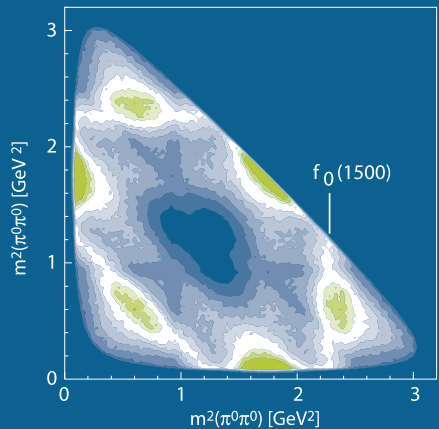


Claude Amsler

Kern- und Teilchenphysik



Titelbild: $2\pi^0$ -Massenverteilung in der niederenergetischen Proton-Antiproton-Vernichtung $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^0$. Die hellen (dunklen) Zonen entsprechen einer hohen (niedrigen) Intensität. Die Strukturen bzw. Bänder bei bestimmten Massen stammen von Vernichtungen über Zwischenzustände, z.B. $\bar{p}p \rightarrow \pi^0 f_0(1500)$, $f_0(1500) \rightarrow 2\pi^0$. Die Daten wurden mit dem Crystal Barrel-Detektor am CERN/LEAR aufgenommen (nach [1]).

Claude Amsler

Kern- und Teilchenphysik

v/dlf

vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Bei den Abbildungen in diesem Buch handelt es sich um

- Originaldarstellungen und Fotografien des Autors;
- Abbildungen aus Publikationen anderer Verlage, deren Copyright eingeholt wurde;
- Public-domain-Bilder aus verschiedenen Quellen im Internet.

Sollten trotz aller Sorgfalt versehentlich Urheberrechte verletzt worden sein, so geschah dies unwissentlich. Wir bitten die Inhaber der Copyrights, sich in diesem Falle mit dem Verlag oder dem Autor in Verbindung zu setzen.

Wir danken allen Urhebern für die Abbildungen.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-7281-3695-4

DOI: 10.3218/3695-4

© 2007, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich

Das Werk einschliesslich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ausserhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Internet: www.vdf.ethz.ch

E-Mail: verlag@vdf.ethz.ch

Vorwort

Als Grundlage für dieses Buch dient meine Vorlesung zu Kern- und Teilchenphysik, die ich regelmässig seit 1987 lese, als ich an die Universität Zürich berufen wurde. Die erste Version wurde im Wintersemester 1997 – 1998 in Form eines Vorlesungsskriptes unter unseren Physikstudierenden verteilt. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse der allgemeinen Experimentalphysik, der Mathematik (Analyse, lineare Algebra) sowie der Atomphysik (z.B. Schrödingergleichung, Operatorrechnung). An der Universität Zürich wird dieser Stoff als Einführungskurs im 5. und 6. Semester gelesen. Die Kap. 1 – 14 werden für den Bachelorabschluss in Experimentalphysik vorausgesetzt. Die weiterführenden Kap. 15 – 18 sind Grundlage für eine Bachelorarbeit in der Teilchenphysik.

Diese Einführung in die Welt der elementaren Bausteine der Materie ist phänomenologisch orientiert und richtet sich vor allem an Experimentalphysiker. Der Stoff ist historisch aufgebaut. Es wurde versucht, die Konzepte so darzustellen, wie sie meistens in der Physik durch induktives Denken hergeleitet wurden.

Bestimmte moderne Erkenntnisse werden eingehend beschrieben und phänomenologisch erläutert. Der Formalismus (z.B. Elektron-Kern-Streuung, Standard-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung oder Neutrino-Oszillation) wird detailliert hergeleitet und mit den Experimenten verglichen.

Im Gegensatz zur vorhandenen Literatur, die entweder Themen der Kernphysik oder der Hochenergiephysik behandelt, findet man in dieser Einführung grundlegende Begriffe aus beiden Gebieten. Dies kam daher, dass an der Universität Zürich eine gemeinsame Vorlesung dieser beiden Fächer angeboten wird, da die Physik der Kernstruktur wegen der Nähe zum Hochenergie-Forschungszentrum CERN in der Schweiz etwas an Bedeutung verloren hat.

Das Buch beschreibt insbesondere die Entwicklungen seit der Entdeckung der vielen Elementarteilchen in den fünfziger und sechziger Jahren bis zur wenig zurückliegenden Beobachtung der Neutrino-Oszillationen. Diese wichtige Entdeckung ist bislang die einzige Lücke, die im Standardmodell der Elementarteilchen gefunden wurde. Ende 2007 wird der Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Betrieb genommen, von dem man weitere Abweichungen erwartet und sich u.a. den Einblick in die neue Welt der supersymmetrischen Teilchen erhofft. Die Beschreibung des heutigen Standes in der Kern- und Teilchenphysik kommt mit dem Erscheinen dieses Buches vor diesem bevorstehenden Abenteuer zur rechten Zeit.

Empfohlene Literatur

Lehrbücher:

- I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, Gauge Theories in Particle Physics, Adam Hilger (1989)
C. Berger, Elementarteilchenphysik, Springer (2006)
K. Bethge, G. Walter, B. Wiedemann, Kernphysik, Springer (2001)
F. Close, An Introduction to Quarks and Partons, Academic Press (1979)
H. Frauenfelder, E.M. Henley, Teilchen und Kerne, Oldenbourg (1999)
F. Halzen, A.D. Martin, Quarks & Leptons, Wiley (1984)
W. Hering, Angewandte Kernphysik, Teubner (1999)
E. Lohrmann, Hochenergiephysik, Teubner (2005)
H. Machner, Einführung in die Kern- und Elementarteilchenphysik, Wiley-VCH (2005)
T. Mayer-Kuckuk, Kernphysik, Eine Einführung, Teubner (2002)
G. Musiol, Kern- und Elementarteilchenphysik, Harri Deutsch (1995)
D. H. Perkins, Introduction to High-Energy Physics, Cambridge (2000)
B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, Teilchen und Kerne, Springer (2006)
A. Seiden, Particle Physics, A Comprehensive Introduction, Addison Wesley, (2005)
N. Schmitz, Neutrino-physik, Teubner (1997)
W.S.C. Williams, Nuclear and Particle Physics, Oxford (1991)

Referenzwerk:

- W.-M. Yao et al., Review of Particle Physics, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 33 (2006) 1 (kapitelweise erhältlich unter <http://pdg.lbl.gov/>)

Detektoren:

- Th. Ferbel, Experimental Techniques in High-Energy Nuclear and Particle Physics, World Scientific (1991)
Dan Green, The Physics of Particle Detectors, Cambridge Monographs on Particle Physics (2005)
K. Kleinknecht, Detektoren für Teilchenstrahlung, Teubner (2005)
G. F. Knoll, Radiation Detection and Measurement, Wiley (2000)
W.R. Leo, Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer (2005)

Beschleuniger:

- F. Hinterberger, Physik der Teilchenbeschleuniger, Springer (1997)

Geschichte:

- F. Close, M. Marten, C. Sutton, Spurensuche im Teilchenzoo, Spektrum der Wissenschaft (1989)
R.N. Cahn, G. Goldhaber, The Experimental Foundations of Particle Physics, Cambridge (1991)
G. Fraser, E. Lillestol, I. Sellevag, The Search for Infinity, Mitchell Beazley (1994)
L. Lederman, The God Particle, Houghton Mifflin (1993)
A. Pais, Inward Bound, Oxford (1988)

