs vermerkt, bei ausgiebigeren Diskussionen auch mehr; Begriffe, die im Inhaltsverzeichnis auftauchen, werden meist nicht mehr im Index aufgeführt.

Sizilien ist dreieckig

Die dreieckige Form der Insel Sizilien ist bereits durch die sizilianische Flagge offensichtlich, die ein traditionelles Symbol verwendet, die Trinakria; man findet auch die Bezeichnung Trinakia. Das ist unser Ausgangspunkt, wir zeigen auf, wie der sagenhafte homerische Held Odysseus um die Insel herumfährt. Die Dreiecksgestalt wird sichtbar, er wird beim Passieren der Straße von Messina auch mit den beiden Monstern Skylla und Charybdis konfrontiert. Das bietet uns die Gelegenheit, der Behandlung von Skylla und Charybdis in der Literatur nachzugehen, von Vergil über Erasmus bis Casanova. Wir zeigen, dass Sizilien als Teil von Groß-Griechenland auch das Symbol der

Trinakria von den Griechen geerbt hat, was uns erlaubt, zum einen die historische Entwicklung ein wenig genauer nachzuzeichnen, zum anderen aber auch die Möglichkeit zu bekommen, uns mit dem Satz des Pythagoras und einem Beweis dafür ein wenig näher vertraut zu machen. Die Brücke zu Pythagoras ist ein etwas merkwürdiger Zusammenhang zwischen den Schilden griechischer Krieger und dem großen Philosophen. Wir bleiben bei dem Symbol der Trinakria, wenn wir über antike Münzen auf Sizilien berichten, die genau dieses Symbol zeigen. Es taucht später noch einmal zu Beginn des 19. Jahrhunderts auf einer Münze auf, möglicherweise als Symbol für die Selbstständigkeit der Insel.

Das Symbol der Trinakria wird in abgewandelter Form auch an vielfältigen anderen Stellen sichtbar, was sicher daran liegt, dass es sich sich um ein altes, aus dem asiatischen Raum stammendes Symbol handelt, das auf vielfältige Arten abgewandelt wurde, ein Verwandter der Swastika unseligen Angedenkens. Wir gehen kurz auf das Drei-Hasen-Fenster in Paderborn ein, das sich aus diesem Symbol ableiten lässt, und finden die drei Hasen merkwürdigerweise dann auch auf jüdischen Friedhöfen in der Ukraine. Das ist deshalb so merkwürdig, weil der Hase in der jüdischen Tradition als unrein gilt. Aber wir gehen dann noch weiter nach Osten und sehen, dass die drei Hasen mit ihren drei Löffeln schon in einer chinesischen Höhle vor langer, langer Zeit abgebildet wurden.

Bei der Diskussion des Satzes von Pythagoras gehen wir übrigens darauf ein, dass das Pentagramm als das Symbol der Pythagoräer eine für diese peinliche Irregularität aufweist. Die Seitenverhältnisse lassen sich, ähnlich wie die Quadratwurzel aus der Zahl 2, nicht als rationale Zahlen darstellen. Wir bauen hierzu das Pentagramm mit einigen inneren Konstruktionen und geben den Programmcode dafür explizit in Python an, wie wir das auch in späteren Kapiteln tun werden, wann immer das hilfreich ist.

Dreiteilung des Winkels

Ein antikes Problem forderte dazu auf, einen vorgegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Verwendet werden dürfen nur Zirkel und Lineal. Es hat sich gezeigt, dass dieses Problem nicht allgemein lösbar ist. Hierbei muss man jedoch genau herausarbeiten, was eigentlich die ausschließliche Benutzung des Zirkels und des Lineals mathematisch bedeutet. Wir analysieren diese Fragestellung aus algebraischer Sicht und kommen hierbei in mathematisch ein wenig tieferes Gewässer, wenn wir Körpererweiterungen benötigen. Dann zeigen wir, dass das Problem nicht gelöst werden kann, wobei lediglich solche elementaren Hilfsmittel benutzt werden, die auf den Körpererweiterungen aufbauen.

Der große Mathematiker und Ingenieur Archimedes hat in der Antike eine Lösung für das Problem der Winkeldrittelung vorgeschlagen, das gilt auch für den als Playboy charakterisierten Hippias, der zweihundert Jahre früher als Archimedes das Problem mit der nach ihm benannten Kurve gelöst hat. Bei der Analyse dieser Lösungen stellt man jedoch fest, dass sie keinesfalls der strengen Beschränkung auf Zirkel und Lineal gehorchen, sondern zusätzliche Konstruktionen verwenden. Eine interessante Näherungslösung stammt von Albrecht Dürer, dieser Zugang wird dargestellt und analysiert. Es stellt sich heraus, dass sie überraschend akkurat, wenn auch nicht exakt, ist.

Man kann die Winkeldrittelung auch auf anderem Wege angehen, nämlich indem man Papier faltet, also mit der japanischen *Origami*-Technik. Das wird auch in diesem Kapitel behandelt, verblüffenderweise zeigt sich, dass man mit Origami die Kubikwurzel aus der Zahl 2, die nicht konstruierbar im Sinne unserer Körpererweiterung ist, falten kann.

