

Leseprobe aus:

Brian Clegg

Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit



BRIAN CLEGG

**Eine kleine Geschichte
der Unendlichkeit**

Aus dem Englischen von
Monika Niehaus und Bernd Schuh

Rowohlt Taschenbuch Verlag

Die englische Originalausgabe erschien 2003 unter dem Titel
«A Brief History of Infinity» bei Constable & Robinson Ltd, London

Deutsche Erstausgabe

Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag,

Reinbek bei Hamburg, April 2015

«A Brief History of Infinity»

Copyright © 2003 by Brian Clegg. All rights reserved

First published by Creativity Unleashed, Ltd., Swindon, UK,

www.cul.co.uk. All rights reserved

Umschlaggestaltung ZERO Werbeagentur, München

Umschlagabbildung FinePic, München

Satz aus der Eureka PostScript bei

Dörlemann Satz, Lemförde

Druck und Bindung CPI books GmbH, Leck, Germany

ISBN 978 3 499 62800 9

*Für Gillian, Rebecca und Chelsea
und auch für Neil Sheldon von der Manchester Grammar
School dafür, dass er so viel Geduld für die Sache
mit den Fröschen und den Seerosenblättern aufgebracht hat.*

Inhalt

- 1 Bis zur Unendlichkeit und darüber hinaus **9**
 - 2 An den Fingern abzählen **15**
 - 3 Eine andere Mathematik **35**
 - 4 Die Macht der Zahlen **57**
 - 5 Das Absolute **75**
 - 6 Das Unendliche benennen **89**
 - 7 Ein kurzer Blick unter den Teppich **117**
 - 8 Das unteilbare Geheimnis **139**
 - 9 Die Fluxionskriege **155**
 - 10 Paradoxien des Unendlichen **189**
 - 11 In Stein gemeißelt **203**
 - 12 Das Udenkbare denken **229**
 - 13 Ordnung contra Kardinal **241**
 - 14 Unendlich viele Unendlichkeiten **249**
 - 15 Wahnsinn und Methode **269**
 - 16 Unendlich klein **295**
 - 17 Unendlichkeit zum Mitnehmen **305**
 - 18 Faszination ohne Ende **333**
- Danksagung **341**
Anmerkungen **343**

1

Bis zur Unendlichkeit und darüber hinaus

*In diesem unglaublichen Universum, in dem wir leben,
gibt es nichts Absolutes. Selbst Parallelen
schneiden sich irgendwo im Unendlichen.*

Pearl S. Buck, *Zuflucht im Herzen*

Die Unendlichkeit ist ein so außergewöhnliches, so seltsames Konzept, dass das Nachsinnen darüber mindestens zwei große Mathematiker in den Wahnsinn getrieben hat.

In seiner SF-Reihe *Per Anhalter durch die Galaxis* beschreibt Douglas Adams, wie die Autoren seines imaginären Reiseführers in der Einleitung kein Halten mehr kennen:

«Der Weltraum», heißt es da, «ist groß. Verdammt groß. Du kannst dir einfach nicht vorstellen, wie groß, gigantisch, wahnsinnig riesenhaft der Weltraum ist. Du glaubst vielleicht, die Straße runter bis zur Drogerie ist eine ganz schöne Ecke, aber das ist einfach ein Klacks, verglichen mit dem Weltraum. Pass mal auf ...», und so weiter. Nach einer Weile beruhigt sich

das Buch stilistisch ein bisschen und berichtet nun von Dingen, die man wirklich wissen muss ...¹

Die Unendlichkeit lässt den Raum klein erscheinen.

Dennoch begleitet uns dieses widerspenstige Konzept tag ein, tag aus. Meine Töchter waren kaum 6 Jahre alt, als sie zum ersten Mal begannen, schneller und immer schneller zu zählen, was stets in einem Wortsalat und dem triumphierenden Schrei «Unendlich!» endete. Und obgleich die Unendlichkeit den Raum tatsächlich klein erscheinen lassen mag, ist unendlich gleichzeitig wohl das beste Etikett, das wir etwas so Riesigem wie dem Universum verpassen können.

