Luis Cornelio Recalde
Gabriela Inés Arbeláez
(Compiladores)

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

Universidad del Valle

Programa Editorial

El presente texto es uno de los productos de un proyecto de investigación aprobado por Colciencias y la Universidad del Valle, realizado entre enero de 2005 y abril de 2008 bajo el título de “La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes”. La iniciativa de producir este texto surge de la necesidad de proponer a la comunidad de educadores matemáticos de secundaria y universidad de la región una opción complementaria para el trata-miento de los números reales a nivel escolar. Específicamente se plantea la posibilidad de incorporar, desde una visión amplia del campo de la Educación Matemática, las dimensiones históricas, epistemológicas y filosóficas relativas al concepto número real, dentro del conjunto de posibles estrategias que permitirían una mejor apropiación de dicho concepto tanto de los profesores en general como de los estudiantes de la Educación Media y primeros años de universidad. El carácter interdisciplinario de este trabajo de investigación está respaldado por la participación de dos grupos de investigación: el Grupo de Historia de las Matemáticas y el Grupo de Educación Matemática, ambos de la Universidad del Valle.

Universidad del Valle

Programa Editorial

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

E&P
Colección Educación y Pedagogía

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO MATEMÁTICO

Una perspectiva histórico-epistemológica

Luis Cornelio Recalde
Gabriela Inés Arbeláez
(Compiladores)

E&P
Colección Educación y Pedagogía

Recalde, Luís Cornelio

Los números reales corno objeto n1aten1ático: una perspectiva histórico epistemiológica / Luis Cornelio Recalde, Gabriela Inés Arbeláez.--Santiago de Cali: Editorial Universidad del Valle, 2011.

236 p.; 24 cm. - -(Ciencias Naturales y Exactas)

1.Núrneros reales -Historia 2. Funciones algebraicas -Historia 3. Teoría de los números - Historia 4. Matemáticas -- Historia J. Arbeláez, Gabriela Inés I I. Tít. III. Serie

512.72 cd 22ed.
A1306524

CEP-Banco de la República. Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle
Programa Editorial
Título: Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica
Compiladores: Luis Cornelio Recalde, Gabriela Inés Arbeláez
ISBN: 978-958-670-911-8
ISBN-PDF: 978-958-5164-19-2
DOI: 10.25100/peu.496
Colección: Educación y Pedagogía
Primera Edición Impresa septiembre 2011

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios
Vicerrector de Investigaciones: Héctor Cadavid Ramírez
Director del Programa Editorial: Omar J. Díaz Saldaña

Diseño de carátula, corrección de estilo y diagramación: G&G Editores

Cali, Colombia, diciembre de 2020

CONTENIDO

Capítulo 3
TEORÍA DE ECUACIONES Y CONCEPTO DE NÚMERO.
LOS CASOS DEL ÁLGEBRA ÁRABE Y DEL RENACIMIENTO

Capítulo 4
EL PAPEL DE LA TÉCNICA ALGEBRAICA CARTESIANA
EN LOS PROCESOS DE OBJETIVACIÓN DE LOS REALES

Capítulo 5
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES COMO OBJETO
MATEMÁTICO: LA “CONSTRUCCIÓN” DE DEDEKIND

Capítulo 6
LA NOCIÓN DE VECINDAD EN LA APROPIACIÓN DE LOS REALES

Capítulo 7
LA CARACTERIZACIÓN CONJUNTISTA DE LOS NÚMEROS REALES:
DEL DOMINIO DE LAS MAGNITUDES AL DOMINIO DE LOS CONJUNTOS

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

INTRODUCCIÓN

Este texto fue concebido y elaborado en el marco de un proyecto de investigación sobre *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*. El equipo responsable adoptó un enfoque interdisciplinario para tratar de dar respuesta a una demanda sentida de la comunidad de educación matemática en Colombia sobre cómo utilizar la historia, la epistemología y la filosofía de las matemáticas como herramientas para la construcción de pensamiento matemático en contextos escolares. Concretamente en casos de la enseñanza de objetos matemáticos como los números reales que, por la naturaleza compleja de su desarrollo y apropiación conceptual, exigen el diseño de nuevas perspectivas y posibilidades agenciadas desde diversas disciplinas.