Ein wichtiges Hilfsmittel in all diesen Diskussionen ist der Ähnlichkeitssatz des Euklid, der in der Regel im Geometrieunterricht der Schulen durchdekliniert wird. Wir geben einen hübschen visuellen Beweis dieses Satzes, wie er sich in einem englischen Mathematikbuch des 18. Jahrhunderts (Byrne 2017) findet.

Die Dreiermenge von Georg Cantor

Wir teilen eine Strecke in drei gleiche Teile und entfernen den mittleren Teil. Dadurch bleiben zwei Teilstrecken übrig, mit der wir die gleiche Prozedur durchführen: Sie werden jeweils in drei gleich lange Teile geteilt, der mittlere Teil wird eliminiert, so dass wir jetzt vier kleinere Teilstrecken haben. Für jede dieser Teilstrecken wird das Spiel wiederholt. Das kann man unendlich oft durchführen, auch wenn die Teilstücke immer kleiner werden. Was bleibt übrig? Bleibt überhaupt etwas übrig? Es stellt sich heraus, dass in der Tat etwas übrig bleibt, ja, dass sogar unendlich viele Elemente diesen Eliminationsprozess überleben.

Das ist eine ziemlich erstaunliche Angelegenheit. Wir analysieren diese Menge aus unterschiedlichen Gesichtspunkten. Zum einen überlegt man sich, dass diese Menge zwar unendlich viele Elemente enthält, dass aber die Gesamtlänge der resultierenden Menge gleich 0 ist. Diese Menge ist auch selbstähnlich. Schneiden wir die Menge an einer beliebigen Stelle auf und zoomen hinein. Es stellt sich heraus, dass die ursprüngliche Menge wieder erscheint. Die Menge kann also aufgeteilt werden, und die ursprüngliche Gestalt erscheint wieder! Das überlegt man sich relativ einfach, wenn man sich den Konstruktionsprozess genauer daraufhin ansieht. Wir haben gerade gesehen, dass die resultierende Menge unendlich viele Elemente enthält, aber es ist nicht ganz klar, was *unendlich* eigentlich genauer bedeutet. Der Begriff der Unendlichkeit hat bekanntlich Philosophen, Theologen und Mathematiker seit einigen zweitausend Jahren intensiv beschäftigt.

Durch die Arbeiten von Georg Cantor, auf den auch die gerade konstruierte Menge zurückgeht, wird der Begriff der Unendlichkeit mathematisch klarer gefasst. Wir diskutieren einige Aspekte dieses verwirrenden Begriffs und sehen uns Mengen an, die genauso viele Elemente wie die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ haben. Damit sind wir bei einem anderen merkwürdigen Begriff, nämlich „genauso viel Elemente“; auch das muss präzisiert werden. Diese Art der Unendlichkeit ist schon ziemlich groß, wie man sich leicht vorstellen kann; wie groß er ist, zeigen wir an Hilberts Hotel, einer beliebten Geschichte des großen Göttinger Mathematikers David Hilbert. Aber solche unendlichen Mengen sind noch nicht groß genug. Es gibt noch größere Mengen, die also, wenn man das so ausdrücken kann, noch unendlicher sind. Das scheint der Anschauung vollständig zu widersprechen. Wir berichten über Georg Cantors sehr nützliche Konstruktion, mit der man diesen Aspekt mathematisch besser in den Griff bekommt. Dieses Vorgehen ist als Cantors Diagonalverfahren bekannt.

Dann ist es aber auch gut mit der Betrachtung von unendlichen Mengen, wir kommen wieder auf die Selbstähnlichkeit der Cantor-Menge zurück und malen einige interessante selbstähnliche Konstruktionen. Hierzu bemühen wir die für Kinder gedachte Programmiersprache LOGO und zeigen, wie die Schildkröte von LOGO in der Python-Variante selbstähnliche Mengen zeichnen kann. Der Programmcode für die Beispiele wird angegeben und ausgiebig diskutiert.

0, 1, 1, 2, <u>3</u>, 5, . . . ,

Neulich berichtete die italienische Tageszeitung *La Repubblica* über den Vorschlag eines offenbar mit schwarzem Humor begabten Bloggers, in italienischen Schulen arabische Zahlen zu benutzen. Die Reaktionen unterboten lässig jedes Niveau. Es war offenbar nicht so recht bekannt, dass arabische Zahlen seit gut achthundert Jahren zumindest in Italien im Gebrauch sind. Der Mathematiker Leonardo Fibonacci hat sie im dreizehnten Jahrhundert aus dem arabischen Sprachraum mitgebracht. Er wies überzeugend nach, dass die Verwendung arabischer Ziffern wesentlich praktischer ist als die bislang benutzte Schreibweise mit römischen Ziffern (versuchen Sie doch einmal, das Produkt CMDXI $\cdot$ LVII zu berechnen). Der Name Fibonacci wird oft mit dem Goldenen Schnitt verbunden. Sieht man sich den Goldenen Schnitt genauer an, so findet man die im Hintergrund lauernden Fibonacci-Zahlen. Sie sind so konstruiert, dass jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger ist. Diese Zahlen lassen sich ganz gut durch das Vermehrungsverhalten von Kaninchen charakterisieren. So sind sie auch entstanden, denn Fibonacci hat in einem seiner Lehrbücher die berühmte Kaninchenaufgabe gestellt, die wir natürlich auch diskutieren

Aber es ist uns nicht um den Goldenen Schnitt zu tun, sondern um die Folge der Fibonacci-Zahlen. Wir wenden diese Zahlen hin und her und zeigen, dass man diese unendliche Folge in einer einzigen mathematischen Entität, nämlich ihrer erzeugenden Funktion, repräsentieren kann. Kennen Sie die erzeugende Funktion einer Folge, so kennen Sie, im Prinzip jedenfalls, auch die einzelnen Zahlen. Dieses interessante

Phänomen wird weiter beleuchtet, wir sehen uns die erzeugenden Funktionen einiger Folgen an und zeigen auch, wie man die Folge aus der erzeugenden Funktion wieder extrahieren kann. In diesem Sinn ist die erzeugende Funktion die Wäscheleine, an der man die einzelnen Zahlen aufhängen kann.