Jeder, der über die Grundrechenarten hinausgelangt ist, stößt irgendwann unweigerlich auf das kleine Symbol ∞ (auch wenn wir noch sehen werden, dass diese betrunkene, in den Schmutz gefallene Acht nicht die wahre Unendlichkeit ist, sondern ein geisterhafter Blender). Physiker gehen mit einer Nonchalance und Leichtfertigkeit mit diesem Konzept um, die jeden Mathematiker zusammenzucken lässt. Im Physikunterricht meiner Schule hieß es oft: «Der Toastständer ist unendlich.» Das bezog sich auf ein nahe gelegenes Gebäude, Teil des Manchester Catering College, das die Form eines riesigen Toastständers aufwies. (Die Ähnlichkeit ist beabsichtigt, ein seltenes Beispiel für Humor in der Architektur. Das angrenzende Gebäude sieht aus der Luft wie ein Spiegelei aus.) Wir benutzten die Ziegel dieser fantasievollen Struktur, um optische Instrumente zu fokussieren. Tatsächlich meinten wir mit «unendlich», dass das Gebäude «weit genug entfernt war, um so zu tun, als sei es unendlich weit entfernt».

Die Unendlichkeit fasziniert uns, weil sie uns über etwas nachdenken lässt, das jenseits unserer Alltagsprobleme, jenseits von *allem* liegt – als Thema ist sie im wahrsten Sinne des Wortes bewusstseinsweiternd. Sobald das Unendliche die Bühne betritt, scheint der gesunde Menschenverstand sie zu verlassen. Hier ist eine Größe, die die Arithmetik auf den Kopf stellt und es durchaus plausibel macht, dass $1 = 0$ ist. Hier ist eine Größe, die uns erlaubt, so viele zusätzliche Gäste in ein bereits volles Hotel zu stopfen, wie wir wünschen. Und was das Bizarrste ist: Es lässt sich recht leicht zeigen, dass es etwas geben muss, das größer als unendlich ist – wo dies doch eigentlich die größte Menge ist, die es geben kann.

Obgleich keine Wissenschaft so abstrakt ist wie die Mathematik, hat es sich im Fall der Unendlichkeit als schwierig erwiesen, spirituelle Erwägungen außer Acht zu lassen. Wenn Menschen über das Unendliche nachdenken, ist es so gut wie unmöglich, theologische Gefilde außen vor zu lassen, ganz gleich, ob man versucht, die Existenz von etwas Größerem als dem Universum zu beweisen oder zu widerlegen. Unendlichkeit hat die seltsame Fähigkeit, vieles in einem zu sein. Sie ist gleichzeitig praktisch und unbegreiflich. Naturwissenschaftler und Ingenieure benutzen sie ganz ungeniert, weil sie funktioniert – aber sie sehen sie als Black Box an, denn sie stehen zu ihr im selben Verhältnis wie die meisten von uns zu einem Computer oder einem Handy – etwas, das tut, was wir wollen, wenn wir auch nicht genau wissen, wie.

Mathematiker nehmen in dieser Hinsicht eine ganz andere Haltung ein. In ihren Augen erschüttern moderne Überlegungen zur Unendlichkeit die komfortable, traditio-

nelle Welt genauso in ihren Grundfesten, wie die Quantenmechanik das in sich geschlossene, klassische Bild zerstörte, das sich die Physiker vom Funktionieren der Welt gemacht hatten. Physiker haben sich widerwillig mit Konzepten wie Teilchen beschäftigen müssen, die gegen den Zeitstrom schwimmen oder sich gleichzeitig in zwei verschiedenen Zuständen befinden. Als menschliche Wesen verstehen sie nicht, warum das so sein sollte, aber als Wissenschaftler sind sie sich im Klaren, dass eine Akzeptanz dieses Bildes ihnen hilft vorherzusagen, was da gerade passiert. Wie der große Physiker Richard Feynman (1918–1988) in einem Vortrag vor einem Laienpublikum einmal meinte:

Ich möchte Sie davon abhalten sich abzuwenden, nur weil Sie die Sache nicht verstehen. Meine Physikstudenten verstehen die Sache ebenfalls nicht ... weil ich sie nicht verstehe. Niemand versteht sie.²

Unendlichkeit bietet uns einen ähnlich verlockenden Mix aus Normalem und Kontraintuitivem.

