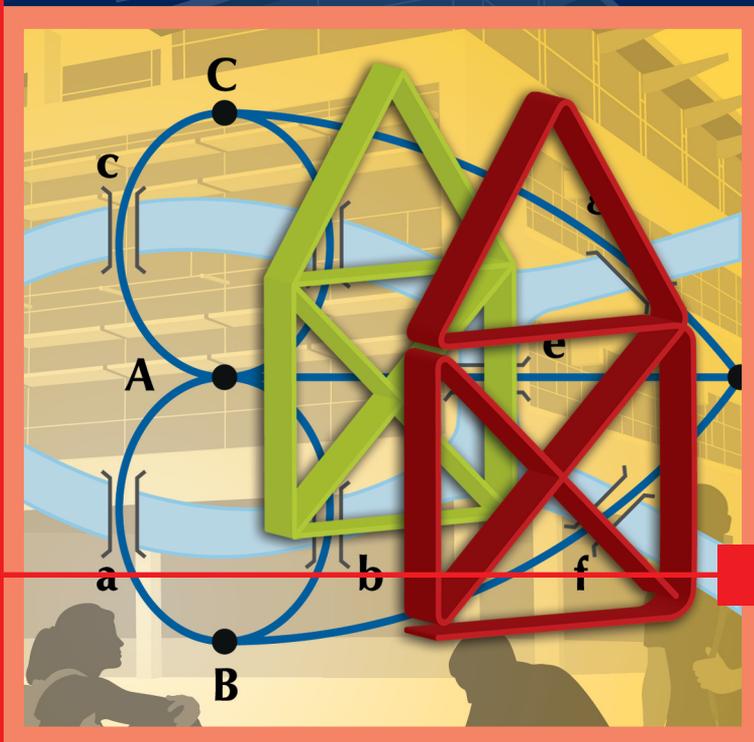


André Krischke
Helge Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

Grundlagen – Methoden – Anwendungen



HANSER

Quantitative Methoden

hrsg. von

Prof. Dr. rer. pol. Robert Galata

Prof. Dr. rer. nat. Markus Wessler

Röpcke/Wessler, Wirtschaftsmathematik

Galata/Scheid, Deskriptive und Induktive Statistik
für Studierende der BWL

Galata/Wessler/Augustin/Scheid, Empirische Wirtschaftsforschung

Krischke/Röpcke, Graphen und Netzwerktheorie

André Krischke
Helge Röpcke

Graphen und Netzwerktheorie

Grundlagen – Methoden – Anwendungen

Mit 137 Bildern und zahlreichen Beispielen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. André Krischke
Hochschule für angewandte Wissenschaften München
Fakultät für Betriebswirtschaft

Dipl.-Math. techn. Helge Röpcke
Hochschule für angewandte Wissenschaften München
Fakultät für Betriebswirtschaft

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-43229-1
E-Book-ISBN 978-3-446-44184-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung
des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne
schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm
oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung –
mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert
oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder
verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag
© 2015 Carl Hanser Verlag München
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Satz: André Krischke, Helge Röpcke, München
Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg
Printed in Germany

**»Der Weltuntergang steht bevor,
aber nicht so, wie Sie denken.
Dieser Krieg jagt nicht alles in die Luft,
sondern schaltet alles ab.«**



Tom DeMarco
Als auf der Welt das Licht ausging

ca. 560 Seiten. Hardcover
ca. € 19,99 [D] / € 20,60 [A] / sFr 28,90
ISBN 978-3-446-43960-3
Erscheint im November 2014

**Hier klicken zur
Leseprobe**

Sie möchten mehr über Tom DeMarco und seine Bücher erfahren.
Einfach reinklicken unter www.hanser-fachbuch.de/special/demarco

Vorwort

Das vorliegende Buch beschäftigt sich, so sagt der Name, mit Graphen und mit Netzwerken. Streng genommen handelt es sich dabei um ein und dasselbe; wir verwenden in diesem Buch den Begriff *Netzwerk* in der Regel zur Kennzeichnung realer Strukturen aus der Praxis, während wir den Begriff *Graph* meist im eher theoretischen Kontext benutzen. Durch den Gebrauch dieser beiden Begriffe werden auch die beiden Sichtweisen auf eine Thematik deutlich, die in unzähligen für unsere Zeit wichtigen Herausforderungen eine Rolle spielen: die Darstellung und Beschreibung, qualitativer wie quantitativer Art, von immer komplexeren Strukturen, mit denen Beziehungen von abstrakten Objekten, aber auch von Menschen, Unternehmen, Staaten modelliert werden können.

Die beiden erwähnten Sichtweisen, nämlich auf der einen Seite die mathematisch wichtigen Aspekte der Graphentheorie und auf der anderen Seite das Modellieren praktischer Problemstellungen vor wirtschaftswissenschaftlichem Hintergrund, greifen natürlich ineinander. Mit diesem Buch wird ein ernstzunehmender Versuch unternommen, die Schnittstellen und Verbindungen zwischen beiden Seiten verständlich darzustellen – wie immer wandert man dabei aber auch auf dem bekannten schmalen Grat zwischen „zu theoretisch für BWL“ und „zu praktisch für Mathematik“.

Das Buch hat, den beiden Sichtweisen entsprechend, zwei Ziele: Es soll die Grundlagen der Graphentheorie näherbringen, und es soll anhand ausgewählter Praxisthemen einen Eindruck davon vermitteln, wie wirtschaftlich relevante Probleme mit dieser Art von Mathematik angegangen werden können. Das Buch ist in drei Teile gegliedert:

1. **Grundlagen der Graphentheorie:** Die Graphentheorie, so werden Sie als Leserin oder als Leser schnell feststellen, hat als separates Gebiet der Mathematik ihre eigene Sprache, in die wir im ersten Teil einen Einblick geben wollen. Das mag zunächst ungewohnt klingen, bietet jedoch eine Chance: Alles in der Graphentheorie lässt sich im Prinzip in einer überaus anschaulichen Art und Weise und für jedermann und jedefrau formulieren – ohne dass ein Haufen mathematischer Vorkenntnisse erforderlich wäre und aktiviert werden müsste. Es ist tatsächlich so: Haben wir erst einmal die wichtigsten Vokabeln dieser Sprache erlernt, können wir uns an die Behandlung der Anwendungsprobleme im zweiten Teil machen.
2. **Ausgewählte Probleme der Graphentheorie:** Ein Graph besteht aus Knoten und aus Kanten, die diese Knoten verbinden können. Viel mehr muss man zunächst nicht wissen. Jede mathematische Teildisziplin lässt sich durch einige typische, zentrale Fragestellungen charakterisieren, und bei der Graphentheorie klingen diese in ihrer praktischen Formulierung beispielsweise so: „Wie komme ich in einem Graphen am schnellsten von einem Knoten zum anderen?“, „Wie kann ich die Knoten eines Graphen optimal einfärben?“, „Wie finde ich eine günstige Darstellung eines Graphen?“
3. **Netzwerktheorien und -modelle:** Noch praxisbezogener ist der dritte Teil, in dem wir uns ausführlich mit den verschiedensten Arten von großen Netzwerken der Praxis beschäftigen – so etwa mit Unternehmens- und Wissensnetzwerken oder auch sozialen und biologischen

Netzwerken. Wir benutzen dabei die Sprache der Graphentheorie und kommen immer wieder auf die zentralen Anwendungsprobleme und Fragen aus dem zweiten Teil zurück.