Das ist jetzt alles gut und schön, mag sich die Leserin denken, was kann ich denn jetzt damit anfangen? Die Auskunft, dass erzeugende Funktionen ein wichtiges Hilfsmittel in der mathematischen Disziplin der Kombinatorik sind, mag den Leser vielleicht nicht überzeugen. Wenn wir aber ein konkretes Problem hernehmen, so sieht es schon anders aus: Wir zeigen, wie man das Problem des Geldwechselns mit erzeugenden Funktionen lösen kann. Das Problem sieht so aus: Sie sind mit einem Vorrat von Münzen ausgestattet, auf wie viele Arten können Sie denn einen gegebenen Geldbetrag aus den Münzen zusammensetzen? Das Beispiel ist ziemlich illustrativ, es hat aber den üblichen Defekt von Beispielen aus einem Lehrbuch, nämlich unrealistisch zu sein (wann hat man schon einen unbegrenzten Vorrat von Münzen in der Tasche?). Auf der anderen Seite muss man wohl gelegentlich betonen, dass die mathematische Behandlung von Problemen aus dem täglichen Leben in der Regel den Rahmen einer überschaubaren schriftlichen Darstellung sprengt. Durch die Realität sind nämlich in aller Regel Nebenbedingungen vorhanden, die meist nur mit großem Aufwand mathematisch modelliert werden können. Die Leserin kann sicher gelegentlich überlegen, was das für die Forderungen an den Mathematikunterricht in der Schule bedeutet, lebensnahe Anwendungen zum Inhalt zu haben.

Drei Kronen, alle anderen zu beherrschen

Ein Buch, das sich mit der Zahl Drei befasst, darf die Tiara, also die dreifache Krone des römischen Papsts nicht ignorieren. Der damit verbundene mathematische Inhalt ist leer, gleichwohl diskutieren wir aus Gründen der Vollständigkeit das Zustandekommen dieses merkwürdigen Phänomens. Wir versuchen, die Entstehung dieses Symbols historisch nachzuvollziehen. Durch viele Machtkämpfe zwischen dem Oberhaupt der römisch-katholischen Kirche und den französischen Königen einerseits und den deutschen Kaisern andererseits hat sich das machtpolitische Profil dieses Amts geschärft. Das wurde durch die Einführung der dreifachen Krone manifestiert.

Wie so oft hat ein Machtsymbol auch eine Semantik im zugrunde liegenden Gültigkeitsbereich. Das ist mit der Tiara nicht anders, sie hat eine theologische Semantik, die freilich nicht ganz einfach herauszubringen ist. Wir folgen hier der theologischen Dissertation von B. Sirch (Sirch 1975), um diese Semantik nachzuzeichnen. Schließlich gehen wir kurz exemplarisch auf mit der Tiara verbundene Verschwörungstheorien ein: Die Verbindung zwischen Tiara und der sogenannten Teufelszahl würde im Englischen als *Bollocks!* kommentiert werden.

Piero della Francescas *Flagellazione di Cristo*

Piero della Francesca war ein führender Maler der Frührenaissance, der auch als Mathematiker hervorgetreten ist. Im Rahmen seiner Arbeiten hat er die Zentralperspektive geometrisch erforscht und diese mathematischen Überlegungen auf die Konstruktion seiner Bilder angewandt. Das kann handfest nachgewiesen werden, zum Beispiel an einem nicht ganz uninteressanten Detail, nämlich der Fußbodenkonstruktion in der *Geißelung Christi*, dem Bild, mit dem wir uns in diesem Kapitel befassen werden.

Zu diesem Bild gibt es viele Fragen: Es ist nicht klar, in wessen Auftrag Piero das Bild gemalt hat, es ist nicht klar, was dieses Bild aussagen soll, es ist nicht klar, wo das Bild ursprünglich aufbewahrt wurde. Aus diesem Dunstkreis von offenen Fragen hat sich seit den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts eine eifrige Industrie entwickelt, die Interpretationen für dieses Bild liefert. Unser Interesse an diesem Bild kommt dadurch zustande, dass wir im Vordergrund drei Männer stehen sehen, deren Bedeutung für das Bild, das ja einen zentralen Aspekt der Leidensgeschichte Christi darstellt, vollständig unklar ist, während das eigentliche Geschehen der Geißelung in den Hintergrund gedrängt wird. Wir geben einen Überblick über einige der Interpretationen, geben jedoch keine eigene. Da wir nicht alle zweiundvierzig vorliegenden Interpretationen diskutieren können, konzentrieren wir uns auf vier. Wir geben auch einen kurzen Abriss für einige Interpretationen, die nicht behandelt werden konnten, die jedoch von Interesse zu sein scheinen. Das Spektrum der Interpretationen ist breit, es reicht von der ostasiatischen Mystik über die Konstruktion einer Mordgeschichte bis hin zu verborgenen Botschaften in einem Astrolabium.