All das macht Unendlichkeit zu einem faszinierenden, schwer zu fassenden Thema. Sie kann wie ein Reh sein, das man in den Tiefen eines Dickichts erspät. Man erhascht einen Blick auf etwas Schönes, der einen innehalten lässt, aber einen Moment später ist man sich nicht sicher, ob da überhaupt etwas war. Und dann tritt das wunderbare Tier plötzlich ein paar Schritte vor und zeigt sich sekundenlang in seiner ganzen Pracht.

Ein echtes Problem bei der Unendlichkeit hat schon immer darin bestanden, sich durch das dichte Unterholz aus Symbolen und Fachbegriffen zu schlagen, mit denen die

Mathematiker sich umgeben. Diese Fachsprache hat einen sehr guten Grund. Das Thema lässt sich ohne einen gewissen Gebrauch dieser beinahe magischen Beschwörungsformeln kaum handhaben. Aber es ist durchaus möglich, sie so transparent zu machen, dass sie den Weg nicht verstellen. Dann können wir einen klaren Blick auf eines der bemerkenswertesten mathematischen Geschöpfe werfen – ein Konzept, das weit über reine Zahlen hinausgeht und uns zwingt, unser Verständnis der Wirklichkeit auf den Prüfstand zu stellen.

Willkommen in der Welt der Unendlichkeit.

2

An den Fingern abzählen

Als Alexander von Anaxarch hörte, es gebe eine unendliche Zahl von Welten, brach er in Tränen aus. Auf die Frage seiner Freunde, ob ihm ein Unglück widerfahren sei, antwortete er: «Meint ihr nicht, es sei der Klagen wert, wenn es eine derart große Fülle von ihnen gibt und wir noch nicht einmal eine einzige erobert haben?»

Plutarch, Von der Ruhe des Gemüts und andere philosophische Schriften

Eine Folge von Zahlen eine nach der anderen aufzusagen, ist uns seit Kindertagen vertraut. Das einfache, schrittweise Fortschreiten der Ziffern hat sich uns so eingeprägt, dass es überraschend schwierig sein kann, aus der Abfolge auszubrechen. Versuchen Sie einmal, so rasch Sie können, in Französisch (oder einer anderen Sprache, deren Grundlagen Sie beherrschen, die Sie aber nicht besonders flüssig sprechen) laut von 1 bis 10 zu zählen. Nun versuchen Sie's andersherum – von 10 bis 1 –, ohne dabei langsamer zu werden. Gewöhnlich führt das zum Stolpern; der Rhyth-

mus stockt, während wir nach der nächsten Zahl suchen. Wir verheddern uns in dieser tief eingeschliffenen Progression.

Zahlenfolgen sind Teil unserer Kultur; oft stehen sie im Zentrum von Abzählreimen, wie sie Kinder lieben. Die einfachsten sind simple Gedächtnishilfen, die auf unsere ersten Zählversuche zurückdatieren:

One, two, buckle my shoe,
Three, four, knock on the door,
Five, six, pick up sticks,
Seven, eight, lay them straight,
Nine, ten, a big, fat hen,
Eleven, twelve, dig and delve,
Thirteen, fourteen, maids a' courting,
Fifteen, sixteen, maids in the kitchen,
Seventeen, eighteen, maids in waiting,
Nineteen, twenty, my plate's empty.*

In einigen der späteren Reime spürt man eine gewisse Ver zweiflung, aber sie beschwören auch eine faszinierende ver-

* Eins, zwei, schnell' meine Schuh',
Drei, vier, klopf' an die Tür,
Fünf, sechs, sammle Stöck',
Sieben, acht, leg' sie grad' hin,
Neun, zehn, eine dicke fette Henne,
Elf, zwölf, grab' und wühl',
Dreizehn, vierzehn, Mägde flirten,
Fünfzehn, sechzehn, Mägde in der Küche,
Siebzehn, achtzehn, Mägde warten,
Neunzehn, zwanzig, mein Teller ist leer.

gangene Welt voller Mägdelein in Schnallenschuhen herauf. Der repetitive, hypnotische Rhythmus hilft, die Zahlenwerte an die richtige Stelle zu setzen.