Se plantea entonces la cuestión general de las modalidades de apropiación y uso de la historia en la educación matemática. En el capítulo primero, *Objetividad matemática, historia y educación matemática*, se trata esencialmente de mostrar que al margen de las diferencias de objeto y método que puedan existir entre una y otra, la historia y la educación matemática comparten el interés por descifrar cuestiones cruciales de la actividad matemática como lo es la búsqueda de la objetividad matemática.

Historia y educación matemática se enfrentan en sus indagaciones a la pregunta: ¿Cuál es la naturaleza de los actos de razonamiento que despliegan los sujetos cuando, enfrentados a la explicación de determinados problemas, participan de procesos de constitución de objetos matemáticos como los números reales? Ante todo se trata de explicar las condiciones lógicas de emergencia de la estructura matemática de $\mathbb{R}$ como “extensión” de la estructura de $\mathbb{Q}$. Para ello se adopta un esquema de solución de problemas en cuatro fases.

Se comienza por establecer las lagunas operatorias de carácter algebraico y topológico que caracterizan al sistema de los racionales. Se muestra luego que en la indagación sobre este problema se emplearon históricamente ciertas técnicas y procedimientos operatorios sobre $\mathbb{Q}$, en particular las cortaduras o sucesiones de Cauchy de racionales.

En un tercer momento las propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$ se extienden a un nuevo sistema cuyos elementos representan clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Aquí se plantea como hecho significativo, desde el punto de vista histórico y cognitivo, el requerimiento de "completar" a $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Finalmente, la cuarta fase del esquema problémico de constitución de objeto, consiste en constatar que $\mathbb{R}$ adquiere una realidad independiente de las circunstancias previas en las que fue introducido. ¿En qué sentido se puede hablar de que estos nuevos objetos son una "construcción matemática"? Es cierto que la existencia de los reales presupone modos previos de existencia, pero el esquema analítico propuesto en este capítulo para explicar la "extensión" apunta a mostrar que, contrariamente a lo que en ocasiones se supone, a los reales no se llega por una especie de separación de rasgos esenciales que estarían contenidos en ciertas entidades primigenias.

Así planteada, la cuestión de la objetividad de los reales tiene una importancia pedagógica para la educación matemática, concretamente para la formación matemática del profesor. Sin embargo, puede ser útil para el docente examinar situaciones históricas de nuestras instituciones educativas en las que la objetividad matemática se ha planteado como exigencia en las prácticas de apropiación de los números reales en ambientes universitarios, tomando la historia de nuestros textos de enseñanza como revelador de estas prácticas. Para ilustrar la importancia pedagógica de este género de historia, en la parte final del capítulo 1 se presentan algunas consideraciones sobre los contenidos y la organización de los cursos para la enseñanza del cálculo infinitesimal y el análisis matemático en los años 1930 y 1940 en universidades de Colombia y Perú.

Una vez planteada esta posición general sobre la objetividad de los números reales y sus implicaciones en la educación matemática, se abordan distintos momentos de su desarrollo relacionados con la siguiente rejilla analítica: Del número como forma de la magnitud, al número como forma de solución de ecuaciones, al número como forma de la teoría de funciones, al número como forma de la teoría de conjuntos, a los tratamientos aritméticos, lógicos y estructurales del número. El segundo capítulo: *Medida, número y magnitud en la antigüedad griega* tiene como propósito analizar las primeras huellas de los números irracionales en la antigüedad griega. El punto de vista que aquí se mantiene es que la constitución histórica de los números reales se da en la tensión entre las actividades de medir, contar y ordenar. Se presentan y explican tres etapas en el establecimiento de la actividad de medir. La etapa *primaria* corresponde a la escuela pitagórica; la etapa *relativa* a los resultados sintetizados por Euclides en algunos apartes de los *Elementos*. La etapa *abstracta*, es abordada en el séptimo capítulo.

Al presentar la teoría pitagórica de los números se empieza por caracterizar la concepción filosófica subyacente según la cual las cosas guardan una relación biunívoca con los números de contar. Sin embargo, en el ámbito de la medida los pitagóricos se encontraron con las magnitudes inconmensurables, que se constituirían en el primer antecedente histórico de los números irracionales. Se revisan los tres niveles de emergencia de lo irracional (el contexto musical, el problema de la diagonal del cuadrado y el problema de la diagonal del pentágono), haciendo énfasis en los dos últimos, puesto que son los que sirven de referencia para la historia del continuo aritmético. La salida histórica al problema de las magnitudes inconmensurables se dio a través de la teoría de razones y proporciones de Eudoxo, sistematizada por Euclides en los *Elementos*. El telón de fondo de los desarrollos teóricos de Euclides corresponde a la medida relativa; es decir, al proceso de transformar las figuras planas en cuadrados con regla y compás. En este capítulo se estudia este proceso para el caso de las figuras rectilíneas tratado por Euclides en el libro I de los *Elementos*.