Ein überaus spannender Aspekt bei Graphen und Netzwerken besteht darin, dass die erwähnten zentralen Fragen sich meist sehr einfach formulieren lassen, sich aber hinsichtlich der Komplexität ihrer Beantwortbarkeit durchaus unterscheiden können: Manche sind eindeutig und schnell lösbar, manche sind „schwer lösbar“ – ein Begriff, den wir noch präzisieren müssen – manche sind auch mehrdeutig oder nachweisbar nicht lösbar. Für große Netzwerke in der Praxis muss man häufig auf numerische Simulationen zurückgreifen.

Was die Sprache betrifft, wie sie heute in der sogenannten diskreten Mathematik verwendet wird, kann man sagen, dass etwa zur Mitte des letzten Jahrhunderts eine Wiederentdeckung der Graphentheorie stattfand. Die vorgestellten Optimierungskonzepte, so etwa kürzeste Wege in Netzwerken, überschneidungsfreie Darstellungen oder Färbungsprobleme, sind von großem Interesse und die Algorithmen stetiger Aktualisierung und Verbesserung unterworfen. Seit dem Aufkommen des Internets sind empirische Daten für große Netzwerke der Praxis verfügbar, die Ende der 1990er Jahre eine neue Welle der Netzwerktheorien angestoßen haben. Wir bleiben im gesamten Buch bei „praktischer Graphentheorie“, selbst wenn die Graphentheorie auch und vor allem überreich an theoretischen, noch ungelösten Fragestellungen ist. Was also ein Graph oder ein Netzwerk ist und wo diese Strukturen benötigt werden und hilfreich sein können, das soll mithilfe des vorliegenden Buches anhand der angedeuteten Fragestellungen geklärt werden. Dabei lassen sich bereits zahlreiche Anwendungsbereiche identifizieren:

- Kürzeste-Wege-Probleme
- Rundreiseprobleme
- Straßenplanung, Ampelschaltungen
- Computernetzwerke, Schaltpläne
- Stundenpläne, Prüfungspläne
- Gozinto-Graphen, Produktionsplanung
- Breiten- und Tiefensuche
- Jobvermittlung, Partnersuche
- Müllabfuhr, Postbotentour
- ...
- Erzeugung von Netzwerken
- Robustheit von Netzwerken
- Ausbreitung in Netzwerken
- Suche in Netzwerken
- Soziale Netzwerke
- Transportprozesse
- Individuelles und kollektives Verhalten
- Verbreitung von Gerüchten
- Spieltheorie in Netzwerken
- ...

Das Selbststudium dieses Buches sollte in jedem Fall mit Kapitel 1 beginnen, da dort die fundamentalen Grundlagen für die Beschäftigung mit graphentheoretischen Problemen gelegt werden und eine Einführung in die Sprache der Graphen umfasst. Die weiteren Kapitel sind größtenteils voneinander unabhängig. Sie basieren auf entsprechenden Vorlesungen und Seminaren, die die Autoren an der Hochschule für angewandte Wissenschaften München halten.

Den Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München gilt unser besonderer Dank, da wir durch spannende Diskussionen in unseren Veranstaltungen interessante Ideen und wertvolle Anmerkungen für dieses Buch mitnehmen konnten. Herrn Bernhard Storf danken wir für die Durchsicht des Manuskripts und dem Hanser Verlag für die immer gute und flexible Zusammenarbeit.

München, im August 2014

André Krischke
Helge Röpcke

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen der Graphentheorie 13

1 Grundbegriffe der Graphentheorie 15

1.1	Grundbegriffe für Graphen	16
1.1.1	Definition eines Graphen	16
1.1.2	Grad eines Knotens	18
1.1.3	Wege und Kreise	21
1.2	Typen von Graphen	23
1.2.1	Vollständige Graphen	23
1.2.2	Bipartite Graphen	26
1.2.3	Gerichtete Graphen und Multigraphen	28
1.2.4	Bewertete Graphen	29
1.2.5	Bäume und Wälder	33
1.2.6	Gozinto-Graphen	36

2 Das Kürzeste-Wege-Problem in unbewerteten Graphen 39

2.1	Aufspannende Bäume	39
2.2	Breitensuche	41
2.3	Tiefensuche	44
2.4	Anwendungen in der Praxis	47

3 Das Kürzeste-Wege-Problem in bewerteten Graphen 52

3.1	Der Kürzeste-Wege-Baum und die kombinatorische Explosion	52
3.2	Der Algorithmus von Dijkstra	56

II Ausgewählte Probleme der Graphentheorie 64

4 Das Problem minimal aufspannender Bäume 66

4.1	Minimal aufspannender Baum	66
4.2	Algorithmus von Kruskal	68
4.3	Algorithmus von Prim	71

5	Matching-Probleme	74
5.1	Definition von Matchings	74
5.2	Matchings für bipartite Graphen	76
5.3	Maximal-Matching-Algorithmen	78
5.3.1	Greedy-Matching-Algorithmus	79
5.3.2	Verbessernde Wege	80
6	Das Problem des chinesischen Postboten	83
6.1	Euler-Kreise und Euler-Wege	83
6.2	Postbotenproblem	90
7	Das Problem des Handlungsreisenden	95
7.1	Hamilton-Kreise und Hamilton-Wege	95
7.1.1	Existenz von hamiltonschen Graphen	97
7.1.2	Problem des Handlungsreisenden	98
7.2	Heuristiken	100
7.3	Anwendungen in der Praxis	104
8	Färbungsprobleme	110
8.1	Planarität und Satz von Euler	110
8.2	Knotenfärbung	115
8.3	Kantenfärbung	120
8.4	Dualität zwischen Knoten- und Kantenfärbung	122
III	Netzwerktheorien und -modelle	124
9	Netzwerktheorie – Bedeutung und neuere Erkenntnisse	126
9.1	Große Netzwerke in der Praxis	126
9.1.1	Interorganisations-Netzwerke	127
9.1.2	Beziehungs-, Freundschafts- und soziale Netzwerke	128
9.1.3	Informations-, Daten- und Wissensnetzwerke	129
9.1.4	Technologische Netzwerke	132
9.1.5	Biologische Netzwerke	134
9.2	Ausgewählte Erkenntnisse der Netzwerkforschung	135
9.2.1	Forschung im Bereich sozialer Netzwerke	136
9.2.2	Cluster als Kennzeichen sozialer Netzwerke	137
9.2.3	Kurze Wege als Kennzeichen sozialer Netzwerke	139
9.2.4	Skalen-Invarianz als Kennzeichen großer Netzwerke	140