Inhaltsverzeichnis

1	Entdeckung des Atomkernes	1
1.1	Rutherfordstreuung	2
1.1.1	Bemerkungen zu den Einheiten	6
1.1.2	Deutung des differentiellen Wirkungsquerschnitts	6
1.1.3	Rutherford-Wirkungsquerschnitt	8
2	Kernradius	11
2.1	Mottstreuung	11
2.2	Formfaktor	13
2.3	Spektroskopische Bestimmung des Kernradius	18
2.4	Formfaktor des Nukleons	20
3	Kernmassen	23
3.1	Fermi-Gasmodell	27
3.2	Tröpfchenmodell	31
4	Radioaktiver Zerfall	35
4.1	Zerfallsgesetz	35
4.2	Partialbreite und totale Breite	39
4.3	Poissonstatistik	41
5	Kernstabilität	43
5.1	γ -Zerfall	43
5.2	β -Zerfall	47
5.3	α -Zerfall	51
5.4	Induzierte Kernspaltung	58
6	Schalenmodell	63
6.1	Elektrisches Quadrupolmoment	68
7	Elementarteilchen	73
7.1	Einführung	73
7.2	Mesonen und Baryonen	76
7.3	Wechselwirkungen	78
7.3.1	Erhaltungssätze	81
7.3.2	Austauschkraft und Reichweite	83
7.3.3	Erhaltung des Quarkflavours	86
7.3.4	Wirkungsquerschnitt und Lebensdauer	88
7.4	Jenseits des Standardmodells	89

8	Relativistische Kinematik	93
8.1	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	94
8.2	$\pi \rightarrow \mu\nu$	101
8.3	Mandelstam Variablen s und t	103
8.4	Eigenzeit	105
9	Beschleuniger und Detektoren	107
9.1	Beschleuniger	107
9.2	Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie	114
9.3	Vielfachstreuung	119
9.4	Bremsung von Elektronen	121
9.5	Wechselwirkung von Photonen mit Materie	122
9.6	Drahtkammer	126
9.7	Szintillationszähler	129
9.8	Blasenkammer	130
9.9	Čerenkov-Zähler	130
9.10	Elektromagnetisches Kalorimeter	134
9.11	Hadron-Kalorimeter	136
10	Quarkmodell der Hadronen	139
10.1	Strangeness	139
10.2	Aufbau des Hadronenspektrums	141
10.2.1	Mesonen	141
10.2.2	Baryonen	144
10.2.3	Isospin	145
10.3	Schwere Quarks	149
10.3.1	Charmonium	151
10.3.2	Bottomonium	154
10.3.3	Quarkonium	155
10.4	Farbe	158
11	Erhaltungssätze	161
11.1	Impulserhaltung	162
11.2	Drehimpulserhaltung	162
11.3	Erhaltung der Parität	163
11.4	Interne Parität	167
11.5	Eichinvarianz	170
11.6	Helizität des Photons	172
11.7	Ladungskonjugation	179
11.8	Zeitumkehrinvarianz	183
11.8.1	Magnetisches und elektrisches Dipolmoment	184
11.9	CPT -Invarianz	187

12 Hadronische Wechselwirkung	189
12.1 2-Körperendzustand	190
12.1.1 Prinzip des detaillierten Gleichgewichts (detailed balance)	191
12.2 3-Körperendzustand	193
12.2.1 Spin des geladenen Kaons	196
12.2.2 Spin des ω -Mesons	197
12.2.3 Invariante Masse	199
12.3 Isospin	201
12.3.1 Nukleon-Nukleon-Streuung	203
12.3.2 Pion-Nukleon-Streuung	205
12.4 G -Parität	208
13 Schwache Wechselwirkung	211
13.1 Entdeckung des Neutrons	212
13.2 β -Zerfall	213
13.2.1 Erlaubte und “verbotene” Übergänge	215
13.2.2 ft -Wert	220
13.2.3 Die Kopplungskonstanten G_F und g_A/g_V	221
13.2.4 Sargent-Regel	221
13.3 Paritätsverletzung	223
13.3.1 Paritätsverletzung im Kern- β -Zerfall	223
13.3.2 $\pi - \mu - e$ -Zerfallskette	225
13.3.3 Das anomale magnetische Moment des Myons	227
14 Neutrinos	231
14.1 Elektron-Antineutrino	231
14.2 Masse des Elektron-Neutrinos	233
14.3 Sonnenneutrinos	234
14.4 Helizität des Neutrinos	237
14.5 Dirac- und Majorana-Neutrinos	240
14.6 Neutrino-Oszillationen	241
14.6.1 Oszillationsmechanismus	243
14.6.2 Oszillationen zwischen drei Neutrinosorten	245
14.6.3 Δm_{23}^2 -Oszillationen	247
14.6.4 Δm_{12}^2 -Oszillationen	248
15 Dirac-Gleichung	251
15.1 Standard-Darstellung	254
15.2 Linkshändige und rechtshändige Spinoren	257
15.3 Parität	259
15.4 Ladungskonjugation	260
15.5 Strom	260
15.6 Strom-Strom-Wechselwirkung	261

16 Elektroschwache Wechselwirkung	265
16.1 $V - A$ -Wechselwirkung	265
16.2 Schwacher Isospin	271
16.2.1 Neutrale schwache Ströme	273
16.2.2 Experimenteller Nachweis der neutralen Ströme	273
16.3 GIM-Mechanismus	277
16.4 Lokale Eichinvarianz in QED	279
16.5 Spontane Symmetriebrechung	282
16.6 Eichinvarianz in der elektroschwachen Wechselwirkung	284
16.7 Glashow-Weinberg-Salam-Modell	287
17 Anwendungen des Standardmodells	297
17.1 Paritätsverletzung in der Elektron-Deuterium-Streuung	297
17.2 Die W - und Z^0 -Bosonen	302
17.2.1 W -Breite	307
17.2.2 Z^0 -Breite	310
17.3 Neutrino-Streuung	312
17.3.1 Streuung geladener Ströme	313
17.3.2 Neutrino-Quark-Streuung	315
17.3.3 Streuung neutraler Ströme	318
17.3.4 Rein leptonische Reaktionen	320
18 Neutrale Kaonen	323
18.1 Die K_1 - und K_2 -Zustände	323
18.1.1 Messung der Lebensdauer der K_1 - und K_2 -Zustände	327
18.1.2 $K^0 - \bar{K}^0$ -Schwingungen	329
18.1.3 Regeneration	331
18.2 CP -Verletzung	333
18.2.1 Indirekte CP -Verletzung	335
18.2.2 Direkte CP -Verletzung	340
18.3 Semileptonische Zerfälle	343
18.3.1 Messung der T -Verletzung	344
Literatur	347
Index	353
Farbtafeln	361

1 Entdeckung des Atomkernes

Die Kernphysik fing am 1. März 1896 mit der Entdeckung der Radioaktivität durch Henri Becquerel an. Becquerel entdeckte, dass Uransalze (z.B. Kaliumuranyldisulfid, $K_2UO_2(SO_4)_2 \cdot 2H_2O$) Schwärzungsspuren auf einer Photoplatte erzeugten. Die dafür verantwortliche Strahlung wurde zunächst als durchdringende UV-Strahlung aufgefasst, da Röntgen im vorigen Jahr die X -Strahlung entdeckt hatte. Becquerel nannte seine Strahlung “rayons uraniumes” (das Wort “Radioaktivität” wurde von Marie Curie eingeführt). Rutherford und andere entdeckten, dass “Radioaktivität” aus mindestens drei Strahlungsarten besteht: (i) die α -Strahlung, die leicht absorbiert und in einem Magnetfeld abgelenkt wird, (ii) die eindringende β -Strahlung (die Becquerel ursprünglich beobachtet hatte), die im Magnetfeld in die entgegengesetzte Richtung abgelenkt wird, und (iii) die γ -Strahlung, die vom Feld nicht abgelenkt wird. Die α - und β -Strahlungen besitzen daher entgegengesetzte elektrische Ladungen, während die γ -Strahlung elektrisch neutral ist.

Rutherford bezeichnete die emittierte Energie als “Atomenergie”¹. Weil man das Atom als elementaren Baustein auffasste, war es zuerst unklar, woher diese Energie stammte². War der Energiesatz verletzt oder war das Atom doch in kleinere Bruchstücke zerlegbar?

Weitere radioaktive Atome wurden entdeckt, unter anderem Polonium und Radium (Pierre und Marie Curie, 1898). Im Jahre 1909 beobachteten Rutherford und Geiger die charakteristischen Spektrallinien von He, indem sie das Gas in einer Glimmröhre mit einer Radiumquelle bestrahlten³. Daraus schlossen sie, dass Heliumatome α -Teilchen sind, die ihre positive Ladung verloren haben!

J. J. Thomson war nach seiner Entdeckung des Elektrons im Jahre 1897 der Auffassung, dass das Atom aus einem Pudding von Elektronen und positiven Ladungen besteht, wobei nur die Elektronen zur Masse des Atoms beitragen. Das Wasserstoffatom enthielt somit ca. 2000 Elektronen. Diese Auffassung wurde 1906 revidiert, als die Rate für Röntgenstreuung an Hüllenelektronen gemessen wurde und mit dem so genannten Thomson-Wirkungsquerschnitt verglichen wurde. Für Wasserstoff erhielt man danach 1 bis 2 Elektronen.

Nach der Entdeckung des Atomkernes im Jahre 1911 durch Rutherford, Geiger und Marsden, die wir gleich behandeln werden, stellte man sich das Atom als einen harten Kern mit A positiven Ladungen und $(A - Z)$ Elektronen (totale positive Ladung Ze) vor, der von einer Elektronenhülle (negative Ladung $-Ze$) umgeben ist. Die Elektronen im Kern waren für die β -Strahlung verantwortlich⁴. Das einfachste Atom, der Wasserstoff,

¹Dieses Wort wurde bis in die fünfziger Jahre benutzt, selbst nach der Explosion der “Atom”bombe, weil die Bezeichnung “Kernenergie” im Publikum eine Beziehung mit dem Kern einer Zelle, also mit Biologie, hätte erwecken können (nach L. Groves, Leiter des Manhattan Projektes).

²Das Wort “Atomos” wurde von den Griechen eingeführt (Demokrit). Damals waren die fundamentalen Bausteine (Atome) die Elemente Erde, Luft, Feuer und Wasser. Bis zu Lavoisier (1743–1794) glaubte man noch, dass Wasser elementar ist. Das Atom als Basiseinheit der chemischen Substanzen wurde von Dalton (1808) eingeführt. Er entdeckte, dass die Masse einer chemischen Substanz durch die Summe der Massen ihrer Bestandteile gegeben ist. Prout (1815) stellte ausserdem fest, dass der Quotient aus der Masse eines Atoms und der Masse vom elementarsten Atom, Wasserstoff, (ungefähr) eine ganze Zahl ist.

³He wurde 1895 von Ramsey im Uranerz entdeckt.

⁴Das Neutron wurde erst 1932 entdeckt und die Theorie des β -Zerfalls als $n \rightarrow p$ -Umwandlung wurde

bestand aus einer positiven Ladung, die Rutherford mit "Proton" bezeichnete, und einem Hüllenelektron. Das heute gültige Atommodell wurde 1913 von Bohr eingeführt.

1.1 Rutherfordstreuung

Geiger und Marsden, zwei Mitarbeiter von Rutherford, untersuchten α -Streuung an dünnen Folien an der Universität Manchester. Die Apparatur (Abb. 1) bestand aus einer evakuierten Kammer, einer kollimierten Ra-Quelle R (kinetische Energie der α -Teilchen $T = 4.78 \text{ MeV}$) und einem ZnS-Szintillator S, der um eine dünne Gold- oder Silberfolie F im Zentrum der Kammer geschwenkt werden konnte.

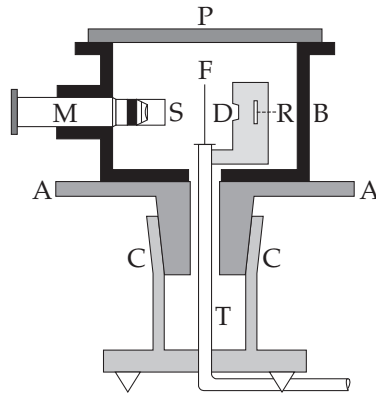


Abbildung 1: Apparatur von Rutherford, Geiger und Marsden (nach [2]).

Die gestreuten α -Teilchen erzeugten Lichtblitze im Szintillator, die mit einem Mikroskop beobachtet wurden. Die Zahl der Lichtblitze bei vorgegebener Messzeit als Funktion des Streuwinkels θ ist in Tabelle 1 gegeben. Bei kleinen Winkeln wurde die Quelle stärker kollimiert, da das menschliche Auge Raten über 90/Min. nicht erfassen kann. Geiger und Marsden beobachteten, dass die Rate wie $1/\sin^4 \frac{\theta}{2}$ mit zunehmendem Streuwinkel abnahm. Erstaunlich war die Beobachtung von rückwärts gestreuten α ($\theta > 90^\circ$). Das ist nur möglich, wenn das Atom aus einem harten schweren Teilchen besteht, in dem die elektrische Ladung konzentriert ist: der Atomkern⁵.

Wir versuchen nun, die Streuung quantitativ zu verstehen (Abb. 2), und machen dabei die folgenden (modernen) Annahmen:

1. Der Atomkern sei viel schwerer als das Geschoss (Masse m , Geschwindigkeit v), womit die Rückstossenergie des Kernes vernachlässigbar ist (d.h. $v' = v$). Dies gilt nicht für freie Atome, aber für Atome, die im Gitter eines Kristalles gebunden sind.

1934 von Fermi formuliert.

⁵Nach Rutherford ist das Phänomen ähnlich einer Kanonenkugel, die von einem Kleenextuch zurückgestreut wird.

Tabelle 1: Zählrate N als Funktion des Streuwinkels θ nach Rutherford, Geiger und Marsden.

		Silber		Gold	
θ [°]	$\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$	N	$N \sin^4 \frac{\theta}{2}$	N	$N \sin^4 \frac{\theta}{2}$
150	1.15	22.2	19.3	33.1	28.8
135	1.38	27.4	19.8	43.0	31.2
120	1.79	33.0	18.4	51.9	29.0
105	2.53	47.3	18.7	69.5	27.5
75	7.25	136	18.8	211	29.1
60	16.0	320	20.0	477	29.8
45	46.6	989	21.2	1435	30.8
37.5	93.7	1760	18.8	3300	35.3
30	223	5260	23.6	7800	35.0
22.5	690	20300	29.4	27300	39.6
15	3445	105400	30.6	132000	38.4
30	223	5.3	0.024	3.1	0.014
22.5	690	16.6	0.024	8.4	0.012
15	3445	93.0	0.027	48.2	0.014
10	17330	508	0.029	200	0.0115
7.5	54650	1710	0.031	607	0.011
5	276300	–	–	3320	0.012

- Der Kern und das Geschoss seien **punktförmig** mit Ladungen $+Ze$ bzw. $+ze$ und haben Spin 0.
- Die Wechselwirkung wird nur durch die elektromagnetische Wechselwirkung (Coulombkraft) beschrieben.
- Der Kern wird im Streuprozess nicht angeregt (**elastische** Streuung) und das Geschoss verliert keine Energie durch die Wechselwirkung mit der Elektronenhülle, die keine Rolle spielt (da $m \gg m_e$).