Luego se estudia la teoría de razones y proporciones, tanto para magnitudes como para números. Al analizar la definición de razón, se destaca su importancia histórica, específicamente su trascendencia para la definición de cortadura de Richard Dedekind en el siglo XIX. En el último apartado se pone de presente el puente de contacto que establece Euclides entre los números y las magnitudes (en particular la relación directa entre las razones de magnitudes conmensurables y las razones numéricas), ilustrando algunos aspectos conceptuales que guiaron el trabajo de los matemáticos por más de veinticinco siglos, culminando con el establecimiento del dominio de los números reales.

En el tercer capítulo: *Teoría de ecuaciones y concepto de número: el caso del álgebra árabe y del Renacimiento*, se examinan distintas problemáticas relacionadas con procesos de objetivación de los números a través de la constitución de la teoría de ecuaciones. En un primer momento se estudia en el trabajo matemático de al-Khwarizmi la emergencia de ese nuevo campo disciplinar de las matemáticas que será designado con el nombre de “álgebra”, y que dará inicio a una teoría de ecuaciones con modos particulares de considerar el número y la magnitud. En un segundo momento relativo al álgebra renacentista se analizan en la obra de Cardano los procedimientos utilizados en la solución de ecuaciones dada la no aceptación de los números negativos. Se examinan las condiciones históricas de introducción de una “teoría de ecuaciones”, en donde la preocupación no radica exclusivamente en el método de solución, sino en la inquietud manifiesta por la naturaleza de las raíces y el grado de las ecuaciones, que conlleva un tratamiento particular de lo numérico.

En el cuarto capítulo, *El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales,* se proponen dos hipótesis en relación con los aportes del álgebra al proceso de objetivación de ℝ. La primera plantea que en su origen el álgebra es una técnica matemática. Su uso en el proceso de estudio y solución de problemas de distinta naturaleza jalona lo que algunos investigadores han denominado "procesos de algebrización de las matemáticas". Solamente a partir de desarrollos teóricos subsiguientes el álgebra adquirirá un estatuto autónomo de disciplina como la aritmética o la geometría. La segunda hipótesis plantea que tal proceso de algebrización posibilita una ampliación del espectro matemático de nuevos conocimientos relacionados con nuevas preguntas y problemáticas, imposibles de formular en el contexto anterior.

La obra de Descartes es un momento de madurez decisivo en la consolidación de la técnica algebraica gracias a los artificios que introduce, los cuales le permiten resolver, además del Problema de Pappus, dos de los problemas clásicos de las matemáticas: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Se muestra que la modalidad cartesiana de algebrización de la geometría que da lugar a la constitución de la "curva algebraica" (objeto radicalmente distinto al objeto "curva geométrica" de los griegos), introduce, en el mismo movimiento conceptual, una nueva manera de entender la relación entre número y magnitud que va a constituirse en momento decisivo para la objetivación de los reales. Este proceso de objetivación "dinamizado con el trabajo de Descartes" se cristalizará en el siglo XIX en las distintas dinámicas de constitución de los números reales generadas en los trabajos de Weierstrass, Dedekind y Cantor, entre otros.

El quinto capítulo: *Los números reales como objeto matemático: La "construcción" de Dedekind,* estudia las características epistemológicas del aporte de Dedekind. Empleando el enfoque objetivista de la historia de las matemáticas, se identifican distintos niveles de razonamiento que intervienen en la formulación axiomática de ℝ. Esto conlleva a descomponer el acto epistemológico de Dedekind, es decir, la llamada construcción de 1872, en una gradación de momentos lógicos de pensamiento encadenados a la expresión formal de ℝ. Inicialmente se hace una breve reflexión sobre el sentido y valor explicativo de un enfoque objetivista de ℝ, complementario al desarrollo del primer capítulo. ¿Qué significa que ℝ sea un objeto matemático? Tratando de dar respuesta a esta pregunta se retoman algunas problemáticas históricas asociadas al devenir de ℝ, algunas ya tratadas parcialmente en el segundo capítulo, tales como la definición de continuidad en la *Física* de Aristóteles, el hallazgo de las magnitudes inconmensurables por los pitagóricos, la naturaleza de los objetos geométricos de los *Elementos* de Euclides, entre otras.