Die Zeiten, in denen Piero gearbeitet hat, waren turbulent, das zentrale Ereignis der Zeit war die Eroberung Konstantinopels durch die Türken und damit die endgültige Auflösung des Byzantinischen Reiches; das geschah im Jahre 1453. Dieses Ereignis bewirkte Aktivitäten auf vielen politischen Bühnen in Italien, sei es in der katholischen Kirche, sei es in den Fürstentümern, die mit dem Kirchenstaat verbunden oder untereinander gegen die Kirche verbunden waren (kurz hintereinander aufgenommene Momentaufnahmen können da unterschiedliche Bilder liefern). Diese Aktivitäten waren nicht nur politischer Art, sie strahlen auch auf die bildende Kunst aus, so dass es kein Wunder ist, dass einige Interpretationen dieses Bildes einen recht engen Zusammenhang zwischen der Eroberung Konstantinopels mit dem daraus resultierenden Zustand der christlichen Kirche des Byzantinischen Reiches und dem Bild von Piero sehen. Um diesen Zusammenhang besser ausleuchten zu können, gehen wir auf die politische Situation in der Mitte des fünfzehnten Jahrhunderts in Italien ein.

Wir berichten auch kurz über das wenige, was über die Biographie des Malers bekannt ist, und zeigen auf, wie seine mathematischen Arbeiten seine Gestaltung des Bilds beeinflusst haben. Hierzu ist es nötig, ein wenig über die mathematischen Interessen von Piero zu berichten, die sich bei Weitem nicht auf geometrische Fragestellungen beschränkt haben. Seine mathematischen Lehrbücher geben auch hier bereitwillig Auskunft.

Tres faciunt collegium

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Kollegien, die aus drei Einheiten zusammengesetzt sind. In der Regel sind diese Einheiten Personen, es kann aber auch sinnvoll sein, diesen Begriff mit abstrakten Entitäten zu füllen, zum Beispiel dann, wenn wir Strukturen in der Mathematik betrachten, die gerade aus drei miteinander agierenden Komponenten zusammengesetzt sind.

Die Überschrift des Kapitels deutet darauf hin, dass es sich um ein von den Römern übernommenes Prinzip handelt, nämlich dass drei Leute eine Arbeitsgruppe bilden. Nach diesem Prinzip waren in der Römischen Republik einige Gremien zusammengesetzt, die wichtige Arbeiten zu verrichten und wichtige Entscheidungen zu treffen hatten (dabei soll nicht verkannt werden, dass die drei in Rede stehenden Personen von einer Vielzahl von Helfern, die meist Sklaven waren, unterstützt wurden). Wir befassen uns kurz mit diesem historischen Hintergrund und zeigen dabei auch, woher dieser Ausspruch kommt.

In einem kleinen Ausflug machen wir dann die Annahme, dass es sich nicht um Personen, sondern um Abstrakta handelt, die zu einer Dreierkonfiguration zusammengesetzt werden. Das fängt beim Dreisatz an, der, in der Schule gelehrt, immer noch von vielen Erwachsenen gefürchtet wird. Das Vorgehen wird mit Scheherazades Hilfe weiter ausgesponnen, wenn man abstraktere Strukturen aus einfacheren Komponenten zusammensetzt. Es geht hierbei nicht nur um die Zusammensetzung allein (ähnlich wie es nicht nur darum geht, einfach drei Personen an einen Tisch zu setzen), es geht auch darum, die Interaktion zwischen diesen Strukturen genauer zu beschreiben. Wir zeigen das zunächst am Beispiel von arithmetischen Maschinchen, also solchen Gedankenexperimenten, mit denen man die einfachen arithmetischen Operationen durchführen kann. Die setzen wir zusammen und kommen dann zu abstrakteren Gebilden, nämlich zu Monoiden, und gehen dann sogar noch ein bisschen weiter in die abstrakte Mathematik. Dabei versäumen wir nicht die Gelegenheit, die von Altmeister Goethe angestrengte Analogie zwischen Mathematikern und Franzosen geradezurücken.

Wenn man drei Objekte zusammensetzt, so brauchen diese Objekte nicht unbedingt handfest in der Wirklichkeit zu existieren. Das ist in der Mathematik so, das kann aber auch an ganz anderer Stelle so sein, nämlich im Bereich der religiösen Sagen und Mythen. Wir beschäftigen uns kurz mit der Geschichte der Heiligen Drei Könige. Ihre Existenz ist weder biblisch noch irgendwie historisch belegt, sie haben gleichwohl eine große Wirkungskraft entfaltet, weil ein treibender Mythos dahintersteckt. Wir verfolgen die Geschichte dieser religiösen Manifestation in einigen Verästelungen.

Eine andere berühmte Dreierkonfiguration findet sich in Shakespeares berühmtem Drama *Macbeth*, das gleich mit einer Szene für drei Hexen eröffnet wird. Diese Hexen agieren als das Schwungrad, mit dem das Drama in Atem gehalten wird, und wir zeigen auf, wo dieser Schwung herkommt und wie er sich im Drama selbst manifestiert.