Aus dem Drehimpulssatz folgt dann für jeden Punkt auf der Trajektorie (s. Abb. 2, v_{\perp} ist die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu \vec{r}):

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvb = mv_{\perp}r = m\omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2}}. \quad (1)$$

Der asymptotische senkrechte Abstand b zur Strahlachse heisst **Stossparameter**. Der Streuwinkel sei θ . Die Projektion des asymptotischen Impulses auf die Achse \vec{n} lautet vor dem Stoss $-mv \cos(\pi - \theta)/2 = -mv \sin \theta/2$ und $+mv \sin \theta/2$ nach dem Stoss.

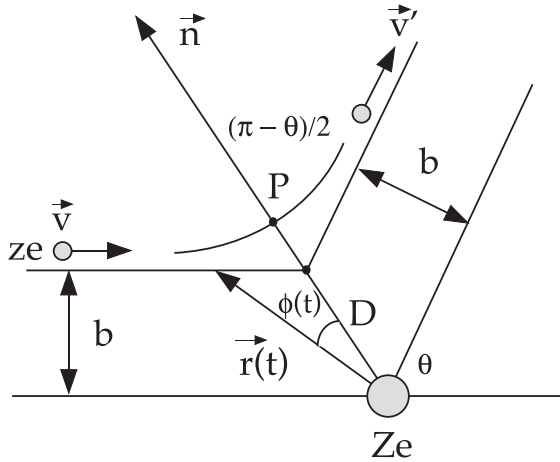


Abbildung 2: Rutherfordstreuung.

Somit ist die Impulsänderung entlang \vec{n} :

$$\Delta p = 2mv \sin \frac{\theta}{2} = \int K_n dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi dt. \quad (2)$$

Aus (1) ist

$$dt = \frac{r^2}{vb} d\phi, \quad (3)$$

sodass

$$\Delta p = \int_{-\frac{(\pi-\theta)}{2}}^{\frac{(\pi-\theta)}{2}} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 vb} \cos \phi d\phi = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 vb} 2 \cos \frac{\theta}{2}, \quad (4)$$

also mit (2)

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{\underbrace{4\pi\epsilon_0 mv^2}_K} \frac{1}{b}. \quad (5)$$

Wir finden also eine eindeutige Beziehung zwischen dem Stossparameter b und dem Streuwinkel θ . Für grosse bzw. kleine Abstände bekommen wir:

$$\begin{aligned} b \rightarrow \infty &\Leftrightarrow \theta \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \theta \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Betrachten wir nun die Einheitskugel (Abb. 3): Einfallende Teilchen, die durch den Ring mit Fläche

$$d\sigma = 2\pi b |db| \quad (7)$$

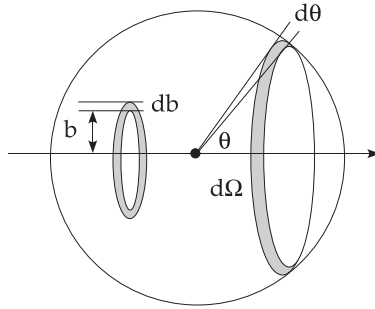


Abbildung 3: Die Einheitskugel (Radius = 1)

fliegen, werden zwischen θ und $\theta + d\theta$ in den Raumwinkel

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(-\cos \theta) \quad (8)$$

gestreut. Die Fläche $d\sigma$ heisst **differentieller Wirkungsquerschnitt**. Aus (5) folgt

$$|db| = \left| d\left(\frac{K}{\tan \frac{\theta}{2}}\right) \right| = \left(\frac{K}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta, \quad (9)$$

also nach (7)

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{K^2}{\tan^3 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (10)$$

Dividiert man durch $d\Omega$, so bekommt man mit (8) die Rutherford-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{K^2}{\tan^3 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta} = \frac{K^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{zZe^2}{16\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (11)$$

mit der kinetischen Energie $T = mv^2/2$. Wir führen die dimensionslose **Feinstrukturkonstante**

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036} \quad (12)$$

und die **natürlichen Einheiten**

$$\hbar = c = 1 \quad (13)$$

ein. Somit vereinfacht sich (11) zu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16T^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (14)$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung in $d\Omega$. Wie wir gleich sehen werden, ist Formel (14) ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut wird, beschreibt also die **Winkelverteilung** des gestreuten Teilchens.

1.1.1 Bemerkungen zu den Einheiten

In der Kern- und Teilchenphysik werden Energien stets in eV (keV, MeV, GeV, TeV) angegeben⁶. Wie bekommen wir dann aus Glg. (14) für $d\sigma$ die Dimension einer Fläche (z.B. cm^2), wenn T in MeV angegeben wird? Mit unserer Wahl der Einheiten (13) wurden cm^{-1} in MeV undefiniert⁷:

$$\boxed{\hbar c = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 1} . \quad (15)$$

Also ist

$$1 \text{ MeV} \equiv \frac{1}{197.3} \text{ fm}^{-1}. \quad (16)$$

Ähnlich ist wegen $c = 1$

$$1 \text{ s} \equiv 2.998 \times 10^{10} \text{ cm}. \quad (17)$$

Wir können also stets in allen Rechnungen \hbar und c ignorieren (= 1) und erst im Schlussergebnis durch eine Überlegung zu den Einheiten die Umwandlung $\text{cm} \leftrightarrow \text{s} \leftrightarrow \text{MeV}^{-1}$ mit (16) oder (17) durchführen.

Ferner haben wir in (12) die elektrische Ladung e durch die dimensionslose Grösse α ersetzt

$$e^2 \Rightarrow 4\pi\epsilon_0\alpha, \quad (18)$$

weil wir SI-Einheiten für die Coulombkraft verwendet haben. Manchmal wird die Coulombkraft $e^2/4\pi r^2$ geschrieben (die sog. Heaviside-Lorentz-Einheiten mit $\epsilon_0 = 1$). Dann müsste man

$$e^2 \Rightarrow 4\pi\alpha \quad (19)$$

schreiben, damit das Ergebnis wie Glg. (14) aussieht. In ESU-Einheiten lautet die Coulomb-Kraft e^2/r^2 . Daher müsste man

$$e^2 \Rightarrow \alpha \quad (20)$$

schreiben, damit das Ergebnis wie Glg. (14) aussieht. Für eine Rechnung ist es also wichtig festzustellen, in welchen Einheiten die Coulombkraft geschrieben wurde, bevor e^2 durch α ersetzt wird. Es muss allerdings betont werden, dass α in allen Einheiten stets den numerischen Wert $\simeq 1/137$ annimmt.

1.1.2 Deutung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Betrachten wir einen Strahl mit Querschnitt F , der auf ein Target der Länge ℓ fällt (I_0 einfallende Teilchen pro Sek., Abb. 4). Der **totale Wirkungsquerschnitt** ist die effektive Fläche σ , die von einem Kern aufgespannt wird, bei der eine Reaktion mit einem einfallenden Teilchen stattfinden kann. Diese Grösse hängt von der Energie T , der Teilchensorte und der Natur der Wechselwirkung ab.

⁶ 1 eV = Energiezuwachs einer Elementarladung in einem Potential von 1V, also $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

⁷ 1 fm = 10^{-13} cm .

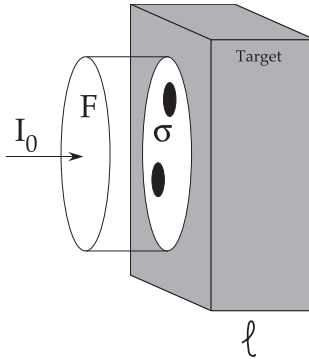


Abbildung 4: Zur Definition des Wirkungsquerschnitts.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion pro Sek. für **ein** Strahlteilchen und **einen** Targetkern lautet: σ/F . Die Anzahl Streuzentren im Strahl ist $n\ell F$, mit n = Anzahl Kerne pro Volumeneinheit. Nimmt man an, dass ℓ klein genug ist, sodass sich die Flächen σ nicht überdecken, dann ist die Anzahl Streuungen pro Sek. gegeben durch

$$I = \frac{\sigma}{F} n\ell F I_0 = I_0 \sigma n\ell, \quad (21)$$

mit

$$n = \frac{\rho L}{A}, \quad (22)$$

wo ρ die Dichte, L die Avogadro-Zahl und A das Atomgewicht ist. Üblicherweise verwendet man als Einheit für σ das "barn"⁸:

$$1\text{b} = 10^{-24}\text{cm}^2. \quad (23)$$

Die Anzahl Streuungen pro Sek. in den Raumwinkel $d\Omega$ lautet dann:

$$\frac{dI}{d\Omega} d\Omega = I_0 n\ell \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{d\Omega} = I_0 n\ell \frac{d\sigma}{d\Omega}}. \quad (24)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (Dimension $\text{b} \cdot \text{sr}^{-1}$) beschreibt die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen und hängt vom physikalischen Prozess ab. Die gestreute Rate R in einem Detektor der Fläche S im Abstand d vom Streuzentrum ($S \ll d^2$) lautet dann mit $\Delta\Omega \simeq S/d^2$:

$$R = I_0 n\ell \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{d^2}. \quad (25)$$

⁸aus dem Englischen "barn" (Scheune), weil gewisse Wirkungsquerschnitte, z.B. für langsame Neutronen an Uran, "so gross wie eine Scheune" sind.

1.1.3 Rutherford-Wirkungsquerschnitt

Die Beziehung (14) beschreibt den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Rutherford-Streuung, der wie $1/\sin^4 \frac{\theta}{2}$ mit zunehmendem Winkel θ abnimmt, im Einklang mit den experimentellen Beobachtungen von Geiger und Marsden (Abb. 1). Das Atom besteht also aus einem harten Kern (Ladung $+Ze$). Es folgen eine Reihe von Bemerkungen:

1. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wächst mit Z^2 bei festem Winkel θ .
2. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ wird unendlich gross für $\theta \rightarrow 0$. Das soll uns aber nicht stören, da bei sehr kleinen Streuwinkeln der Stossparameter b den Radius der Elektronenhüllen übertrifft. Die Ladung des Kernes wird dann abgeschirmt und der Faktor $Ze \rightarrow 0$.
3. Bei der Streuung an einem nackten (vollständig ionisierten) Kern divergiert trotzdem $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für $\theta \rightarrow 0$. Ferner ist

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta = \infty, \quad (26)$$

sodass der **totale** Wirkungsquerschnitt σ für Rutherford-Streuung eigentlich nicht definiert ist. Dies ist eine Eigenschaft der elektromagnetischen Wechselwirkung, die mit ihrer unendlichen Reichweite verbunden ist. Für Wechselwirkungspotentiale, die schneller als $1/r$ abklingen (z.B. die Kernkraft, s. später), bleibt σ endlich.

4. Der kürzeste Abstand zum Kernzentrum (Übungsaufgabe)

$$D = \frac{zZ\alpha}{2T} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}\right) \quad (27)$$

erreicht bei $\theta = 180^\circ$ (Rückwärtsstreuung) ein Minimum:

$$D_{min} = \frac{zZ\alpha}{T}. \quad (28)$$

Der kürzeste Abstand sinkt also mit abnehmendem Z und wachsender kinetischer Energie. Ist der Kernradius grösser als D , dann erwartet man eine Abweichung von der Rutherford-Formel (14), weil die Annahme des punktförmigen Kernes zusammenbricht. Eine gute Näherung für den Kernradius ist $a \sim 1.2 \text{ fm } A^{1/3}$ (siehe nächstes Kap.). Für Gold ($Z = 79$, $A = 197$) ist also $a \sim 7 \text{ fm}$ und für $T = 4.78 \text{ MeV}$, $z = 2$, $D_{min} = 48 \text{ fm}$ (zur Umrechnung der Einheiten verwenden Sie Glg. (16)). Geiger und Marsden hatten also Glück: Mit wesentlich höheren kinetischen Energien und/oder leichteren Targets hätten sie ihre Daten nicht mit Glg. (14) erklären können. Da ihre Daten mit der Rutherford-Formel übereinstimmten, konnten sie eine obere Grenze (von 48 fm) für den Radius des Au-Kernes angeben.

Im Jahre 1921 untersuchten Chadwick und Bieler αp -Streuung an einem Wasserstofftarget ($Z = 1$). Der gemessene $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ wich von der Rutherford-Formel signifikant

ab⁹. Modelle, die die endlichen Ladungsverteilungen des α und des p berücksichtigten, konnten die Daten nicht beschreiben. Für die Diskrepanz ist die **starke** Wechselwirkung verantwortlich, die erst bei sehr kleinen Abständen einsetzt (~ 1 fm). Eine befriedigende Erklärung dieser neuen Kraft kam erst 1935 von Yukawa, der ein hypothetisches Feldteilchen, das π , einführte. 1921 kann aber als eigentliches Geburtsjahr der Teilchenphysik betrachtet werden!

In den sechziger Jahren wurden Radien von zahlreichen Kernen (und vom Proton) gemessen. Um Verwicklungen mit der endlichen Ausdehnung des α -Teilchens zu vermeiden, wurden allerdings punktförmige Proben verwendet, nämlich Elektronen. Dazu muss die Rutherford-Formel relativistisch neu hergeleitet (und der Einfluss der Spins berücksichtigt) werden. Da dafür die Dirac-Gleichung benötigt wird, werden im nächsten Kapitel nur Hinweise gegeben.

5. Könnte die Beobachtung der grossen Streuwinkel durch mehrfache Streuungen (**Vielfachstreuung**) im Thomson'schen Pudding auch erklärt werden? Betrachten wir dazu das Problem des eindimensionalen "Random Walks" mit m Schritten der Schrittlänge $D_i = \pm 1$ (vorwärts oder rückwärts) mit je 50% Wahrscheinlichkeit. Nach einem Schritt ist $\langle D_1 \rangle = 0$, aber der mittlere quadratische Abstand ist

$$\langle D_1^2 \rangle = 1. \quad (29)$$

Nach $i + 1$ Schritten ist der Weg

$$D_{i+1} = D_i \pm 1 \Rightarrow D_{i+1}^2 = D_i^2 + 1 \pm 2D_i \Rightarrow \langle D_{i+1}^2 \rangle = \langle D_i^2 \rangle + 1, \quad (30)$$

und nach m Schritten ist der mittlere quadratische Abstand

$$\langle D_m^2 \rangle = m \Rightarrow \sqrt{\langle D_m^2 \rangle} = \sqrt{m}. \quad (31)$$

In einem einfachen Modell können wir uns die Vielfachstreuung als eine Reihe von Streuungen mit konstantem Winkel θ_i vorstellen, und zwar in einer zweidimensionalen Ebene, jeweils nach links oder nach rechts. Aus der Analogie mit dem Random Walk erwarten wir dann den mittleren Streuwinkel:

$$\sqrt{\langle \theta_i^2 \rangle} = \sqrt{m} \propto \sqrt{\ell}. \quad (32)$$

Rutherford und Mitarbeiter fanden aber, dass die Streurate bei grossen Winkeln mit der Targetdicke ℓ wächst, und nicht mit $\sqrt{\ell}$, im Einklang mit Formel (24).

6. Man überzeugt sich leicht, dass die Rutherford-Formel (14) auch gilt, wenn die Ladung ze des Projektils negativ ist (anziehende Coulombkraft, $\theta \rightarrow -\theta$ in Glg. (5)). In diesem Fall ist der minimale Abstand

$$D = \frac{zZ\alpha}{2T} \left(-1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \rightarrow 0, \text{ wenn } \theta \rightarrow 180^\circ. \quad (33)$$

⁹In diesem Fall muss der Rückstoss des Protons in der Herleitung der Streuformel mitberücksichtigt werden.

Seizième année. — N° 779.

Huit pages : CINQ centimes

Dimanche 10 Janvier 1904.

Le Petit Parisien

TOUS LES JOURS
Le Petit Parisien
deux pages
5 centimes
UNION POSTALE
LE SUPPLÉMENT LITTÉRAIRE
5 centimes

SUPPLÉMENT LITTÉRAIRE ILLUSTRÉ

DIRECTION: 18, rue d'Enghien (10^e), PARIS

ABONNEMENTS

PARIS ET DÉPARTEMENTS
12 francs, 10 francs, 8 francs, 5 francs
UNION POSTALE
ET ÉTRANGER, 5 francs, 4 francs, 3 francs



UNE NOUVELLE DÉCOUVERTE. — LE RADIUM
M. ET M^{me} CURIE DANS LEUR LABORATOIRE

Abbildung 5: Titelblatt einer Zeitschrift aus dem Jahre 1904 (aus [3]).

2 Kernradius

Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, erwartet man bei höheren Energien wegen der endlichen Ausdehnung des Kernes eine Abweichung von der Rutherford-Formel, weil (i) das Projektil in die Ladungsverteilung des Kernes eindringt und (ii) die starke Wechselwirkung (Kernkraft) in der Nähe der Kernoberfläche einsetzt. Will man die **elektrische Ladungsverteilung** des Kernes untersuchen, so sollte man Projektile wählen, die (i) punktförmig (strukturlos) sind und (ii) für die Kernkraft unempfindlich sind. Ein Beispiel dafür ist das Elektron (oder das Myon)¹⁰.

Damit das Elektron für die endliche Dimension des Kernes empfindlich ist, muss seine De Broglie-Wellenlänge vergleichbar mit dem Kernradius a sein:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi}{p} \sim a. \quad (34)$$

(Wir werden diese Aussage noch genauer formulieren.) Für Gold ($a = 7$ fm) braucht man somit Impulse p von ca. $1 \text{ fm}^{-1} \simeq 200 \text{ MeV}/c$ ¹¹. Solche Elektronen sind hochrelativistisch ($v \simeq c$, da $m_e = 0.511 \text{ MeV}$). Dementsprechend muss die Streuformel relativistisch hergeleitet werden. Ausserdem besitzt das Elektron im Gegensatz zum α -Teilchen einen Spin. Eine genaue Herleitung erfordert die Dirac-Gleichung.

2.1 Mottstreuung

Wir gehen von der Rutherford-Formel (14) aus und definieren den **Impulsübertrag**

$$\boxed{\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'}, \quad (35)$$

wobei \vec{p} (\vec{p}') die Impulse des Elektrons vor bzw. nach dem Stoss sind. Man erhält dann für den Betrag von \vec{q} , wenn man den Rückstoss vernachlässigt ($p = p'$):

$$q^2 \equiv \vec{q}^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{q = 2p \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (36)$$

Für ein nicht relativistisches Elektron ($T = p^2/2m_e$) finden wir für den Rutherford-Wirkungsquerschnitt (14):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2 16p^4}{16T^2 q^4} = \frac{Z^2\alpha^2}{q^4} 4m_e^2. \quad (37)$$

Die relativistische Verallgemeinerung für die Streuung eines Spin-1/2-Elektrons an einem punktförmigen Spin-0-Kern bekommen wir, indem wir die Masse m_e des Elektrons

¹⁰Will man hingegen die Kernkraft untersuchen, so ist es vorteilhaft, elektrisch neutrale stark wechselwirkende Teilchen wie Neutronen zu wählen.

¹¹Energien werden in MeV angegeben, Massen wegen $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$ in MeV/c^2 (oder einfach MeV, da $c = 1$). Üblicherweise gibt man Impulse in MeV/c und nicht in MeV an (obwohl $c = 1$), um Verwirrungen zwischen Energie und Impuls zu vermeiden.

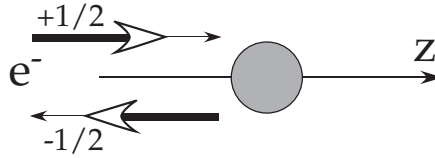


Abbildung 6: Rückwärtsstreuung eines Elektrons mit Spin an einem spinlosen Target.

durch seine totale Energie ($E = T + m_e c^2$) ersetzen und mit einem Faktor $\cos^2\theta/2$ für den Spin des Elektrons multiplizieren:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \frac{4Z^2\alpha^2 E^2}{q^4} \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad (38)$$

den **Mott**'schen differentiellen Wirkungsquerschnitt. Um den Faktor $\cos^2\theta/2$ heuristisch zu deuten, betrachten wir die Rückwärtsstreuung des Elektrons am Kern (Abb. 6). Wir wählen als z -Achse die Richtung des einfallenden Elektrons. Der totale Drehimpuls \vec{J} setzt sich zusammen aus dem Elektronenspin \vec{s} und dem Bahndrehimpuls \vec{L} : $\vec{J} = \vec{s} + \vec{L}$. Für jeden Punkt auf der Trajektorie (z -Achse) verschwindet der Bahndrehimpuls ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 0$), sodass die Projektion des totalen Drehimpulses auf die z -Achse $M = \frac{1}{2}$ (oder $-\frac{1}{2}$) ist. Drehimpulserhaltung verlangt $\Delta M = 0$ im Stoßprozess. Durch die Coulombkraft kann sich die Projektion des Spins entlang der **Flugrichtung** des Elektrons nicht ändern (eine Eigenschaft, die aus der Dirac-Gleichung folgt), also $\Delta M = \pm 1$ (wie in Abb. 6). Rückwärtsstreuung ist also durch Drehimpulserhaltung verboten und $\cos^2\theta/2 \rightarrow 0$ für $\theta \rightarrow 180^\circ$ (Glg. (38)) im Gegensatz zur α -Kern-Streuung.

Der Mott-Querschnitt ist für folgende Streuprozesse anwendbar:

1. Das Projektil ist punktförmig mit Spin $\frac{1}{2}$ und ist hochrelativistisch ($v \simeq c$).
2. Der Rückstoß des Kernes ist vernachlässigbar klein, sodass sich die Energie des Elektrons im Stoßprozess nicht ändert¹².

¹²Der Rückstoß führt zu einem (meist kleinen) multiplikativen Korrekturfaktor zum Mott-Querschnitt:

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M}} \quad (39)$$

mit E' = Energie des auslaufenden Elektrons und M = Masse des Kernes. Ausserdem muss q durch den **4-Impulsübertrag**

$$q^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \simeq -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (40)$$

ersetzt werden, wobei die Masse des Elektrons vernachlässigt wurde. Da q^2 jetzt negativ ist, schreibt man eher $Q^2 = -q^2$. Der Mott-Querschnitt lautet dann

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \frac{4Z^2\alpha^2 E'^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (41)$$

3. Der Kern ist spinlos¹³.
4. Der Kern ist punktförmig.
5. Die Ladung Z des Kernes ist nicht zu gross¹⁴, $(\alpha Z)^2 \ll 1$.

2.2 Formfaktor

Wir berechnen nun die Korrektur zum Mott-Querschnitt (38) für eine endliche Ausdehnung des Kernes. Dazu betrachten wir die Beugung einer einfallenden ebenen Welle an einer zweidimensionalen Scheibe (Abb. 7) mit Radius a .

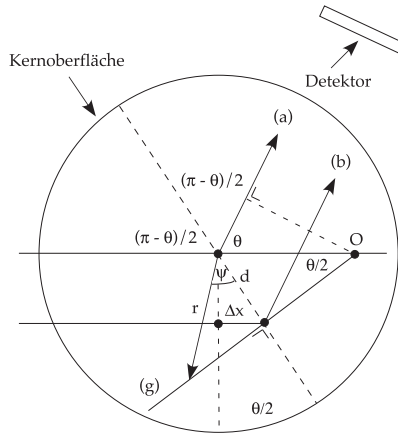


Abbildung 7: Beugung einer ebenen Welle am Kern.

Der Strahl (a), der am Kernzentrum gestreut wird, erzeugt eine Intensitätsverteilung am Detektor:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = |A_a(\theta)|^2, \quad (42)$$

wobei $A_a(\theta)$ für eine komplexe **Streuamplitude** steht. Die Amplitude für den Strahl (b) wird ebenfalls durch $A_a(\theta)$ beschrieben, aber mit einer Phasenverschiebung δ , die vom Wegunterschied zwischen (a) und (b) abhängt:

$$\delta = 2(\Delta x)k = 2d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)p = qd \quad (43)$$

mit (36) und $\hbar k$ (k = Wellenzahl) = p ($\hbar = 1$). Die Amplitude für den Strahl (b) lautet dann

$$A_b = A_a \exp(i\delta). \quad (44)$$

¹³Für Kerne mit Spin muss noch die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Elektrons und des Kernes berücksichtigt werden.

¹⁴Für schwere Kerne kommen noch quantenmechanische Korrekturen höherer Ordnungen vor.

Nun ist die Phasenverschiebung δ für alle Streuzentren auf der Geraden (g) gleich. Man betrachte dazu das Streuzentrum O, denn der Wegunterschied bezogen auf den Strahl (a) lautet

$$\frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \theta = \frac{d}{\sin \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta) = 2d \sin \frac{\theta}{2} = 2\Delta x, \quad (45)$$

vgl. (43). Wir betrachten nun den Beitrag zur Streuamplitude für einen beliebigen Punkt auf (g):

$$dA = \rho(\vec{r}) \underbrace{r^2 \sin \psi d\beta d\psi dr}_{\text{Volumenelement auf (g)}} \exp(iqd) A_a(\theta). \quad (46)$$

Dabei ist $\rho(\vec{r})$ die Kernladungsdichte über das Kernvolumen auf eins normiert:

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1. \quad (47)$$

Wir integrieren über das Kernvolumen:

$$\begin{aligned} A &= A_a(\theta) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(\vec{r}) \underbrace{\exp(iqd)}_{\exp(iqr \cos \psi) = \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r})} r^2 \sin \psi d\beta d\psi dr \\ &= A_a(\theta) \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d^3\vec{r}, \end{aligned} \quad (48)$$

d.h.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_a(\theta)|^2 \left| \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d^3\vec{r} \right|^2, \quad (49)$$

oder

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M |F(q)|^2}, \quad (50)$$

mit dem **Formfaktor**

$$\boxed{F(q) = \int \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d^3\vec{r}}. \quad (51)$$

Der Formfaktor beschreibt den Einfluss der Kernaushdehnung und ist die **Fourier**transformierte der Ladungsverteilung. Für einen punktförmigen Kern ist

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r}) \Rightarrow F(q) \equiv 1, \quad (52)$$

wie erwartet. Für kleine Streuwinkel bekommt man aus der Normierung (47)

$$\theta \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow 0) \Rightarrow F(0) = 1. \quad (53)$$

In der Tat wird bei kleinen Winkeln der Stossparameter so gross, dass das Elektron weit am Kern vorbeifliegt und nur eine Punktladung sieht.

Der Formfaktor (51) weicht wesentlich von eins ab, wenn $\vec{q} \cdot \vec{r} \simeq 1$, d.h. $q \simeq 1/r$ für alle Punkte im Integrationsbereich, also

$$q \simeq \frac{1}{a} \Rightarrow q \simeq 200 \text{ MeV}/c \quad (54)$$

für $a = 1$ fm. Um die Kernstruktur aufzulösen, braucht man also Impulsüberträge im Bereich von einigen 100 MeV/c.

Für eine (beliebige) kugelsymmetrische Ladungsverteilung ($\rho(\vec{r}) = \rho(r)$) lässt sich der Formfaktor schreiben, vgl. (48):

$$F(q) = \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp(iqr \cos \psi) \overbrace{\sin \psi d\psi}^{-d \cos \psi} d\beta}_{-\frac{2\pi}{iqr} [\exp(iqr \cos \psi)]_1^{-1}} = \int_0^\infty \rho(r)r^2 4\pi \frac{\sin qr}{qr} dr, \quad (55)$$

also

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(qr) dr. \quad (56)$$

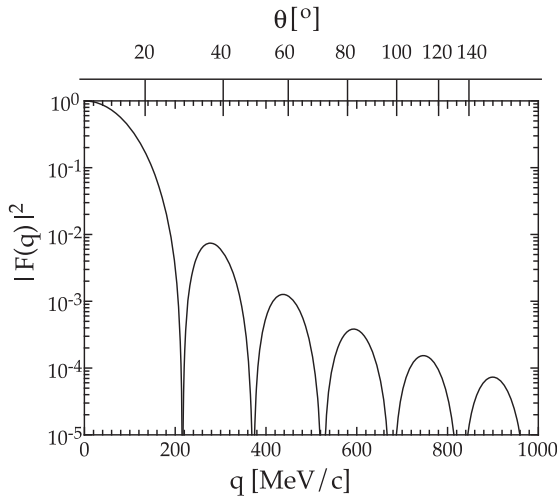


Abbildung 8: Verlauf von $|F(q)|^2$ für eine homogene Ladungsverteilung mit $a = 4.1$ fm und $p = 450$ MeV/c.

Betrachten wir als Spezialfall eine homogene Dichteverteilung bis zum Radius a :

$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4\pi a^3}. \quad (57)$$

Glg. (56) liefert dann durch partielle Integration

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{4\pi}{q} \rho_0 \int_0^a r \sin(qr) dr = \frac{3}{a^3 q} \left(\left[\frac{-r \cos qr}{q} \right]_0^a + \int_0^a \frac{\cos qr}{q} dr \right) \\ &= \frac{3[\sin(aq) - aq \cos(aq)]}{(aq)^3}, \end{aligned} \quad (58)$$

die sphärische Besselfunktion $j_1(aq)$ mit Nullstellen bei

$$\tan(aq) = aq. \quad (59)$$

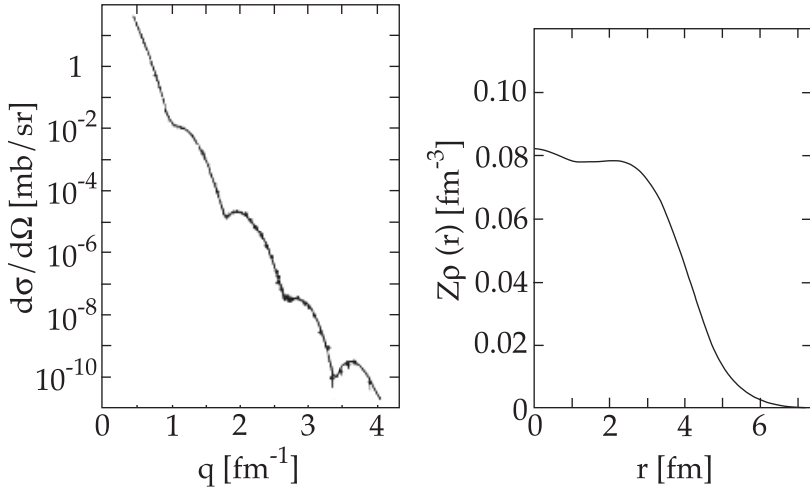


Abbildung 9: a) Differentieller Wirkungsquerschnitt für 450 MeV/c Elektronen an ^{58}Ni ; b) zugehörige Ladungsverteilung $Z\rho$ (nach [4]).

Abb. 8 zeigt den Verlauf des Formfaktors als Funktion von q für eine homogene Ladungsverteilung mit Radius $a = 4.1 \text{ fm}$ (^{58}Ni) oder als Funktion von θ (Glg. (36)) für $p = 450 \text{ MeV/c}$ Elektronen. Die Beugung der einfallenden Welle führt zu Maxima und Minima (Ringe bei gegebenen Winkeln in der Ebene senkrecht zum Strahl) ähnlich der Fraunhofer'schen Beugung von Licht an einem Loch.

Die Nullstellen des Formfaktors sind charakteristisch für scharfe Kanten. Der Kern hat eigentlich keine scharfen Kanten, sondern eine ausgedehnte Ladungsverteilung, die langsam nach null abklingt. Dies führt zu einer Verschmierung der Nullstellen. Abb. 9a zeigt den gemessenen Wirkungsquerschnitt an ^{58}Ni mit 450 MeV/c Elektronen. Aus dem ersten Minimum ($q = 1.1 \text{ fm}^{-1}$) findet man mit der ersten Nullstelle von Glg. (59)

$$aq = 4.49 \Rightarrow a = 4.1 \text{ fm}, \quad (60)$$

woraus man den Kernradius geschätzt hat.

Im Prinzip könnte man aus der Messung des Wirkungsquerschnitts den Formfaktor und die Ladungsverteilung dann durch die umgekehrte Fouriertransformation bestimmen. Das ist leider nicht möglich, weil $d\sigma/d\Omega$ aus praktischen Gründen nur über einem begrenzten Winkelbereich messbar ist. Man versucht deshalb Modelle für die Ladungsverteilung zu finden, die den gemessenen Wirkungsquerschnitt reproduzieren. Eine geeignete Anpassung zu den Daten liefert die **Saxon-Woods**-Verteilung (Abb. 10):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{d}\right)}. \quad (61)$$

Die Grösse a wird als **Kernradius** definiert. Aus zahlreichen Messungen findet man mit

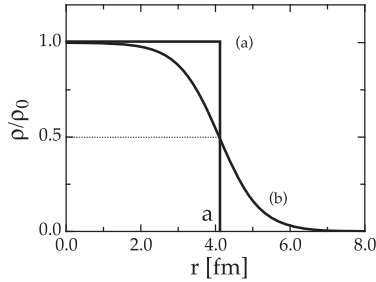


Abbildung 10: Homogene Ladungsverteilung (a) und Saxon-Woods-Verteilung (b) mit $a = 4.1$ fm und $d = 0.55$ fm.

der Saxon-Woods-Verteilung den Kernradius a und die “Skin”-Dicke d :

$$\begin{aligned} a &= 1.18A^{\frac{1}{3}} - 0.48 \text{ fm}, \\ d &= 0.55 \pm 0.07 \text{ fm} \end{aligned} \quad (62)$$

für Kerne mit $A \geq 40$.

Abb. 9b zeigt den Verlauf der Ladungsverteilung, der den Daten (Abb. 9a) entspricht. Hier wurde eine leicht modifizierte Version der Saxon-Woods-Verteilung verwendet [4]. Die experimentelle Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts erfolgt mit einem magnetischen Spektrometer und wird im Unterkapitel 2.4 über Formfaktoren des Nukleons erläutert.

Die Messungen des Formfaktors für das Proton führt zu einer exponentiellen Ladungsverteilung. Man überlegt sich leicht (Übungsaufgabe), dass

$$\rho = \frac{1}{8\pi a^3} \exp(-r/a) \Rightarrow F(q) = \frac{1}{(1+a^2q^2)^2}, \quad (63)$$

den sog. **Dipol-Formfaktor** liefert. Die Ladungsverteilung

$$\rho = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \exp(-r/a) \Rightarrow F(q) = \frac{1}{1+a^2q^2} \quad (64)$$

liefert den **Monopol-Formfaktor**.

Für leichte Kerne wie ${}^6\text{Li}$ findet man eher eine Gaussverteilung. Die Gaussverteilung der Ladungsdichte liefert auch eine Gaussverteilung als Formfaktor:

$$\rho = \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \Rightarrow F(q) = \exp\left(-\frac{a^2q^2}{2}\right). \quad (65)$$

Abb. 11 zeigt die Ladungsverteilung für verschiedene Kerne. Man beobachtet, dass $eZ\rho$ bei kleinen Radien ungefähr konstant ist, ca. $1.1 \times 10^{19} \text{ C cm}^{-3}$ für alle Kerne, dass also die Kernmaterie **inkompressibel** ist. Die Dichte der Protonen (mit der Masse des Protons $m_p = 1.7 \times 10^{-24} \text{ g}$) ist dann ungefähr $eZ\rho_0$ ($m_p/1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) = 10^{14} g/cm^3 !

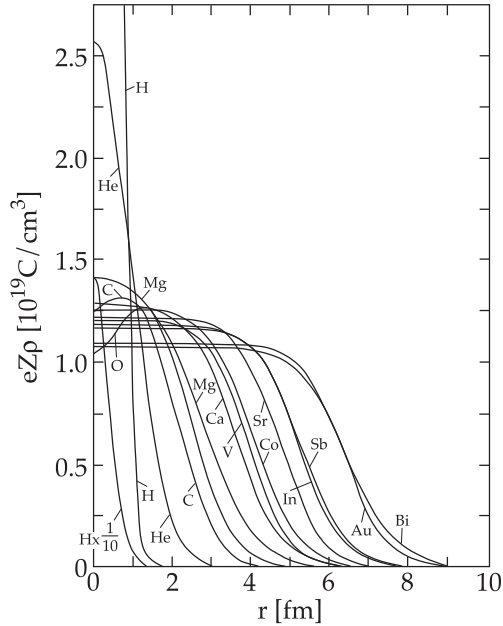


Abbildung 11: Ladungsverteilung $eZ\rho$ für verschiedene Kerne (nach [5]).

Entwickelt man schliesslich den Sinus-Faktor in Glg. (56) in Potenzen von $x = qr$, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 F(q) &\simeq \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho r \left(qr - \frac{q^3 r^3}{6} \right) dr = 1 - \frac{4\pi}{6} \int_0^\infty q^2 \rho r^4 dr \\
 &= 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle, \tag{66}
 \end{aligned}$$

mit dem mittleren quadratischen Kernradius

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr \simeq -6 \frac{dF}{dq^2} \Big|_{q^2=0}. \tag{67}$$

Der mittlere Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ lässt sich also über die Steigung des Formfaktors F gegenüber q^2 in Vorwärtsrichtung bestimmen.

2.3 Spektroskopische Bestimmung des Kernradius

Die Bindungsenergie der Hüllenelektronen ist quantisiert und hängt von der Kernladung ab (Rydberg-Energie, s. das Wasserstoffatom). Wegen der endlichen Ausdehnung der Elektronen- und Kernwellenfunktionen entsteht eine kleine Verschiebung gegenüber der Rydberg-Energie, die durch die Messung der atomaren Übergänge (Photonenemission)