Este marco histórico permite, además de reafirmar el carácter evolutivo de $\mathbb{R}$, postular dos problemáticas ligadas a su presentación axiomática: las limitaciones del infinito potencial y las limitaciones de la intuición y representación geométrica. Esta última problemática se desarrolla a través de un acercamiento a las condiciones históricas y epistemológicas que hacen necesaria la formulación del teorema del valor intermedio. Especialmente en lo que tiene que ver con la red de conceptos (límite, sucesión y convergencia) en que se sustenta este teorema en la obra de Cauchy y Bolzano. De otra parte, se muestra que estas viejas dificultades epistemológicas se hallan directamente asociadas a problemáticas actuales en la enseñanza de $\mathbb{R}$, como la aprehensión del infinito actual en la caracterización de un número irracional y el uso recurrente de procedimientos constructivos en la recta geométrica para su caracterización. Las limitaciones que presentan los procedimientos de orden geométrico son quizás la razón más fuerte que en su época invoca Dedekind a favor de la creación de un continuo aritmético.

Finalmente, se clasifican y analizan los momentos lógicos que se consideran decisivos en la construcción de $\mathbb{Q}$ como dominio de partida para la obtención de $\mathbb{R}$, el traslado de las propiedades de $\mathbb{Q}$ a la recta geométrica, la formulación del principio de continuidad, la demostración de la no extensibilidad de $\mathbb{Q}$ bajo la operación raíz cuadrada, la extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ como la adquisición de una nueva estructura y la preservación de la estructura anterior, y las posibilidades del nuevo dominio representadas en operaciones y cálculos. Un aspecto de fundamental importancia en los procesos constitutivos de los números reales, particularmente en la obra de Dedekind y Cantor, es que ellos se relacionaron estrechamente con el advenimiento de nuevos campos matemáticos (el análisis, la topología y la teoría de conjuntos, entre otros). Este hecho histórico favoreció el marco epistemológico de referencia para avanzar en una caracterización más depurada de $\mathbb{R}$ en términos formales, a partir del cual se precisarán propiedades fundamentales de su estructura como la completez.

En los inicios del siglo XIX, con la caracterización topológica de $\mathbb{R}$ emerge la noción abstracta de vecindad, la cual además de su valor conceptual intrínseco permite una presentación de $\mathbb{R}$ con ciertas ventajas pedagógicas que se exponen en el sexto capítulo sobre *La noción de vecindad en la apropiación de los números reales*. La apropiación conceptual de la completez de los números reales pasa por el estudio de la noción de vecindad; esto implica, en primer lugar, mostrar que la noción de vecindad es la base conceptual de las nociones de límite, convergencia y continuidad; y en segundo lugar, explicitar el rol de la noción de vecindad en las construcciones clásicas de los números reales. Para tal efecto, el capítulo utiliza un enfoque que no corresponde necesariamente con el devenir histórico, sino que ha sido concebido más con el interés pedagógico de mostrar un encadenamiento intuitivo de etapas del desarrollo moderno de la noción de vecindad que se articulan con los clásicos conceptos del análisis, y ofrecen así una manera plausible de comprender la completez de ℝ.

A partir de un acercamiento intuitivo a la noción de vecindad y al concepto de cercanía arbitraria, se presenta la definición en términos de la noción de distancia y posteriormente se muestra su independencia, con lo cual se establecen relaciones de cercanía en conjuntos de naturaleza cualquiera. Luego se muestra la relación entre la continuidad por puntos de una función real, el límite de una función y la noción de vecindad. De manera particular, se argumenta en favor de la definición de estos conceptos en términos de vecindades. Estas definiciones, presentadas en su más alto grado de generalidad, no sólo muestran de manera evidente la vecindad como concepto fundamentador del límite y la continuidad sino que resultan más intuitivas que las expresadas en términos de ε y δ.

Al final de este capítulo se comentan, en su versión moderna, las dos construcciones típicas de los reales, a través de sucesiones de Cauchy de números racionales y a través de cortaduras, desvelando permanentemente el rol que juega la noción de vecindad. En cada una de ellas se identifican tres niveles epistemológicos en el proceso de construcción teórica. Se muestra con detalle, que el paso detenido y consciente por cada uno de estos niveles, en los que se avanza en abstracción y generalidad, resulta indispensable en el proceso de comprensión de los números reales como objeto matemático.