Andere Knittelverse eignen sich mehr zum Singen als die skandierte Wiederholung von «One, two, buckle my shoe»; ein typisches Beispiel ist:

One, two, three, four, five,
Once I caught a fish alive,
Six, seven, eight, nine, ten,
Then I let it go again.*

Ebenso nützlich zum Zahlenlernen sind Lieder wie *Ten Green Bottles* (entspricht dem deutschen Kinderlied *Zehn kleine Negerlein*), bei dem die Zahlen rückwärts laufen, damit Kinder einen flexibleren Umgang mit Zahlen lernen.

Aber Zahlenreime beschränken sich nicht darauf, uns zu helfen, die Grundlagen des Zählens zu erlernen. Komplexere Verse bereichern die Zahlenfolge um Symbolik. Es ist schwer, sich der Magie der Zahlen zu entziehen, die sich in Reimen wie der Elstern-Prophezeiung widerspiegelt. Diese traditionelle Versform, Zuschauern des britischen Kinderfernsehens der 1970er Jahre als Titelsong des Magazins *Magpie* (Elster) bekannt, verknüpft die Zahl der gesehenen Elstern (oder Krähen) mit einer Vorhersage der Zukunft. Es geht nicht so sehr ums Zählen wie ums Prophezeien.

* Eins, zwei, drei, vier, fünf,
Einst fing ich 'nen lebenden Fisch,
Sechs, sieben, acht, neun, zehn,
Dann ließ ich ihn wieder geh'n.

Die TV-Show verwendete den ersten Teil einer häufigen, gesäuberten Fassung:

One for sorrow, two for joy,
Three for a girl and four for a boy,
Five for silver, six for gold,
Seven for a secret, never to be told,
Eight for a wish and nine for a kiss,
Ten for a marriage never to be old.^{3*}

Die folgende, frühe Lancashire-Version zeichnet sich jedoch durch einen handfesteren Realismus aus:

One for anger, two for mirth,
Three for a wedding and four for a birth,
Five for rich, six for poor,
Seven for a bitch [or witch], eight for a whore,
Nine for a burying, ten for a dance,
Eleven for England, twelve for France.^{4**}

* Eins steht für Sorge, zwei für Wonne,
Drei für Mädchen, vier für Junge,
Fünf für Silber, sechs für Gold,
Sieben für ein Geheimnis, nie verraten,
Acht für einen Wunsch und neun für einen Kuss,
Zehn für eine Ehe, die niemals rostet.

** Eins steht für Ärger, zwei für Freude,
Drei für Hochzeit, vier für Geburt,
Fünf für Reich, sechs für Arm,
Sieben für Hündin [oder Hexe], acht für Hure,
Neun für Begräbnis, zehn für Tanz,
Elf für England, zwölf für Frankreich.

Viele Kinder entwickeln eine Faszination für einfache Folgen von natürlichen Zahlen. Sobald Kinder die Regeln verstanden haben, wie man Zahlen benennt, passiert es nicht selten, dass ihre Eltern sie bitten müssen aufzuhören, weil sie übermäßig viel Zeit damit verbringen, weiter und immer weiter zu zählen. Vielleicht wollen sie bis ans Ende kommen, die ‹höchste Zahl› benennen. Aber das ist eine Aufgabe, bei der sich der Wunsch nach Vollständigkeit nie erfüllen wird. Ein Kind kann für den Rest seines Lebens zählen und würde nie ans Ziel kommen. Kinder sind offenbar fasziniert von der Ordnung, dem einfachen Muster einer solchen elementaren, sich Schritt für Schritt entwickelnden Zahlenreihe.

Der Wunsch nach Ordnung gehört zur menschlichen Natur; wir sehen selbst dort Muster, wo keine sind. Wenn wir die Sterne anschauen, stellen wir uns Sternbilder vor – Formen, die diese leuchtenden Punkte zu einer Strichzeichnung verknüpfen, obwohl es in Wirklichkeit keinerlei Verbindung zwischen ihnen gibt. Denken Sie nur an das Sternbild Centaurus am Südhimmel. Deren hellster Stern, Alpha Centauri, ist uns am nächsten, nur vier Lichtjahre entfernt; der zweithellste Stern des Sternbilds, Beta Centauri (oder Agena, auch Hadar), ist 400 Lichtjahre entfernt, fast 100 Mal weiter. Wir verbinden irrigerweise zwei Objekte, die durch einen Abstand von mindestens 3 746 476 800 000 000 Kilometern getrennt sind.