Wenn auch drei Personen eine Gruppe bilden, so kann es vorkommen, dass die dritte Person gar nicht erst anwesend sein muss. Das zeigen wir am Beispiel zweier Holzschnitte des englischen Satirikers Hogarth, in dessen Geschichte zwar drei Personen eine Rolle spielen, an der entscheidenden Stelle die dritte Person jedoch fehlt, gleichwohl kommt die intendierte Übereinkunft zustande. Hierbei folgen wir der Interpretation, die der Göttinger Physiker und Spötter Lichtenberg gegeben hat.

Drei Chinesen mit nem Kontrabass …

In der chinesischen Geschichte spielen drei mythische Könige eine große Rolle. Von ihnen wird gesagt, dass sie wesentliche Bestandteile der chinesischen Zivilisation ins Leben gerufen, erfunden oder weiterentwickelt haben; sie werden auch heute noch verehrt und – was ihr Weiterleben unwiderleglich demonstriert – sie sind Hauptpersonen diverser chinesischer Videospiele. Wir erzählen von diesen Königen, ihren Taten und auch davon, wie sie mit Drachen interagiert haben, nicht so sehr, wie wir es etwa mit Siegfried und dem Drachen gewöhnt sind, sondern auf vielfältigere und konstruktivere Art und Weise. Wir klassifizieren hierzu die Drachen, die nicht einfach nur Drachen sind und interessant aussehen, sondern vielmehr einige alltägliche Aufgaben unterstützen oder diese Aufgaben im täglichen Leben symbolisieren.

Das ist der Aufhänger für einige Schilderungen aus der chinesischen Mathematik, die sich ja unabhängig von der abendländischen Mathematik entwickelt hat und durch andere Ansätze und Lösungen zur Blüte gekommen ist. Wir diskutieren einige interessante Aufgaben, die sich in alten chinesischen Mathematikbüchern finden, und lösen diese Aufgaben mit den Methoden, die in den Quellen geschildert werden, freilich in unsere Sprache übertragen. Meister Suns Problem sei besonders herausgehoben, es führt zu dem, was in der Algebra und der Algorithmik als der Chinesische Restsatz bekannt ist und außerordentlich interessante Anwendungen zum Beispiel in der Computerarithmetik hat.

Wir sind erstaunt, mit welcher methodischen Vielfalt die chinesischen Mathematiker gearbeitet haben, aber auch, dass die Verwendung von Symbolen in dieser Mathematik vollständig fehlt. Das hat dann vielleicht zu einem Stillstand der Entwicklung im Vergleich mit der europäischen Mathematik seit dem Barock geführt. Leider fehlt uns hier die Möglichkeit, über die außerordentlich spannenden Errungenschaften der chinesischen Astronomie zu berichten, die in der Mathematik eigene Wege gegangen zu sein scheint.

Dreiklänge und andere Harmonien

In der Musik wimmelt es nur so von Vorkommen der Zahl Drei. Man denke an den Dreivierteltakt, Trios, dreisätzige Konzerte und so weiter und so fort. Es ist also nicht so einfach, hier eine Auswahl zu treffen.

Was wäre aber unsere europäische Musik ohne Dreiklänge, die mit Fug und Recht als Grundbausteine der Musik bezeichnet werden? Bausteine, mit denen man auf verschiedene Arten arbeiten kann, die man umstellen kann, die man feilen, polieren oder auch kombinieren kann. Daher beginnen wir unsere Diskussion über die Drei in der Musik mit Dreiklängen, wir müssen sogar ein wenig früher anfangen und schreiben erst einmal Tonleitern auf, um die Noten fest in den Griff zu bekommen. Hier ergibt sich gleich eine Aufgabe zur Klassifikation, denn Tonleitern kommen nicht nur einfach so daher, sie werden in Dur- und Moll-Tonleitern unterschieden, innerhalb dieser Unterscheidung ist jeweils der Grundton wichtig. Es ergibt sich hieraus ein Instrumentarium, das zwar elementar ist, dass man aber handhaben muss, wenn man über Musik sprechen will.

Daraus bauen wir dann Dreiklänge, wir zeigen, wie diese Dreiklänge klassifiziert werden und was man mit ihnen anstellen kann. Damit kommen wir dann zu einer interessanten mathematischen Beschreibung solcher Dreiklänge, indem wir den Quintenzirkel konstruieren und damit ein wenig herumspielen. Dieser Quintenzirkel gibt unmittelbar einen historischen Bezug zu Pythagoras und seiner Schule, denn die zugrunde liegenden Ideen wurden im Wesentlichen von den Pythagoräern entwickelt. Wir verfolgen jedoch zunächst eine andere Straße, die der Überlegung folgt, dass sich Dreiklänge in einer Restklassengruppe, denen wir mathematisch bei der Behandlung chinesischer Probleme begegnet sind, darstellen lassen. Die Manipulation der Dreiklänge ergibt interessante Transformationen in dieser Restklassengruppe und in ihren Untergruppen. Nimmt man dann noch einmal den Grundgedanken von Pythagoras auf, so gelangt man systematisch zu Tonnetzen, einer Konstruktion, die der große Leonhard Euler vorgeschlagen hat, als er sich mit den mathematischen Grundlagen der Musik befasste.