El séptimo y último capítulo de este texto: *Los números reales en el marco de una teoría de la medida* busca describir la base conjuntista sobre la que reposa el campo de los números reales. Para ello se retoma la discusión planteada en el segundo capítulo con respecto a la relación entre las nociones de medir, contar y ordenar. En este sentido, se muestra que la aritmetización del continuo implicó el paso de una etapa de medida relativa a una etapa de medida *abstracta*. El conjunto de los números reales ℝ constituía una rejilla numérica referencial para asignarle a cada magnitud acotada un número real determinado.

En primera instancia se llama la atención sobre las limitaciones de una teoría axiomática de los reales en el sentido de no establecer algoritmos operativos. Esto significa que si bien a través de lo axiomático se implanta el piso legal de la objetivación del continuo, muchos interrogantes quedaban sin resolver. Para especificar los problemas inherentes a la constitución de ℝ como un cuerpo numérico especial, se describe su construcción conjuntista. Para ello, primero se hace una presentación de la medida de Borel y sus limitaciones, las cuales dan paso a la medida de Lebesgue. Para entender este cambio conceptual se describe la formulación de los conjuntos infinitos por parte de Cantor. En seguida se describe la axiomática para los conjuntos, establecida por Zermelo y Fraenkel como medio para resolver las paradojas de la teoría intuitiva cantoriana.

Con base en la axiomática de Zermelo-Fraenkel se describe la construcción conjuntista de los números naturales partiendo del cero a través del conjunto vacío, el uno como el conjunto cuyo único elemento es el vacío, e inductivamente se forma un nuevo natural como la colección de todos los anteriores, lo que permite establecer una relación de orden total por pertenencia de conjuntos y definir recursivamente las operaciones de suma y producto. A través del concepto de clase de equivalencia sobre el conjunto de parejas de números naturales se define el conjunto de los números enteros, extendiendo las operaciones y la relación de orden. Por esta misma vía se incorpora el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Los números reales se definen con base en el concepto de cortadura sobre $\mathbb{Q}$. La descripción de $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras de $\mathbb{Q}$, permite demostrar que es el único cuerpo (salvo isomorfismos) totalmente ordenado (con el orden usual), completo, sin puntos finales y que contiene un subconjunto denso numerable.

Esto parecería indicar que se tenía completamente caracterizado a $\mathbb{R}$. Sin embargo, se muestra que aún queda un asunto clave por resolver, el tamaño de $\mathbb{R}$, planteado en la teoría de conjuntos infinitos. Dado que el infinito del conjunto de los números reales es mayor que el infinito del conjunto de los números naturales, se trata de establecer si hay subconjuntos de $\mathbb{R}$, de un infinito entre el infinito de los naturales y el de $\mathbb{R}$. Esto nos conduce a la *hipótesis del continuo*. En la parte final del capítulo se describe la problemática y las dificultades que esta conlleva.

Finalmente, es conveniente anotar que este libro fue elaborado en el marco de la investigación: *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes*, realizada con el apoyo de Colciencias, proyecto 1106-11-17688, en el que participaron el Grupo de Historia de las Matemáticas (Universidad del Valle - Universidad del Cauca) y el Grupo de Educación Matemática de la Universidad del Valle. El equipo de investigación lo componen en su totalidad nueve profesores pertenecientes a diversas unidades académicas de la Universidad del Valle y de la Universidad del Cauca, entre ellas el Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad del Valle y el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y de la Educación de la Universidad del Cauca.

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

Capítulo 1

OBJETIVIDAD MATEMÁTICA, HISTORIA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Carlos Arboleda[1]

Introducción

Hace veinticinco años, en el marco de las actividades fundacionales de la Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, se adelantaron en la región una serie de iniciativas que con el paso del tiempo conformarían un ambicioso programa de enseñanza de la historia de las ciencias. Si bien el objeto principal de estos emprendimientos era contribuir a crear las mejores condiciones de profesionalización de nuestro campo de estudios, en varios congresos y reuniones se hizo usual presentar experiencias de cursos y estrategias educativas en historia de las ciencias, tratando de evidenciar en cada caso un marco de referencia conceptual.