Unsere eigene Sonne liegt viel näher an Alpha Centauri, als es Beta Centauri tut, aber wir würden kaum auf den Gedanken kommen, dass unsere Sonne und Alpha Centauri ein Muster bilden. Alpha und Beta Centauri sind nicht enger verknüpft, als es Houston und Kairo sind, nur weil sie auf

annähernd demselben Breitengrad liegen. Unsere Augen und Gehirne, die in den Myriaden blinkender Punkte am Himmel nach einer Struktur suchen, täuschen uns, indem sie uns Muster vorgaukeln.

Wir suchen vor allem deshalb nach Mustern, um uns das Wiedererkennen zu erleichtern. Unser Gehirn zerlegt die komplexen Konturen eines Fressfeinds oder eines menschlichen Gesichts in einfache Muster, die uns erlauben, beide aus verschiedenen Blickwinkeln und Entfernungen zu erkennen. Genauso, wie wir bei den materiellen Objekten rund um uns herum nach Mustern suchen, halten wir nach Mustern in Zahlengruppen Ausschau, und wenige sind einfacher und leichter zu begreifen als die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Die Auslassungszeichen am Ende der Folge, diese Gruppe von drei Punkten (...), ist eine Kurzschrift, die über den Bereich der Mathematik hinausreicht, obwohl wir ein wenig darauf achten müssen, wie sie verwendet wird. Normalerweise bedeutet sie lediglich «und so weiter» im Sinne von «mehr desselben», doch für Mathematiker, penibler als wir Übrigen, heißt dieses Kürzel «und so weiter ohne irgendein Ende». Es gibt keinen Punkt, an dem man sagen könnte, die Folge sei beendet, sie geht immer weiter. Und weiter. Und weiter.

Seit frühester Zeit, schon, als es noch keine Wissenschaft gab, aber der Mensch begann, die natürliche Welt und die Welt des Geistes zu erforschen, wurden solche Zahlenreihen voller Faszination studiert. Sie sind Ureinwohner der mathematischen Gefilde, ebenso reich und vielfältig wie irgendeine Tierfamilie auf biologischem Gelände. Einige Zahlenreihen sind fast so einfach wie die ersten Zählzahlen; so

führt die Verdopplung der vorangegangenen Zahl beispielsweise zu der Folge

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

Aber die Dinge müssen nicht immer derart hübsch geordnet sein. Es gibt Folgen, deren Richtung variiert, sodass sie zu tänzeln scheinen – zwei Schritte nach vorn und einen Schritt zurück:

$$1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, \dots$$

Oder es gibt Zahlenfolgen, die dadurch entstehen, dass man die beiden vorangegangenen Zahlen addiert, um die folgende zu erhalten, die sogenannten Fibonacci-Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Ebenso können wir über Addition und Subtraktion hinausgehen und ungestümere Ausflüge unternehmen, die sich vervielfachen und abheben wie ein Schwarm Vögel, der am Seeufer aufgescheucht wird; die Quadratzahlen, die ursprünglichen natürlichen Zahlen, mit sich selbst multipliziert, beispielsweise

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

oder das sich rasch beschleunigende Fortschreiten einer Folge, bei der die beiden vorangegangenen Terme multipliziert werden:

1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192, ...

Die meisten Folgen dieses Typs waren den griechischen Philosophen bekannt, die sich als Erste mit der Natur der Zahlen beschäftigten. Eine bestimmte Klasse von Folgen scheint sie jedoch besonders fasziniert zu haben. Dabei handelte es sich nicht um Folgen ganzer Zahlen, sondern von Brüchen.

Bei der einfachsten Folge von Brüchen nimmt man jede ganze Zahl und stellt sie in den Nenner des Bruchs:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Diese Zahlenfolge ist nichts Besonderes. Wenn wir jeden Term zum nächsten addierten, würde die Summe ohne Grenze weiterwachsen. Aber die griechischen Philosophen bemerkten ein ganz anderes – ein bizarr anderes – Verhalten, wenn sie eine winzige Veränderung vornahmen. Statt die aufeinanderfolgenden Zahlen in den Nenner des Bruchs zu setzen, wird die neue Folge dadurch gebildet, dass man die Zahl im Nenner verdoppelt. Das Ergebnis

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

hat eine sehr seltsame Eigenschaft, so seltsam, dass der Philosoph Zenon darauf zwei seiner immer noch berühmten Paradoxien aufbaute.

Wir wissen sehr wenig über Zenons Werk. Seine gesamten Schriften gingen bis auf ein paar hundert Worte verloren (und selbst bei diesen ist zweifelhaft, ob sie Zenon zugeschrieben werden können). Geblieben sind uns nur

Kommentare aus zweiter Hand, von Autoren wie Platon und Aristoteles, die keineswegs mit Zenons Ideen sympathisierten. Zenon war, das wissen wir, ein Student des Parmenides, der um 539 v. Chr. geboren wurde. Parmenides schloss sich der Schule von Elea in Süditalien an. Man kann die Ruinen dieser phönizischen Kolonie heute noch vor den Toren der modernen italienischen Stadt Castellammare di Stabia besichtigen. Dort betrieb die eleatische Schule eine Philosophie, die ein einziges, unveränderliches Sein postulierte – man ging davon aus, dass alles im Universum so ist, wie es ist, und jede Veränderung, jede Bewegung, nichts als eine Illusion ist.

Soweit wir wissen, könnte Zenon viel zur eleatischen Philosophie beigetragen haben, doch heute wird er allgemein als mathematisches One-Hit-Wonder erinnert. Was bei uns – wenn auch nur als schwacher Abglanz in Kommentaren anderer – angekommen ist, ist seine Begeisterung dafür, die Art und Weise zu hinterfragen, wie wir über Bewegung denken. Das demonstriert eine feste Überzeugung der Eleaten, die Leugnung der Existenz jedweder Veränderung, aber selbst in dieser indirekten Form meint man, ein metaphorisches Glitzern in Zenons Augen zu erkennen, während er seine Argumente darlegt. Die späteren Autoren, die die Paradoxien weitergeben, verweisen darauf, dass Zenon damals noch grün hinter den Ohren war. Zwar tun sie dies in herabsetzender Absicht, doch es lässt sich nicht leugnen, dass seinen Ideen ein durchaus positives Element jugendlicher Herausforderung anhaftet.

Insgesamt sind vierzig Betrachtungen Zenons über die statische Natur des Universums überliefert, doch vier von ihnen sind es, die auch heute noch unsere Fantasie beschäf-

tigen, und es sind diese vier, die sich besonders auf die Betrachtung von Bewegung und der seltsamen Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ auswirken.

Das einfachste der vier Paradoxa erzählt die Geschichte von Achilles und der Schildkröte. Achilles, der wohl schnellste Mann seiner Zeit, vergleichbar einem modernen Spitzensportler, tritt im Wettlauf gegen die gravitatische Schildkröte an. Wenn man an das Ergebnis eines sehr ähnlichen Rennens in einer Fabel von Äsop (etwa zeitgleich mit Zenons Paradoxien) denkt, ahnt man schon, dass die Schildkröte gewinnt. Aber anders als das Resultat beim Wettlauf zwischen Schildkröte und Hase ist dieses unwahrscheinliche Ergebnis nicht Faulheit und Einbildung geschuldet. Vielmehr nutzt Zenon die schiere Mechanik der Bewegung, um der Schildkröte den Siegerkranz zuzusprechen.

Zenon geht davon aus, dass Achilles der Schildkröte großzügigerweise einen Vorsprung einräumt – schließlich handelt es sich kaum um einen Wettkampf zwischen Gleichstarken. Die Schildkröte startet daher eine beträchtliche Strecke vor Achilles. In kurzer Zeit (Achilles ist ein hervorragender Läufer) erreicht der durchtrainierte Held den Punkt, an dem die Schildkröte gestartet ist. Inzwischen hat die Schildkröte, so langsam sie auch ist, ein kleines Stück Weg zurückgelegt. Sie liegt noch immer vorn. In noch kürzerer Zeit erreicht Achilles die neue Position der Schildkröte – doch diese kleine Zeitspanne hat die Schildkröte genutzt, um sich ein weiteres Stück Richtung Ziel zu bewegen. Und so geht der endlose Wettlauf, die physische Entsprechung der drei Punkte, immer weiter – Achilles verfolgt die Schildkröte bis in alle Ewigkeit, kann sie aber niemals ganz einholen.