9.2.5	Universalität als Kennzeichen großer Netzwerke	143
9.3	Weiterführende Literatur	145
10	Eigenschaften von Netzwerken	146
10.1	Charakterisierung von Netzwerken auf Knoten-Ebene	146
10.1.1	Unterscheidung von Hubs und Authorities	146
10.1.2	Lokaler Cluster-Koeffizient	147
10.1.3	Zentralitätsmaße eines Knotens	148
10.2	Charakterisierung von Netzwerken auf Teilgraphen-Ebene	150
10.2.1	Verfahren zum Auffinden zusammenhängender Komponenten	152
10.2.2	Algorithmen zum Auffinden von Communities	153
10.2.3	Klassifizierende Verfahren zum Auffinden von Communities	154
10.3	Charakterisierung von Netzwerken mit statistischen Größen	156
10.3.1	Mittlerer Knotengrad und durchschnittliche Netzwerkdicke	157
10.3.2	Häufigkeitsverteilung der Kontengrade	158
10.3.3	Der Durchmesser und die mittlere Pfadlänge des Netzwerks	160
10.3.4	Der globale Cluster-Koeffizient (C) eines Netzwerks	161
10.4	Weiterführende Literatur	161
11	Entstehung von Netzwerken – Netzwerkmodelle	162
11.1	Erzeugung von Netzwerken mit Gleich- oder Binomialverteilung	163
11.1.1	Erzeugung von Gittergraphen mit deterministischen Regeln	163
11.1.2	Erzeugung eines Erdős-Renyi-Zufallsgraphen	165
11.1.3	Erzeugung des Watts-Strogatz-Modells – zwischen Kreis- und Zufallsgraph	170
11.2	Erzeugung von Netzwerken mit skalenfreier Verteilung	174
11.2.1	Erzeugung eines skalenfreien Netzwerks durch das Wachstumsmodell ..	174
11.2.2	Erzeugung eines skalenfreien Netzwerks mit dem Barabasi-Albert-Modell des „Preferential Attachment“	175
11.2.3	Erweiterungen des Barabasi-Albert-Modells	178
11.3	Weiterführende Literatur	181
12	Dynamische Prozesse auf großen Netzwerken	182
12.1	Robustheit von Netzwerken	182
12.1.1	Relevanz und Erscheinungsformen	182
12.1.2	Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	185
12.1.3	Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	187

12.2 Epidemische Ausbreitung in Netzwerken	187
12.2.1 Relevanz und Erscheinungsformen	188
12.2.2 Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	190
12.2.3 Homogene Modelle zur Beschreibung der Ausbreitung.....	191
12.2.4 Netzwerkmodelle zur Beschreibung der Ausbreitung	193
12.2.5 Impfung in heterogenen Netzwerken	194
12.2.6 Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	197
12.3 Suche in Netzwerken	197
12.3.1 Relevanz und Erscheinungsformen	198
12.3.2 Wesentliche Modelle und Lösungsverfahren	198
12.3.3 Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	201
12.4 Transportprozesse in Netzwerken	201
12.4.1 Datenverkehr und Datenstau in Netzwerken	202
12.4.2 Kaskaden in Transportnetzwerken	205
12.4.3 Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	209
12.5 Kollektives Verhalten in Netzwerken	209
12.5.1 Meinungsbildung in Netzwerken – Das Voting-Modell.....	210
12.5.2 Informationskaskaden in Netzwerken	211
12.5.3 Spieltheorie in Netzwerken	213
12.5.4 Zusammenfassung wesentlicher Erkenntnisse	215
12.6 Dynamische Prozesse in Netzwerken – Forschungsbedarf	215
12.7 Weiterführende Literatur	216

13 Softwarebasierte Analyse und Modellierung großer Netzwerke 217

13.1 Die Modellbildung als Forschungsprozess	217
13.1.1 Formulierung der Forschungsfrage	218
13.1.2 Formulierung der Forschungshypothesen	218
13.1.3 Festlegung der Modellstruktur	219
13.1.4 Implementierung und Verifikation des Modells	220
13.1.5 Analyse und Validierung des Modells	221
13.1.6 Ergebnisdarstellung zur Entscheidungsunterstützung.....	221
13.2 Softwarebasierte Analyse und Visualisierung	222
13.2.1 Vorgehen bei der Datenbeschaffung und Datenimport	223
13.2.2 Softwarebasierte Erzeugung von Netzwerken	225
13.2.3 Grundlagen der Visualisierung und des Graphzeichnens.....	226
13.2.4 Softwarebasierte Analyse großer Netzwerke	228

13.3 Softwarebasierte Simulation dynamischer Prozesse in Netzwerken	231
13.3.1 Vergleich verschiedener Simulationsmodelle	231
13.3.2 Agentenbasierte Simulationsmodelle auf regulären Netzwerken.....	233
13.3.3 Simulation des Wachstums von Netzwerken	235
13.3.4 Simulation dynamischer Prozesse in Netzwerken	236
13.3.5 Simulation dynamischer Prozesse auf dynamischen Netzwerken.....	238
13.3.6 Generierung von Simulationsdaten und Durchsuchen des Lösungs- raums	239
13.4 Schlussbetrachtung zur softwarebasierten Modellierung	240
13.5 Weiterführende Literatur	241
Literaturverzeichnis	242
Bildnachweise	247
Sachwortverzeichnis	248



Grundlagen der Graphentheorie

In diesem ersten Teil sind die für die Praxisanwendungen wichtigen mathematischen Prinzipien der Graphentheorie zusammengestellt. Die Graphentheorie kommt mit wenigen zentralen Begriffen aus. Zuerst wird erklärt, was im Allgemeinen unter einem Graphen verstanden wird; anschließend werden einige spezielle Graphentypen näher erläutert. Wir werden uns Fragen stellen wie:

- Was versteht man unter einem Knotengrad?
- Wie sehen Bäume in der Graphentheorie aus?
- Unter welchen Voraussetzungen spricht man von nachbarschaftlichen Verhältnissen?

Ein interessanter Aspekt an der Graphentheorie ist, dass man im Wesentlichen ohne ein breites mathematisches Vorwissen auskommt. Zwar kann es an vielen Stellen hilfreich sein, über einige mathematische Grundkenntnisse zu verfügen. Wie man aber schnell feststellen wird, bedeutet die Beschäftigung mit der Graphentheorie, innerhalb der Sprache der Mathematik einen neuen Dialekt zu erlernen. Die Leserinnen und Leser werden merken, dass tatsächlich viele Begriffe in ihrer Darstellung genau ihrer Intuition oder Vorstellung entsprechen werden.