En un artículo de la época[2], al describir el programa de enseñanza de historia de las matemáticas y de las ciencias que adelantábamos con varios colegas en la Universidad del Valle, aproveché para plantear algunas preocupaciones sobre la relación entre historia y enseñanza de las matemáticas. Con el paso del tiempo he constatado que varios de los puntos de vista y estrategias entonces formulados, se han revelado difíciles de aplicar porque los procesos de profesionalización e institucionalización de nuestra área de estudios han tomado rumbos que entonces no podíamos prever. Otros no son más sostenibles, al menos desde la posición conceptual a donde me han

1 Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle - Miembro del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle.

2 Arboleda (1984).

llevado mis investigaciones y mis actividades docentes en nuestra área de estudios.

Pero el principal motivo de mi preocupación sobre la relación entre historia y enseñanza de las ciencias sigue estando vigente después de 25 años: ¿Cuál es el tipo de historia susceptible de ser apropiada en la educación matemática y que contribuya efectivamente al diseño de estrategias didácticas para la formación de pensamiento matemático?

La respuesta que más me satisface en la actualidad, es la que ya entonces se esbozaba de manera general: Entre todas las historias practicables prefiero aquella que le permita al alumno vivir experiencias de reconstrucción de teorías.

El criterio de base para mantener inmodificable esta posición es el mismo que sostuve entonces:

> La historia es un medio para tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en matemáticas (…) y puede ser utilizada a favor de la formación matemática de quienes enseñarán las matemáticas sin jamás proponerse una investigación en matemáticas.

En el presente trabajo expondré los argumentos de los que ahora dispongo para continuar defendiendo las anteriores ideas. Trataré de mostrar que, al margen de las diferencias de objeto y método que caracterizan una y otra área del conocimiento, hay algunas problemáticas cruciales de la actividad matemática de cuyo discernimiento la historia y la educación pueden sacar provecho. En general se trata de problemáticas relacionadas con la búsqueda de la objetividad matemática y los procesos de constitución de los objetos matemáticos en tanto actividades especializadas de individuos que, enfrentados a la explicación de determinados problemas, movilizan actos de razonamiento de cierta naturaleza.

Comprender las razones de ser de la lógica interna de las teorías matemáticas

En un artículo reciente, consagrado a estudiar las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática, Michael Otte señala que

> Uno de los grandes problemas de la educación matemática es el carácter aparentemente estático e infalible del conocimiento matemático. El significado de cualquier cosa se reduce a: $P = P$. Este principio de identidad reside en el corazón de la lógica y de las ciencias exactas, y obviamente va en contravía de toda consideración histórica o evolucionista. ¡*P* significa sólo P! (Otte, 2007).

Pero en tanto producto de la actividad humana a lo largo del tiempo, las matemáticas no podrían reducirse a la lógica ni a un simple cálculo proposicional. La historia de las matemáticas muestra que esta actividad se adelanta dentro de propósitos determinados y de acuerdo con procedimientos cuyas razones de ser son objeto de la reflexión filosófica y epistemológica. Desde los propios orígenes de la ciencia griega, la filosofía supo reconocer, por ejemplo en el *Teeteto*, que el acto de razón que apunta al conocimiento no puede consistir sólo en expresar la opinión de las cosas en un lenguaje, ya que la razón se refiere a la naturaleza íntima del entendimiento y no solamente a la manera de organizar nuestros enunciados.

Al estudiar los procesos de constitución de objetos, teorías, estructuras, a partir de la actividad de solución de problemas, el historiador de las matemáticas sabe muy bien que los discursos son trazas de construcciones producto de la actividad de matemáticos en situaciones determinadas. Esta actividad es un acto de constitución que difícilmente podría reducirse al mero acto de descubrir algo ya existente. Más adelante volveremos sobre esta problemática de construcción y descubrimiento en matemáticas.

Lo que en este contexto interesa tener en cuenta para la reflexión sobre las relaciones entre historia y educación matemática, es que una vez constituidas las matemáticas parecen obedecer a una lógica interna independiente de sus orígenes. Sin embargo, el trabajo de reconstitución de los orígenes permite aclarar esta lógica interna, siempre y cuando el historiador esté preparado para comprender los intríngulis de esta lógica. En primer lugar, esto significa reconocer que, como ya lo planteaba Frege en su crítica a Kant, la lógica no es irreductiblemente formal. Es decir, no es simplemente un ensamble de formas vacías de contenido, ya que la lógica hereda un contenido semántico de conceptos y relaciones entre objetos del mundo concreto. Es por ello mismo que la lógica puede permitirnos avanzar en el conocimiento y no sólo representar lo ya construido. La generalidad indispensable a la lógica no se traduce en indiferencia con respecto a las características particulares de los objetos.