Wir machen den Schritt von einzelnen Akkorden zu größeren Musikstücken und überlegen, was man mit einer vorgegebenen einfachen Melodie eigentlich alles machen kann: Man kann sie umkehren, transponieren, invertieren und allerhand andere Dinge mit ihr anstellen. An einigen Beispielen werden solche musikalischen Transformationen durchgeführt und erläutert, wobei die Transformation und nicht so sehr ihre algebraische Realisierung im Vordergrund stehen.

Von einzelnen Melodien zu Opern. Die Opernliteratur als recht vollständiger Katalog (zwischen-)menschlichen Verhaltens bietet ein reiches Spektrum, aus dem man Dreierkonfigurationen unter den handelnden Personen extrahieren kann. Wir tun das bei vier ausgesuchten Opern, vier Sandkörnern am weiten Strand der Opernliteratur, gewiss, aber doch geeignet, den Grundgedanken zu erläutern. Den Abschluss der Diskussion bildet eine Betrachtung über die h-Moll-Messe von Johann Sebastian Bach, in der sich eine Vielzahl von Dreierstrukturen findet. Sie dienen musikalisch dazu, die theologischen Grundgedanken der Messe mit musikalischen Mitteln zu verdeutlichen.

1.3 Danksagungen

Das vorliegende Buch verdankt mehr, als das Auge sehen kann, meinem Kollegen Heinz-Wilhelm Alten, dessen Projekt zur Mathematikgeschichte, zum Beispiel durch die Übersichten (Alten et al. 2003; Scriba und Schreiber 2000), zudem einige wichtige Anregungen geliefert hat. Ständige freundschaftliche, kollegiale und kritische Begleiter waren – und bleiben hoffentlich – Eugenio G. Omodeo und Herrmann Stever, stets zu Diskussionen aufgelegt, stets bereitwillig zur Hilfe mit Rat und Tat.

Pfarrer Arno Lohmann und Rabbiner Michel Birnbaum Monheit halfen mir, die Hasensymbole auf dem Friedhof zu Satanov zu verstehen, Grazia Nicotra ließ mich nicht im Stich, als ich vor gewundenem Gelehrten-Italienisch kapitulieren wollte. Mit Udo Schwarz konnte ich mich erfreulicherweise in langen Diskussionen nicht auf einen gemeinsamen Kunstbegriff einigen, als wir über Pieros Bild sprachen, erfreulich deshalb, weil wir das weiter diskutieren können. Laura Tiego führte mich sicher und geduldig vor gut zehn Jahren durch das faktengesättigte und anregende Buch (Ronchey 2006). Ein Gespräch mit Roswitha und Karl-Friedrich Herkenrath über Briefmarken führte dazu, die Sachsendreier als Arabeske aufzunehmen. Chunlai Zhou und Yixiang Chen gaben mir in Peking bzw. Schanghai großzügig ihre helfende Hand. Mein verstorbener Kollege Horst Wedde regte an, dass ich mich mit der Bach-Biographie von Albert Schweitzer (Schweitzer 1947) befasse; Mechthild von Schoenebeck und Burkhard Sauerwald gaben viele Anregungen zum musikalischen Teil.

Aber was immer schief oder unvollständig dargestellt ist, sollte auf mein Konto geschrieben werden.

Das Buch wurde beim Springer-Verlag von Annika Denkert und Carola Lerch betreut, die Zusammenarbeit war ausgesprochen angenehm und hilfreich. Martina Wiese (Wiese Transdukt) las mikroskopisch genau Korrektur und gab mir dabei viele freundliche Anregungen; Jutta Koßmann ließ dem Emeritus, der Infrastruktur eines Lehrstuhls ledig, freundlich, prompt und aktiv die Unterstützung des Dekanats zuteilwerden. Allen sei herzlich für ihre bereitwillige Hilfe und für ihre Geduld gedankt.

Das Buch aber und alles andere ist nur möglich durch die verständnisvolle Liebe und Geduld meiner Frau Gudrun.

Anneke, 3 ist aber doch die *vierte* natürliche Zahl!

Jeder Logiker weiß, dass 3 die vierte natürliche Zahl ist, denn mit der leeren Menge $\emptyset$ baut man das Zahlensystem seit G. Frege so auf:

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$$

Und so ist dieses Buch über die Zahl 3 unserem vierten Enkelkind Anneke gewidmet. Ich hoffe, Anneke hat später beim Lesen des Buchs so viel Vergnügen wie ich in den letzten beiden Jahren beim Schreiben.

Bochum, Palermo und Peking, im Herbst 2018
Ernst-Erich Doberkat

2 Sizilien ist dreieckig

Übersicht

Wir folgen den Irrfahrten des Odysseus nach Sizilien und um die Insel und versuchen so, die Dreiecksgestalt erfahrbar zu machen und die sagenhaften Erlebnisse des homerischen Helden mit diesem Dreieck zu verknüpfen. Der sprichwörtlichen Skylla und Charybdis widmen wir einen kurzen Blick und zeigen, dass sich diese Meerenge in mannigfachen Zusammenhängen in der Literatur findet, von Casanova bis zur Auseinandersetzung zwischen Erasmus und Luther. Sizilien aber ist natürlich mehr als nur ein Zwischenhalt auf der Sehnsuchtsreise des Odysseus. Die Gestalt der Insel findet sich in ihrer Flagge wieder, die ihre eigene Geschichte hat, und natürlich in ihren Münzen, die wir uns etwas näher ansehen. Vorher aber schlagen wir eine Brücke zum legendenumwobenen Pythagoras und seinem Theorem, aber auch seinen Bemühungen um die Kommensurabilität von Zahlen, die sich im Pentagramm seiner Jünger beweisbar nicht wiederfindet. Schließlich analysieren wir die Dreigestalt geometrisch und landen – bei den drei Hasen, was uns zu einer kurzen Fahrt von Paderborn über die jüdischen Friedhöfe in der Ukraine zu den Magao-Höhlen in China führt.

E. Doberkat, *Die Drei*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-58788-1_2

2.1 Trinakria

Der Weg zum berühmten Teatro Antico in Taormina führt durch die enge Via Teatro Greco an Läden vorbei, die dem Bedürfnis von Touristen nach preiswerter persistenter und kompakter Speicherung ihrer Erinnerungen nachkommen. Sie bieten Souvenire an, die spezifisch für den Ort oder die Insel sind. Einer dieser Läden, kurz vor der Via Timoleone, führt neben einem reichen Angebot von Varianten des *teste di moro* (der Kopf des Mohren), den man hier im Osten der Insel besonders häufig sieht und der in vielen Größen angeboten wird, auch Tonfiguren. Ein Typ fällt besonders auf und weckt meine Neugierde (Abbildung 2.1, links). Es ist ein Gorgonenhaupt. So wie eine Nabe im Zentrum eines Rades von Speichen umgeben wird, so ist das Haupt Mittelpunkt von drei am Knie geknickten, in dieselbe Richtung laufenden Beinen, eine Trinakria oder Triscele. Die freundliche Verkäuferin in diesem Laden erzählt mir auskunftsfreudig und beredt die arg blutrünstige Geschichte der tragischen Liebe, für die die *teste di moro* stehen, vielleicht auch ihre persönliche Variante, während sie mir die Triscele einpackt. Zwei kleineren Tonköpfen von Odysseus und von Nausikaa konnte ich auch nicht widerstehen – als der schiffbrüchige Odysseus Nausikaa zum ersten Mal begegnet, spricht er sie an (*Odyssee* VI, 160–167)[1]:

> Denn ich sahe noch nie solch einen sterblichen Menschen,
> Weder Mann noch Weib! Mit Staunen erfüllt mich der Anblick!
> Ehmals sah ich in Delos, am Altar Phöbos Apollons,
> Einen Sprößling der Palme von so erhabenem Wuchse.
> Denn auch dorthin kam ich, von vielem Volke begleitet,
> Jenes Weges, der mir so vielen Jammer gebracht hat!
> Und ich stand auch also vor ihm und betrachtet' ihn lange
> Staunend; denn solch ein Stamm war nie dem Boden entwachsen.
> Also bewundre ich dich und staun und zittre vor Ehrfurcht.

Odysseus wird uns gelegentlich hier begegnen und beschäftigen.

Man findet die Triscele aber auch an anderer Stelle, wie etwa in Abbildung 2.1, rechts auf einer antikisierenden Darstellung. Auch hier zeigt sie das Gesicht der Medusa. Die Triscele ist ein offizielles Symbol der Region Sizilien (Abbildung 2.2), das Gesetzblatt

[1] Gemeint ist: Gesang VI der *Odyssee*, Verse 160–167, zitiert nach (Homer 1990). Ich lasse im folgenden den expliziten Bezug auf die Odyssee weg, würde also obiges als „VI, 160–167" zitieren.

Abb. 2.1 Triscele aus Ton und auf einer sizilianischen Münze

Gazetta Ufficiale della Regione Sicilia der Region Sizilien legt im Gesetz Nr. 4 vom Januar 2000, Abschnitt 1 fest, dass die Flagge der Region die Triscele enthält. Das Gesetz enthält auch einen Hinweis, wie sie auszusehen hat: „La bandiera della Regione è formata da un drappo di forma rettangolare che al centro riproduce lo stemma della Regione siciliana, raffigurante la Triscele color carnato con il gorgoneion e le spighe, come individuato all'articolo ....“

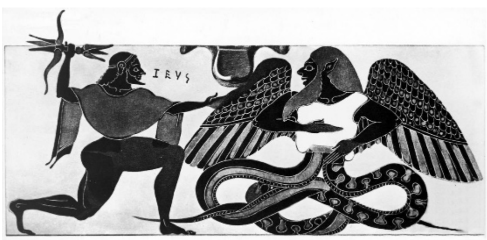
Das Wort Triscele (oder Triskele) bedeutet dreibeinig, in der Heraldik ist auch die Version *Triqueta* geläufig. In etwas ungenauer Sprechweise wird auch die heraldische Bezeichnung *Trinakria* verwendet, womit ein in drei gleichläufige Beine eingebettetes Gorgonenhaupt bezeichnet wird. Wir werden diese Bezeichnungen parallel benutzen, weil es uns hauptsächlich um die Verwendung dieses Symbols für Sizilien zu tun ist.

Offensichtlich stellt die Triscele oder Trinakria eine Abstraktion der Dreiecksgestalt der Insel dar, die durch diese drei Punkte gegeben ist: Im Westen vom Kap Lilibeo bei Marsala, im Süden Kap Passero in der Nähe von Siracusa und im Osten das Kap Peloro bei Messina. Das zeigt die Karte in Abbildung 2.3 im Überblick. Diese Dreiecksgestalt war natürlich schon in der Antike bekannt. Sie wurde von Ovid in seinen Metamorphosen als Hinweis auf das Grab des Giganten Typhoeus inter-

Abb. 2.2 Flagge der Region Sizilien

Abb. 2.3 Sizilien als Dreieck

pretiert. Typhoeus war nicht gerade lieblich anzuschauen, er soll hundert Drachenköpfe gehabt haben, alle mit schrecklichen Stimmen, und Schlangenbeine. Sein Name wurde mit einer asiatischen Komponente amalgamiert zu *Taifun.* Beim Aufstand der Götter, als es bald nach Erschaffung der Welt um die Macht im Olymp geht, wird er von Zeus (andere sagen, von Athene) vernichtet. Die Briefmarke zeigt den tödlichen Schlag des Zeus mit seinem Blitz. Ovid beschreibt es so: „Die mächtige Insel Sizilien wurde auf den Leib eines Giganten geschmettert und lastet schwer auf Typhoeus … Zwar müht er sich ab und ringt oftmals darum, sich erneut zu erheben, doch seine Rechte liegt unter Italiens Vorgebirge Peloros, die Linke, Kap Pachynos unter dir. Du, Lilybaion, hältst seine Beine, und sein Haupt drückt der Ätna nieder, aus dem er, hingestreckt, einen Steinhagel sendet und Feuer speit … Oft bemüht er sich, die Erdlast abzuwerfen und Städte und hohe Berge von seinem Leib zu schleudern“ (Ovidius Naso 1989, Verse 345–355). Die hier verwendete Übersetzung von G. Fink macht aus *insula Trinacris* im Deutschen *die mächtige Insel Sizilien.* Es sei vermerkt, dass der bekannte kulturhistorisch orientierte Reiseführer von E. Peterich diese Beziehung zwischen Dreiecksform und der Trinakria – „dieses ebenso seltsame wie peinliche Wappenschild …“ – für nicht überzeugend hält (Peterich 2002, p. 507).



Die sagenhafte Bedeutung der Insel wird auch in den Fahrten des Odysseus angedeutet. Man findet in Büchern oder in Filmen Überlegungen, welche Route denn wohl diese mythenumwobene Reise genommen hat, ohne zu einem schlüssigen Ergebnis zu kommen; U. Eco fasst einige Vermutungen über die Reiseroute zusammen (Eco 2013, Kap. 3). Es gibt einige Hinweise auf Stationen in Sizilien, denen wir jetzt nachgehen.

Der schwer zu widerstehende Sog der Erzählung wirft uns mitten in die Geschichte hinein.

2.2 Odysseus fährt im Dreieck

Nach der Niederlage Trojas und der Zerstörung der Stadt wollte Odysseus, Herrscher über die Insel Ithaka, nach Hause zurückkehren, zu seiner Frau Penelope und seinem Sohn Telemachos. Ithaka liegt östlich von Patras im Ionischen Meer, ist also von Troja nicht auf direktem Seeweg zu erreichen. Anderen trojanischen Helden wie etwa Agamemnon war die Rückkehr nicht besonders gut bekommen, und auch Odysseus wird seinen Weg nicht geradewegs nach Ithaka finden. Er sammelt seine Schiffe, zwölf an der Zahl, und seine Mitstreiter aus Ithaka, „Gefährten“ genannt, und fährt los. Er wird als einziger in Ithaka ankommen, ohne Schiff und ohne Gefährten. Das wird nun von Homer nicht gerade linear erzählt: Mit dem Begriff der *Odyssee* verbindet man ja auch nicht gerade eine vorhersehbare, ohne Komplikationen verlaufende Reise zwischen zwei Punkten. Es kommt immer wieder zu Unterbrechungen, zu Reisekatastrophen, zu unvorhergesehenen Gastaufenthalten und zu gefährlichen Begegnungen. Einige dieser Singularitäten berühren Sizilien, und davon soll jetzt die Rede sein.

2.2.1 Polyphem und die *Isole dei Ciclopi*

Da ist die Episode mit Polyphem im neunten Gesang. Polyphem ist ein Zyklop, also ein ziemlich wilder Geselle. Zunächst besucht Odysseus die – nach den nachvollziehbaren Ortsangaben der Odyssee – an der Nordküste Afrikas beheimateten Lotophagen, die den Gefährten Lotos zu essen geben (IX, 94–98):

> Wer nun die Honigsüße der Lotosfrüchte gekostet,
> Dieser dachte nicht mehr an Kundschaft oder an Heimkehr,
> Sondern sie wollten stets in der Lotophagen Gesellschaft
> Bleiben und Lotos pflücken und ihrer Heimat entsagen.

Doch danach reißt er die Gefährten mit Gewalt los aus ihrer paradiesischen und gefährlichen Stimmung des *dolce far niente*, sie fahren los („und schlugen die graue Woge mit Rudern“, IX,104) und gelangen zum Land der wilden, gesetzlosen Zyklopen (Mondi 1983), die als, wir würden heute sagen, extreme Individualisten leben, um den Rest der Welt wenig bekümmert. Sie sind des Schiffbaus oder der Seefahrt nicht kundig, auch wenn die Landschaft sie mit einem sicheren Hafen begünstigt. Hier lagern die Gefährten, auf einer kleinen Insel bemerken sie Ziegen, die sie erlegen. Als Odysseus