Kapitel zwei und drei geben einen Einblick in die Problematik der kürzesten Wege auf unbewerteten und bewerteten Graphen und stellen damit das Rüstzeug für den zweiten und den dritten Teil des Buchs zur Verfügung.

1

Grundbegriffe der Graphentheorie

Am Anfang einer neuen Theorie stehen oft wegbereitende Fragen und Beispiele, die die Menschen interessieren und beschäftigen. Nach diesem Prinzip gehen wir in diesem Buch vor: In allen nachfolgenden Kapiteln möchten wir mit einem solchen Beispiel beginnen – so auch in diesem ersten Grundlagenkapitel. Hier muss natürlich das wohl berühmteste Problem der Graphentheorie erwähnt werden, das in der Tat die Entwicklung der Graphentheorie erst angestoßen hat. Bezeichnend ist, dass es sich hierbei um ein Problem handelt, das wohl so mancher vielleicht als *typisch mathematisch* bezeichnen würde. Niemand aber vermutet, dass es irgendeinen Nutzen hätte, sich damit zu beschäftigen. Bekannt geworden ist das Problem unter dem Namen *Königsberger Brückenproblem*.

Wir gehen zurück in das Jahr 1737. Damals wurde an den zu seiner Zeit schon sehr berühmten Schweizer Mathematiker Leonhard Euler ein Problem herangetragen, das ihn schnell begeisterte und in dem er offenbar sehr viel mehr Tiefe und Struktur zu erkennen glaubte, als man auf den ersten Blick ahnen konnte. Das Problem ist schnell umschrieben: In der Stadt Königsberg, wo Euler damals tätig war, dem heutigen Kaliningrad, gab es sieben Brücken über den Fluss Pregel, die in der in *Bild 1.1* schematisch gezeigten Weise angeordnet waren. Die Einwohner von Königsberg rätselten schon seit geraumer Zeit über eine Frage, und zwar: *Gibt es einen Weg, der genau einmal über jede der sieben Brücken führt?* Oder: *Gibt es sogar einen solchen Weg, bei dem man am Ende wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt?* Niemand hatte bisher einen solchen Weg finden können, und so beauftragte man den Mathematiker Euler mit der Untersuchung dieses Phänomens.

Die Fragestellung war völlig anderer Natur als die bekannten geometrischen Probleme, etwa diejenigen aus der klassischen griechischen Geometrie. Hier kam es nämlich nicht auf Quantifizierungen an, wie Euler schnell erkannte: Es war in der Tat völlig unerheblich, wie lang, wie

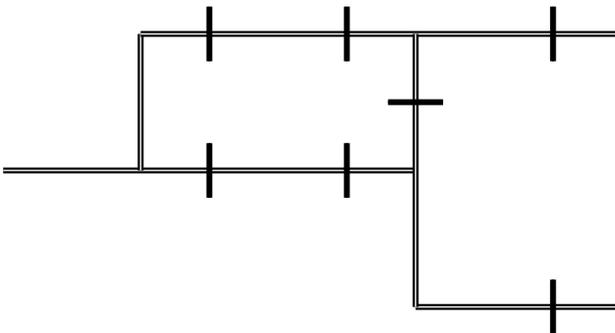


Bild 1.1 Schematische Darstellung der sieben Brücken von Königsberg: Gibt es einen Weg, der genau einmal über jede Brücke führt?

weit voneinander entfernt oder wie sonst beschaffen die Brücken waren. Nur ihre gegenseitige Lage und welche Landteile sie miteinander verbanden schien eine Rolle zu spielen. Euler versuchte, an die Frage systematisch heranzugehen, und es gelang ihm auch, sie zu beantworten. (Gelingt es Ihnen auch?) Aber er hatte bei seinen Überlegungen mehr entdeckt: nämlich die wahren Strukturen hinter diesem Problem. Dass er diese erfassen und benennen konnte; dass er tiefer in die Thematik einstieg; dass er zum Schöpfer einer neuen Sprache wurde – dies war, darin stimmen die meisten Mathematiker überein, die Geburtsstunde der Graphentheorie.

■ 1.1 Grundbegriffe für Graphen

In diesem Abschnitt führen wir die grundlegenden Begriffe und Notationen ein. Was ist eigentlich genau ein Graph, und was macht ihn aus? Erst mithilfe des nun folgenden Grundwerkzeugs können wir uns an die Formulierung und Lösung von Problemen aus der Anwendung machen.

1.1.1 Definition eines Graphen

Ein Graph ist schnell gezeichnet – tatsächlich gehört nichts weiter dazu als das Markieren einiger Punkte, die in diesem Zusammenhang meist *Knoten* (oder auch *Ecken*) genannt werden und von denen wiederum einige durch Linien, sogenannte *Kanten*, verbunden werden. Weder die Form oder Länge der Kanten noch die Anordnung der Knoten (etwa durch Angabe irgendwelcher Koordinaten) spielt dabei eine Rolle. Allein die Tatsache, welche seiner Knoten miteinander verbunden sind und welche nicht, charakterisiert einen Graphen und legt ihn fest.

Allein hier wird schon klar, dass man ein und denselben Graphen durch eine Unmenge verschiedener Zeichnungen realisieren kann. Jede solche Zeichnung, aus der die Verbindungen der Knoten und Kanten hervorgehen, nennen wir eine *Darstellung des Graphen*. Zwei verschiedene Darstellungen des gleichen Graphen werden wir der Einfachheit halber miteinander identifizieren; wir sagen dann auch einfach, die beiden Graphen sind *gleich*, so etwa die drei Graphen in *Bild 1.2*. Die intuitiv klare Definition eines Graphen können wir auch formaler angeben:

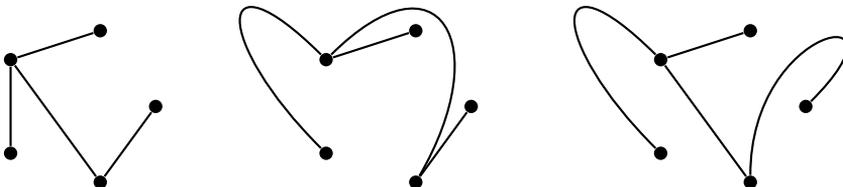


Bild 1.2 Drei verschiedene Darstellungen eines Graphen: Beschaffenheit der Kanten, Skalierung etc. machen keinen Unterschied.

Graph

Ein *Graph* G ist ein Paar von Mengen

$$G = (V, E). \quad (1.1)$$

Dabei ist V eine Menge mit beliebig vielen Elementen, den sogenannten *Knoten* von G . Mit E wird die Menge aller *Kanten* bezeichnet. Eine Kante verbindet zwei (im Allgemeinen unterschiedliche) Knoten miteinander.

Die hier gewählten Bezeichnungen sind in der Literatur so üblich; sie sind Abkürzungen der entsprechenden englischen Wörter: *vertex* für Knoten und *edge* für Kante. Man beachte, dass diese Definition eines Graphen auch den Fall eines oder mehrerer alleinstehender Knoten umfasst, wohingegen Kanten ohne Knoten nicht möglich sind: Es gibt kein alleinstehendes Kantenende und keine alleinstehende Kante.

Adjazenz und Inzidenz

Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, oder zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten besitzen, nennt man *benachbart* oder *adjazent*. Gehört ein Knoten zu einer Kante, so nennen wir die beiden *inzident*.

Bei der Modellierung des Königsberger Brückenproblems stellt man fest, dass es in Königsberg Landstücke (Knoten) gibt, die durch verschiedene Brücken (Kanten) miteinander verbunden sind. Das entspricht einem Graphen, bei dem es mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten gibt. Dabei ist zu beachten, dass unsere Definition diesen Fall nicht ausschließt; häufig benutzt man aber zur Unterscheidung und näheren Bestimmung die Begriffe *Multigraph* für Graphen mit solchen Mehrfachkanten (vgl. Abschnitt 1.2.3) und *einfacher* oder *schlichter Graph* für den anderen Fall: Bei einem *einfachen* Graphen sind zwei unterschiedliche Knoten entweder durch *eine* Kante miteinander verbunden oder nicht.

Oft werden die Knoten eines Graphen auch benannt, manchmal in der Form v_1, v_2, \dots, v_n , oder man nummeriert einfach schlicht mit Zahlen durch. In unseren Bildern ersetzen wir dann die Punkte durch kleine Kästchen oder Kreise, in denen der Name des Knotens steht (vgl. Bild 1.3). Die Kanten werden im Textfluss mit geschweiften Klammern bezeichnet, beispielsweise $\{1, 2\}$

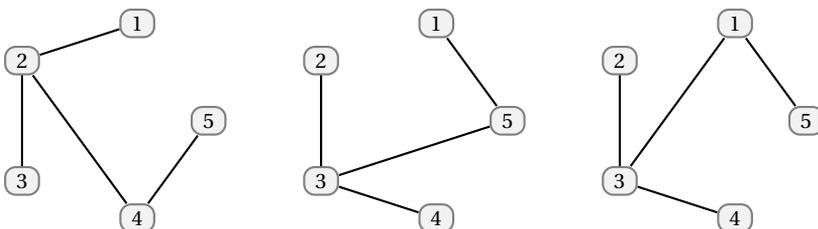


Bild 1.3 Drei Graphen mit Knotenbenennung; alle sind isomorph zueinander. Ohne Bezeichnung der Knoten wären die Graphen gleich, wenn auch nicht gleich dargestellt.

für die Kante, die die beiden Knoten 1 und 2 verbindet. Der linke Graph in *Bild 1.3* kann demnach beschrieben werden durch

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{und} \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

Die Benennung von Knoten hat übrigens zur Folge, dass wir einen weiteren Begriff, den der *Isomorphie*, einführen müssen: Unterscheiden sich zwei Graphen G und G' höchstens in der Benennung ihrer Knoten, nicht aber in ihrer grundsätzlichen Struktur, so nennt man sie *isomorph* (also „im Wesentlichen gleich“):

Isomorphie von Graphen

Haben zwei Graphen G und G' die gleiche Anzahl von Knoten und gibt es darüber hinaus eine eindeutige Zuordnung der Knoten von G und G' , gemäß der die Kanten von G den Kanten von G' entsprechen, so nennt man die beiden Graphen *isomorph* und schreibt in diesem Fall $G \sim G'$.

Bild 1.3 macht dies deutlich: Die grundsätzliche Struktur aller drei dort abgebildeten Graphen ist identisch, aber die Graphen sind nicht gleich. Durch Umnummerierung der Knoten können sie aber ineinander übergeführt werden; so etwa der mittlere und der rechte durch Vertauschung der Knoten 1 und 5. Man beachte Folgendes: Würden wir die Bezeichnung der Knoten in *Bild 1.3* weglassen, dann wären die Graphen alle gleich, so wie in *Bild 1.2*, wenn auch nicht gleich dargestellt.

1.1.2 Grad eines Knotens

Sehr häufig ist es von Bedeutung, wie viele verschiedene Kanten von einem Knoten ausgehen. Damit kommen wir zu dem wichtigen Begriff des *Knotengrads* und einigen damit verbundenen Folgerungen.

Grad eines Knotens

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ definieren wir den *Grad von v* als die Anzahl der von v ausgehenden Kanten und schreiben dafür $d(v)$:

$$d(v) = |\{\{v, w\} \mid \{v, w\} \in E\}|. \quad (1.2)$$

Ein Graph, bei dem alle Knoten den konstanten Grad k haben, heißt *k -regulär*. Einen Knoten vom Grad 0 nennen wir *isoliert*.

Hin und wieder spielen auch der kleinste oder der größte Grad eines Knotens bzw. der durchschnittliche Knotengrad in einem Graphen eine Rolle:

Hierfür finden sich auch die Bezeichnungen $\delta(G)$ bzw. $\Delta(G)$ für den minimalen bzw. maximalen Grad eines Knotens von G oder $d(G)$ für den *Durchschnittsgrad von G* .

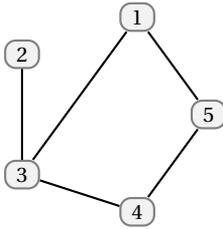


Bild 1.4 Ein Graph G mit Minimalgrad $\delta(G) = 1$ (bei Knoten 2), Maximalgrad $\Delta(G) = 3$ (bei Knoten 3) und Durchschnittsgrad $d(G) = \frac{1+2+2+2+3}{5} = 2$

Minimalgrad, Maximalgrad, Durchschnittsgrad eines Graphen

In einem Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir mit

- $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Minimalgrad* von G ,
- $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ den *Maximalgrad* von G ,
- $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ den *Durchschnittsgrad* von G .

In *Bild 1.4* sind diese Begriffe an einem konkreten Graphen verdeutlicht. In jedem Graphen gilt selbstverständlich

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Offenbar gilt die wichtige Beziehung

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| \tag{1.3}$$

bzw. über den Durchschnittsgrad ausgedrückt:

$$|V| \cdot d(G) = 2 \cdot |E|.$$

Die Summe aller Knotengrade in einem beliebigen Graphen entspricht also zweimal der Anzahl der Kanten – eine Tatsache, die man sich sehr schnell klarmachen kann, da jede Kante zwei Knoten miteinander verbindet und sich somit bei jedem dieser beiden Knoten der Knotengrad um 1 erhöht. Ein schöner Satz der aus der Gleichung (1.3) folgt, lautet:

Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Auch wenn in diesem Buch die Anwendungsaspekte im Vordergrund stehen sollen und es daher nicht um mathematische Beweise gehen soll, wollen wir uns dennoch an der einen oder anderen Stelle einige der Aussagen klarmachen, so auch hier (zumal man bei so viel „gerade“, „ungerade“ und „Knotengrad“ schon einmal leicht den Überblick verlieren kann). Ausgehend von Gleichung (1.3) teilen wir die Menge unserer Knoten V in zwei Teilmengen auf, nämlich

in die Teilmenge V_1 , die alle Knoten mit geradem Grad enthält, und in die Teilmenge V_2 , in welcher sich die Knoten mit ungeradem Grad befinden. Wir erhalten dann

$$2 \cdot |E| = \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{gerade}} = \underbrace{\sum_{v \in V_1} d(v)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\sum_{v \in V_2} d(v)}_{\text{ungerade}} .$$

Damit die rechte Seite der Gleichung ebenfalls eine gerade Zahl ergibt, muss auch der zweite Summand eine gerade Zahl ergeben (der erste Summand, eine beliebige Summe von geraden Zahlen ist immer gerade). Der zweite Summand (die Summe von ungeraden Zahlen) ist genau dann gerade, wenn die Anzahl der Summanden gerade ist. Anders ausgedrückt, von den Knoten mit ungeradem Grad muss es immer eine gerade Anzahl geben, und genau das wollten wir uns klarmachen.

Schon diese kleine, aber wichtige Aussage können wir an einem Praxisbeispiel verdeutlichen:

Beispiel 1.1

Eine Menge von sieben Unternehmen arbeitet in verschiedenen Kooperationen zusammen. Dabei unterhält jedes Unternehmen mit genau drei anderen Unternehmen enge Geschäftsbeziehungen. Ist dies möglich?

Modelliert man dieses Problem, wobei die Unternehmen durch Knoten und die bestehenden Geschäftsbeziehungen durch entsprechend verbindende Kanten beschrieben werden, so erhält man einen Graphen mit sieben Knoten, von denen jeder den Grad $d(v) = 3$ hat. In der Summe ergibt sich damit aber 21, eine ungerade Zahl: Ein solches Szenario kann es daher nicht geben, weil es einen entsprechenden Graphen nicht geben kann. ■

Betrachten wir eine kleine Modifikation von *Beispiel 1.1*, nämlich acht statt sieben Unternehmen. Was stellt man fest? Die Gradsumme ergibt nun 24, was zwar noch nicht automatisch bedeutet, dass es einen solchen Graphen gibt – aber es gibt ihn: In *Bild 1.5* ist eine schöne Darstellung und damit mögliche Lösung für acht Unternehmen (Knoten) mit jeweils exakt drei Geschäftsbeziehungen (Kanten) zu sehen. Der entstehende Graph ist 3-regulär.

Ähnlich kann man bei den unterschiedlichsten Fragestellungen argumentieren, sofern es um Verbindungen gewisser Objekte geht. Beispielweise kann es auch keine Gruppe von, sagen wir, neun Personen geben, in der jede Person exakt fünf der anderen Personen kennt (wobei wir

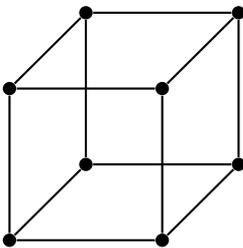


Bild 1.5 Ein 3-regulärer Graph mit 8 Knoten

annehmen, dass „Kennen“ eine symmetrische Relation ist). Behauptet dies eine der neun Personen dennoch, wissen wir jetzt aufgrund der Graphentheorie, dass sie die Unwahrheit sagt.

1.1.3 Wege und Kreise

Zwei sehr elementare und gerade daher sehr wichtige Typen von Graphen wollen wir nun kurz vorstellen: die Wege und die Kreise. Unter einem *Weg* verstehen wir einen Graphen, der, kurz gesagt, aus „aneinander gehängten“ Kanten besteht. Damit gibt es bei einem Weg zwei ausgezeichnete Knoten, die wir als Endknoten auffassen können. Später, wenn wir orientierte Graphen betrachten, ist es sinnvoll, diese beiden Knoten mit *Start* bzw. *Ziel* zu bezeichnen; zunächst werden wir dies aber nicht tun. Wir geben die formale Definition:

Definition eines Wegs

Für $n \geq 2$ nennt man einen Graphen P_n mit der Knotenmenge $V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge

$$E(P_n) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

einen *Weg (oder Pfad) der Länge n* , sofern keine Kante mehrfach durchlaufen wird. Knoten hingegen dürfen bei einem Weg mehrfach vorkommen (d. h. die Knoten v_i müssen nicht notwendig paarweise verschieden sein). Lässt man auch mehrfach durchlaufene Kanten zu, so spricht man von einem *Kantenzug*. Eine häufig genutzte Notation für einen solchen Weg ist die Tupelschreibweise seiner Knoten mithilfe runder Klammern:

$$P_n = (v_0, v_1, \dots, v_n).$$

Meist fordert man zusätzlich explizit, dass $v_0 \neq v_n$ gelten muss, der Weg also *offen* ist.

Man beachte, dass laut Definition für den Weg P_n die Knotenmenge aus höchstens $n+1$ Knoten und die Kantenmenge aus n Kanten besteht. *Bild 1.6* zeigt einige Darstellungen des Weges P_4 ; hier wird auch klar, dass die Anzahl der Knoten kleiner sein kann als $n+1$.

Besonders interessieren uns im Folgenden Wege als *Teilgraphen eines größeren Graphen G* . Wir sprechen in diesem Fall von einem „Weg auf G “. In *Bild 1.7* beispielsweise sehen wir eine Darstellung des P_4 und eine Darstellung eines P_4 als Weg innerhalb eines größeren Graphen, wobei die Kanten des P_4 hier fett dargestellt sind. Es ist sehr oft üblich, einen Weg mithilfe der

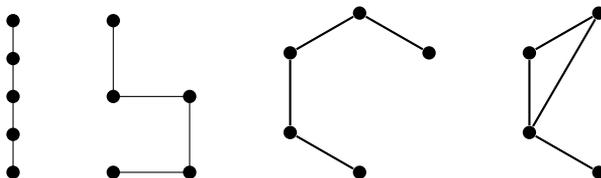


Bild 1.6 Verschiedene Darstellungen des Weges P_4 : Alle haben vier Kanten, die Anzahl der Knoten beträgt fünf oder weniger, wie der Graph ganz rechts zeigt.

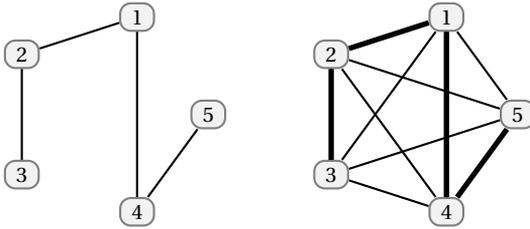


Bild 1.7 Darstellungen eines P_4 (links) und eines P_4 in einem größeren Graphen (rechts). Die Realisation des P_4 kann man in diesem Graphen über die Namen der Knoten konkretisieren: (32145).

Namen seiner Knoten zu benennen. In *Bild 1.7* würde man das Exemplar des P_4 beispielsweise kurz mit (3, 2, 1, 4, 5) oder auch mit (32145) bezeichnen. Die Frage, welche Art von Wegen es auf einem gegebenen Graphen gibt, wird uns immer wieder beschäftigen.

Der Begriff des Weges legt dann noch einen weiteren sehr wichtigen Begriff nahe, den des *Zusammenhangs*:

Zusammenhang bei Graphen

Wir nennen einen Graphen G *zusammenhängend*, falls es zu je zwei verschiedenen Knoten $v, w \in V(G)$ einen Weg auf G mit v und w als Endknoten gibt. Ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G heißt *Zusammenhangskomponente* von G .

In *Bild 1.8* ist beispielsweise ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten dargestellt. Bisher haben wir nur zusammenhängende Graphen betrachtet, und wir werden dies auch weiterhin überwiegend tun. Wege fassen wir in der Regel immer als *offen* auf, was bedeutet, dass ihre Endpunkte stets verschieden sind. Lässt man diese Bedingung fallen, so erhält man *geschlossene Wege* oder *Kreise*:

Definition eines Kreises

Für $n \geq 3$ heißt der Graph C_n mit $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_n = v_0\}$ und

$$E(C_n) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_0\}\}$$

Kreis der Länge n.

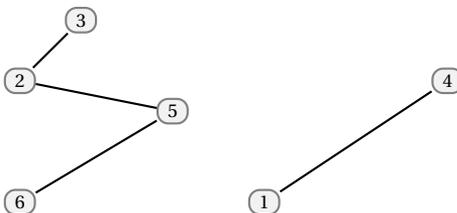


Bild 1.8 Ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten; hier gibt es beispielsweise zwischen Knoten 4 und Knoten 5 keinen Weg.

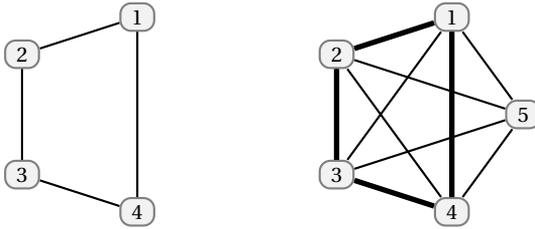


Bild 1.9 Darstellungen eines C_4 (links) und eines C_4 in einem größeren Graphen (rechts). Die Realisation des C_4 kann man wiederum über die Namen der Knoten konkretisieren: (12341).

Auch hier interessieren wir uns vor allem für Kreise als Teilgraphen anderer Graphen G . *Bild 1.9* zeigt eine Darstellung des C_4 und eine Darstellung eines C_4 auf einem größeren Graphen (fett dargestellt).

■ 1.2 Typen von Graphen

Da wir inzwischen die Grundbegriffe der Graphentheorie kennengelernt und den ein oder anderen Graph gesehen haben, lohnt es sich, einige Typen von Graphen etwas genauer zu betrachten. Bei der Modellierung von unterschiedlichen Problemstellungen aus der Praxis werden selbstverständlich auch ganz unterschiedliche Darstellungen von Graphen benötigt. Ein kleines Beispiel: Wenn wir mithilfe eines Graphen ein Zuordnungsproblem (Kinder sind auf Kindergartenplätze zu verteilen) darstellen möchten, dann hat der dazugehörige Graph mit Sicherheit eine andere Gestalt als die Darstellung eines Graphen zur Modellierung von Netzplänen im öffentlichen Nahverkehr (in denen wir zum Beispiel nach dem kürzesten Weg suchen könnten, wie man von einer beliebigen Station A zu einer anderen Station B gelangt).

Die jeweilige Problemstellung aus der Praxis gibt uns hierbei in den allermeisten Fällen den Graphentyp und die mit diesem verbundenen Eigenschaften vor. Mithilfe der bereits eingeführten Begriffe adjazent und inzident gehen wir auch auf eine andere Darstellung von Graphen in Form von Matrizen ein.

1.2.1 Vollständige Graphen

Der vollständige Graph bildet bei einer Reihe von Problemen die Grundlage der Modellierung.

Vollständiger Graph

Ein Graph, bei dem je zwei Knoten benachbart sind, heißt *vollständig*. Für $n \geq 2$ bezeichnen wir den vollständigen Graphen auf n Knoten mit K_n .

Die Definition umfasst nicht den Fall eines einzelnen alleinstehenden Knotens, den wir mit K_1 bezeichnen.

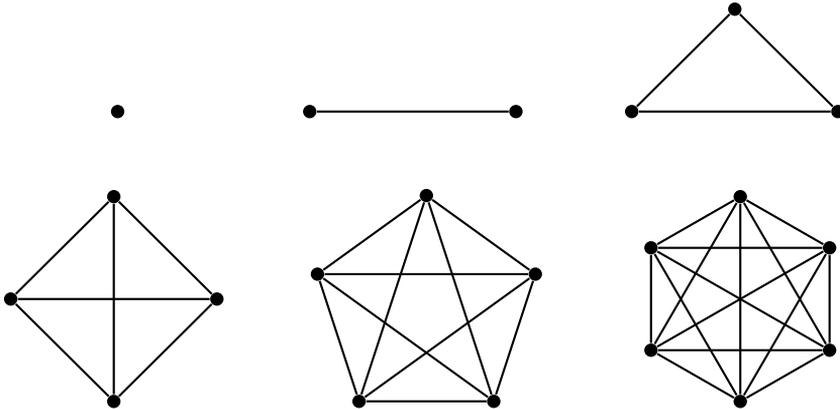


Bild 1.10 Die vollständigen Graphen K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 und K_6

Betrachten wir einige vollständige Graphen für kleine Knotenzahlen, wie sie in *Bild 1.10* zu sehen sind. Dort erkennt man, dass K_1 keine, K_2 eine, K_3 drei, K_4 sechs, K_5 zehn und K_6 15 Kanten hat. Können Sie hieraus eine Vermutung formulieren, wie viele Kanten K_7 hat?

Der Übergang von K_{n-1} zu K_n erfordert $n - 1$ neue Kanten, denn der hinzugefügte Knoten ist mit jedem der bisher $n - 1$ vorhandenen Knoten zu verbinden. Damit erhält man für die Kantenanzahl des K_n die Summe der Zahlen bis $n - 1$:

n	Anzahl der Kanten des K_n
2	1
3	$1 + 2 = 3$
4	$1 + 2 + 3 = 6$
5	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
6	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
7	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

(1.4)

Die Zahlen, die in *Tabelle 1.4* stehen, sind die aus der Kombinatorik bekannten Binomialkoeffizienten – die Anzahl der Kanten eines vollständigen Graphen wächst damit *quadratisch in der Knotenanzahl*. Es gilt genauer:

Kantenanzahl des vollständigen Graphen K_n

Der vollständige Graph K_n hat

$$|V(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Kanten, denn so viele verschiedene Paare können aus der n -elementigen Knotenmenge ausgewählt werden.

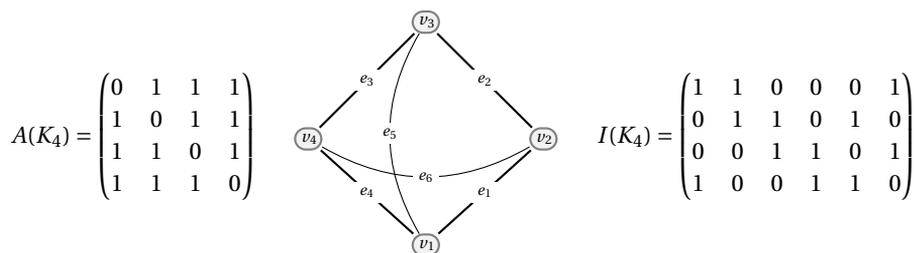


Bild 1.11 Eine Darstellung des K_4 mit (willkürlich) nummerierten Knoten und Kanten, seine Adjazenzmatrix $A(K_4)$ (links) und seine Inzidenzmatrix $I(K_4)$ (rechts)

Diese Aussage nennt man häufig auch das sogenannte *Handshaking-Lemma* – in Anlehnung an die Fragestellung, wie oft Hände geschüttelt werden, wenn sich n Personen auf diese Weise begrüßen. Vor allem in Hinblick auf die rechnerische Bewältigung von Praxisproblemen ist es sinnvoll, Graphen auch auf eine von der Anschauung losgelöste Methode zu beschreiben. Die Information, welche Kanten und Knoten eines Graphen inzident sind, wodurch der Graph ja vollständig beschrieben ist, kann man sehr einfach in Matrizen kodieren. Man spricht dann von der *Adjazenzmatrix* bzw. von der *Inzidenzmatrix* eines Graphen:

Adjazenzmatrix eines Graphen

Bei einem Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ verstehen wir unter der *Adjazenzmatrix von G* die $(n \times n)$ -Matrix $A(G)$, deren Eintrag an der Stelle (i, j) gleich der Anzahl der Kanten zwischen den Knoten v_i und v_j ist.

Inzidenzmatrix eines Graphen

Bei einem Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ verstehen wir unter der *Inzidenzmatrix von G* die $(n \times m)$ -Matrix $I(G)$, deren Eintrag an der Stelle (i, j) gleich 1 ist, wenn der Knoten v_i zur Kante e_j gehört, und andernfalls gleich 0.

Hierbei ist zu beachten, dass die Darstellung durch diese Matrizen natürlich immer nur bis auf eine Permutation der Knoten eindeutig ist: Die jeweils genaue Gestalt der Matrizen hängt von der Nummerierung der Knoten und Kanten ab. In *Bild 1.11* sehen Sie die Adjazenz- und die Inzidenzmatrix für die dort gewählte Darstellung des K_4 .

Besonders wichtig ist auch das Konzept des *Teilgraphen*, das wir an dieser Stelle erwähnen wollen:

Teilgraph eines Graphen

Es sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph. Ein *Teilgraph von G* ist ein Graph $H = (V_H, E_H)$, dessen Knotenmenge V_H eine Teilmenge von V_G und dessen Kantenmenge E_H eine Teilmenge von E_G ist. Wir nennen einen Teilgraphen $H \subseteq G$ darüber hinaus *induziert*, falls mit jedem Knoten v von H auch sämtliche mit v inzidenten Kanten zu H gehören.

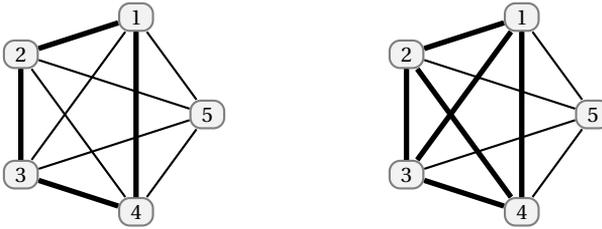


Bild 1.12 Ein C_4 als Teilgraph des K_5 (links). Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen induzierten Teilgraphen. Von K_5 induziert ist er erst, wenn wir weitere Kanten mit hinzunehmen (rechts).

Die Klasse der vollständigen Graphen und die Untersuchung ihrer Teilgraphen eignet sich zur Modellierung für eine nahezu unüberschaubare Menge an Anwendungsproblemen: Rundreiseprobleme, kürzeste Wege, Netzwerke, um nur einige zu nennen. Außerdem bildet der vollständige Graph K_n oftmals die Grundlage eines idealisierten Ausgangsgraphen. Zuordnungsprobleme (zum Beispiel mehrere Bewerber auf mehrere Arbeitsstellen zu verteilen) benötigen einen anderen Graphentyp, mit dem wir uns im nachfolgenden Abschnitt beschäftigen wollen.

1.2.2 Bipartite Graphen

Neben den vollständigen bilden die bipartiten Graphen eine weitere wichtige Klasse. Ein bekanntes Beispiel dafür stellen wir hier an den Anfang:

Beispiel 1.2

In einem Dorf gibt es drei Häuser und drei Brunnen. Jedes der Häuser soll nun mit jedem der Brunnen durch einen Weg verbunden werden. Modelliert man dieses Problem mithilfe eines Graphen, so erhält man *Bild 1.13*. ■

Dieser Graph kommt in der Literatur auch als sogenannter *GEW-Graph* vor. Dieser Name basiert auf einer äquivalenten Realisierung des Problems mit drei Häusern und drei Werken für Gas, Elektrizität und Wasser. Ein altbekanntes Rätsel besteht dann in der Frage, ob die Errichtung der neun Wege so möglich ist, dass sie sich nicht kreuzen. Die Frage, ob Graphen überkreuzungsfrei gezeichnet werden können, stellt einen eigenen großen Themenkomplex inner-

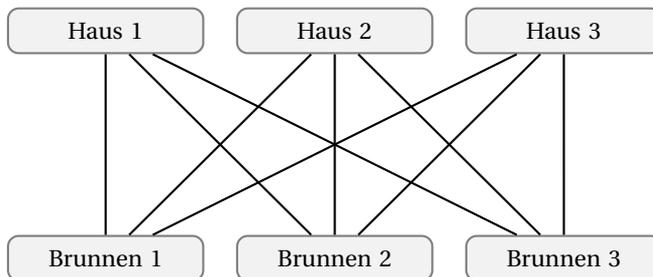


Bild 1.13 Drei Häuser und drei Brunnen: ein bipartiter Graph. Lässt er sich kreuzungsfrei darstellen?