El asunto delicado, por supuesto, es ponerse de acuerdo en lo que se quiere decir cuando se afirma que la representación lógica de la realidad "hereda contenido semántico". La historia de las matemáticas nos revela que, en su actividad, el matemático parece adoptar espontáneamente el punto de vista de Poincaré sobre lógica y matemáticas, según el cual, no porque las expresiones lógicas se "formalicen" en tratados especializados, pierden el carácter intuitivo que uno les reconoce en los discursos matemáticos. De acuerdo con Poincaré, los principios lógicos no son más que juicios sintéticos disfrazados. Recordemos de paso que esta posición es inaceptable, entre otros, para quienes consideran que la lógica no tiene soporte ontológico y que mal podría fundarse en afirmaciones de existencia.

Como quiera que sea, la sola explicación de la lógica formal de una teoría matemática no da cuenta de aspectos de fondo para la historia o para la educación matemática, como lo es la función que esta misma lógica cumple en el sistema de conocimiento. En consecuencia, el historiador y el educador se ven conducidos a indagar por las razones de ser del proceso de constitución de la teoría. Esta indagación puede, por ejemplo, orientarse a algún tipo de explicación sobre la naturaleza de los problemas a los que tal o cual teoría dan respuesta. Para el caso de reconstrucciones de un campo teórico formalizado, se trataría de mostrar cómo las expresiones particulares de una cultura matemática elemental adquirieron estatus universal al convertirse en propiedades de la axiomática de la teoría.

Afortunadamente cada vez son más frecuentes este tipo de reconstrucciones sobre los orígenes empíricos de las teorías formales. Un caso notable es el curso para filósofos sobre la constitución formal de los sistemas numéricos, dictado durante varios años por Marco Panza en la Universidad de Nantes. De acuerdo con el autor,

> No se trata de enseñar, por ejemplo, que la suma de los números naturales es conmutativa, sino de mostrar cómo la conmutatividad de la suma sobre los números naturales se conecta con un sistema de axiomas y de definiciones dictado por el esfuerzo de fijar la naturaleza lógica de una progresión[3].

Todo matemático, por formalista que sea, está dispuesto a aceptar la importancia que reviste para la enseñanza el trabajo de reconstitución de su teoría. En el capítulo de sus memorias consagrado a reflexionar sobre lo que él llama su “invención” de la Teoría de las Distribuciones, Laurent Schwartz se refiere al fenómeno antes mencionado de que, una vez formalizadas, las teorías ocultan la actividad matemática compleja que las produjo, y propone la intervención de la historia de las matemáticas para ayudar a los lectores a reconocer las huellas de esta actividad[4].

Schwartz observa que generalmente las personas se representan los procesos constitutivos de las teorías de una manera muy diferente a como ocurrieron. La imagen predominante es que “se progresa de principio a fin mediante razonamientos rigurosos, perfectamente lineales, en un orden bien determinado y único que corresponde a una lógica perfecta. No se reconocen los *zig zags*”. Ello es lamentable, dice Schwartz, porque si se considera que en las matemáticas y las ciencias en general no hay derecho a dudas y errores, entonces ellas serán percibidas como demasiado rígidas, menos humanas y más inaccesibles.

3 Panza (2007).

4 Schwartz (1997). Ver sobre este tema el capítulo « L’invention des Distributions », pp. 223-266.

Por el contrario, en el desarrollo de una indagación sobre un problema, lo más frecuente es que la respuesta demore en obtenerse. Generalmente después de una primera investigación, viene la fatiga. A veces se continúa pero sin éxito:

> Y se guarda el problema en alguna parte de la cabeza para reflexionar sobre ello más tarde. De pronto se encuentra algo, pero tal vez no es necesariamente interesante y no merece desarrollarse ni publicarse. Así, uno puede continuar planteándose cuestiones conexas o incluso diferentes, hasta conformar un acervo de interrogantes. A menudo se encuentran soluciones simultáneas a muchos de tales problemas.

Más adelante, Schwartz vuelve a referirse a la necesidad de ir más allá de las primeras apreciaciones sobre la naturaleza del trabajo científico, y fija de la siguiente manera una posición que nos suena a música celestial a historiadores y educadores de las matemáticas:

> El lector que lee un libro bien escrito no reconoce cuáles han sido las alegrías y sufrimientos de su autor. Puede ser instructivo develárselas. No se dispondría de tiempo en el liceo para estudiar las ciencias junto con su historia. La mayor parte del tiempo es necesario enseñar de manera imperativa y dogmática. Pero de tiempo en tiempo se debería hacer no solamente que los alumnos investiguen, sino también que conozcan la historia de las ciencias. Un poco de historia resulta fecundo en la exposición de una teoría nueva. Y no se hace suficiente historia de las matemáticas con los alumnos del liceo, como para mostrarles la extensión de los espacios franqueados por nuestros predecesores hasta llegar al estado actual de perfección. Igualmente es necesario que sepan que si una teoría está bien hecha aunque algunos aspectos suyos permanezcan inciertos, probablemente éstos serán los más interesantes para futuras investigaciones. El propósito de una ciencia no es atragantar con ideas bien hechas y bien acabadas, sino imaginar concepciones nuevas. Y éstas generalmente se engendran al superar obstáculos internos.

Indagar sobre modalidades de objetivación de teorías concretas: el caso de los reales[5]

Tomemos por caso la presentación de una teoría tan fundamental para la formación matemática de la educación media superior y universitaria como el sistema numérico de los reales. De acuerdo con lo anterior, el objetivo inmediato no sería tanto enfrentar directamente al estudiante con las propiedades algebraicas de este sistema en tanto cuerpo ordenado arquimediano y completo. Más bien se trataría de permitirle, a través de experiencias didác-

[5] Un estudio más detallado de las ideas expuestas en este y otros apartes, se encuentra en Arboleda (2007).

ticas diseñadas con un uso adecuado de la historia, que tome conciencia de las condiciones históricas y epistemológicas que posibilitaron la constitución de los números reales como objeto matemático.

El historiador de las matemáticas es bien consciente de que éste es uno de los asuntos que mayormente ha jalonado el desarrollo de las matemáticas, desde la geometría de los griegos, pasando por el álgebra de los árabes, la geometría cartesiana, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, el análisis de Euler, Lagrange, Fourier y Cauchy, la aritmetización de Bolzano, Dedekind y Weierstrass, la teoría de conjuntos y la topología de Bolzano, Cantor y Dedekind, la teoría de funciones de Baire, Borel, Lebesgue y Fréchet, y la fundamentación de la aritmética de Peano, Frege y Russell.

Sin embargo, este largo proceso de objetivación de $\mathbb{R}$ escapa a la escolaridad. En el grado 11 de la educación media, en donde sería más pertinente que se presentaran los fundamentos de la construcción de los números reales, el problema se deshace en una presentación seudo formal. En la formación básica universitaria, $\mathbb{R}$ se introduce de manera axiomática y el estudiante termina por no entender la naturaleza y función de las propiedades de $\mathbb{R}$, tanto en su propia objetivación matemática como en la estructuración de las teorías sobre los reales que constituyen el referente principal del currículo universitario.

Esta presentación axiomática formal en la cual se diluye la necesidad de dar cuenta de cualquier característica del proceso de objetivación de $\mathbb{R}$, es un procedimiento "natural" empleado por los docentes para presentar los reales. Como ocurre en otras instancias de la didáctica inercial que domina en la escuela, una enseñanza se vuelve natural e incuestionable cuando se ha revelado insustituible a lo largo de muchos años. Y si algunos le reconocen dificultades epistemológicas y pedagógicas a este enfoque, no es menos cierto que otras presentaciones del pujante campo de investigaciones históricas y didácticas sobre los reales, o bien no son suficientemente conocidas por los docentes o no son percibidas como alternativas con capacidad de organizar el currículo y las prácticas escolares.

Así, pues, dado que el estudiante sólo tiene una idea "intuitiva" de algunas de las propiedades de $\mathbb{R}$ por sus cursos de álgebra elemental y ante la obligación de exponer los fundamentos del cálculo infinitesimal, termina por imponerse una presentación seudo formal en la cual se toman los reales como "elementos primitivos" y se axiomatizan algunas de sus propiedades más importantes del cálculo, sobre todo aquellas que no son tan familiares al lector como el axioma de continuidad o del extremo superior. Este es el punto de partida del cálculo de Apostol, uno de los textos que más ha influido en la enseñanza universitaria en los últimos treinta años dada su reputación de obra esmerada y rigurosa. No obstante, Apostol no deja de reconocer que este procedimiento de la enseñanza no es totalmente riguroso a nivel epistemológico, y que: