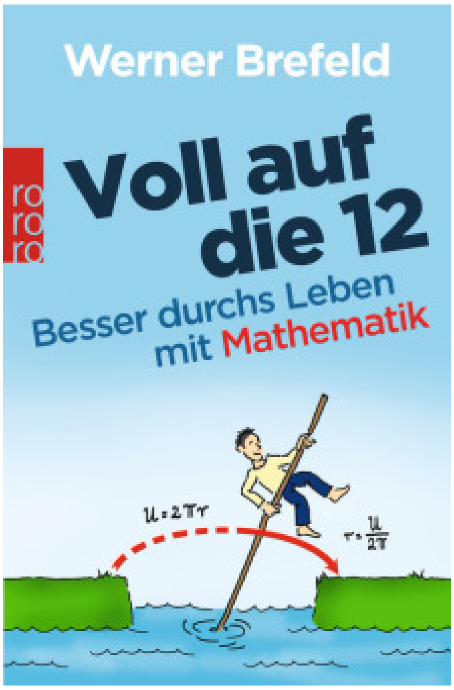
Leseprobe aus:

Werner Brefeld

Voll auf die 12



Werner Brefeld

Voll auf die 12

Besser durchs Leben mit Mathematik

Rowohlt Taschenbuch Verlag

Originalausgabe
Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag,
Reinbek bei Hamburg, Juni 2015

Umschlaggestaltung ZERO Werbeagentur, München
Umschlagabbildung FinePic, München
Innengestaltung und Grafiken Daniel Sauthoff
Satz Utopia PostScript (InDesign) bei
Pinkuin Satz und Datentechnik, Berlin
Druck und Bindung CPI books GmbH, Leck, Germany
ISBN 978 3 499 62898 6

Inhalt

Vorwort

Mathematik ist überall. Im Alltag ist das aber keineswegs immer offensichtlich. Oder haben Sie sich schon einmal gefragt, warum wir im täglichen Leben das 10er-System (Dezimalsystem) benutzen und nicht ein 5er-System oder ein 20er-System wie die alten Mayas? Ist Ihnen aufgefallen, dass ein Klavier 12 Tasten pro Oktave hat (wenn man die schwarzen mitzählt)? Hängt das vielleicht damit zusammen, dass das Dutzend eine oft gebrauchte Größe ist? Oder hat das ganz andere Gründe? Wo wir gerade bei der 12 sind: Neben der 12 spielen auch die 6, die 60 und die 360 im Alltag eine wichtige Rolle. Woran liegt das?

Sie haben sicher schon bemerkt, dass ein Fußball oft aus Lederstücken in Form von Fünf- und Sechsecken zusammengenäht ist. Wären nicht Quadrate und Achtecke auch sehr schön? Oder geht das gar nicht? Wenn Sie einkaufen, zahlen Sie zum Beispiel mit 10-, 20- oder 50-Euro-Scheinen. Aber keineswegs mit 30-, 40- oder auch 60-Euro-Scheinen (und wenn doch, dann nicht sehr lange). Warum? Um diese und andere Alltagsbeobachtungen und ihre Hintergründe geht es in diesem Buch. Denn das meiste davon ist kein Zufall, sondern hat sinnvolle und oft verblüffende Gründe.

Außerdem erfahren Sie, wie Sie Mathematik im Alltag anwenden können. Das wird oft nützlich für Sie sein, zum Beispiel beim Einkaufen, beim Sparen oder Leihen von Geld, beim Überprüfen von Rechnungen, beim Energiesparen, beim Renovieren, Kochen und Backen, bei der Berechnung einer Grundstücksgröße oder bei der Suche nach einem Haus oder einer Arbeitsstelle. Sogar beim Lotto und bei Würfelspielen.

Sicher, gerade in unserer Zeit wäre sogar ein Leben auch ganz ohne Mathematik möglich. Aber ist es auch sinnvoll? Ohne Mathematik lebt es sich nämlich fast immer mehr schlecht als recht. Es ist besser für Sie, wenn Sie die Mathematik des Alltags verstehen und anwenden können. Dazu soll dieses Buch einen Beitrag leisten. Trauen Sie sich also, sich auf diese Mathematik einzulassen und schauen Sie, wie weit Sie kommen!

Um den Spaß noch ein wenig zu erhöhen, habe ich eine Reihe von verblüffenden Rätseln in dieses Buch eingestreut. Mathematikrätsel gibt es viele, aber nur wenige sind verblüffend, weil ihre Lösungen der menschlichen Intuition widersprechen. Sollten Sie ein Rätsel nicht knacken können, dann finden Sie am Ende des Buches nicht nur die Lösung, sondern auch den Lösungsweg und den mathematischen Hintergrund.

Lassen Sie sich also verblüffen!

Am Ende einiger Kapitel befinden sich Abschnitte in Sans Serif. Sie sind für Leser gedacht, die an weiterführenden Überlegungen interessiert sind.

Themen und Rätsel in diesem Buch finden Sie auch auf meiner Homepage. Dazu Beweise sowie andere faszinierende Themen, die den Rahmen dieses Buches sprengen würden. Meine Homepage mit dem Titel «Mathematik – Hintergründe im täglichen Leben» finden Sie unter *www.brefeld.homepage.t-online.de*

Hamburg, im Juni 2015

I. Nützliche Mathematik für den Alltag

Fangen wir zunächst mit der Mathematik an, die für Sie zur Bewältigung des Alltags nützlich ist. Je mehr Sie davon können, desto mehr Vorteile werden Sie daraus ziehen. Allerdings werden Sie diese Mathematik nur selten für verblüffend halten. Vielleicht fallen Ihnen Prozentrechnung, Abschätzungen, der Dreisatz, Zinseszins- sowie Flächenberechnungen auch nicht leicht. Das möchte ich mit den folgenden Kapiteln gerne ändern. Auch wenn diese Mathematik nicht unbedingt verblüffend ist, so ist sie doch oft verblüffend einfach, einfacher jedenfalls, als Sie bisher dachten.

Gut geschätzt ist gut gerechnet
Prozentangaben, Brüche, Abschätzungen und große Zahlen

«Auf diesen Betrag kommen noch 19 % Mehrwertsteuer.» «Für Ihre Spareinlage erhalten Sie 1,2 % Zinsen.» «Für diesen Kredit zahlen Sie nur 3 % Kreditzinsen.» «Diese Schokolade enthält 43 % Kakaobestandteile.» «Dieser Wein enthält 14 % Alkohol.» «Der Unfallverursacher hatte 2,1 ‰ Alkohol im Blut.» Angaben wie diese hören oder lesen wir jeden Tag.

Was bedeuten nun die Begriffe «Prozent» und «Promille»? Sind sie vergleichbar mit den physikalischen Begriffen «Meter», «Sekunde», «Kilogramm» und «Kilowattstunde»? Und braucht man einen Taschenrechner mit Prozenttaste, um Prozentrechnungen durchführen zu können?

Die beiden letzten Fragen kann man klar mit Nein beantworten. Eine Prozentangabe wie zum Beispiel 75 % ist nämlich nichts anderes als eine ganz normale Zahl. Dazu müssen Sie sich klarmachen, dass «Prozent» nichts anderes bedeutet als «von Hundert». 75 % ist also gleichbedeutend mit «75 von 100» oder $\frac{75}{100}$. Verständlicherweise rechnen Sie nicht so gerne mit Brüchen wie $\frac{75}{100}$. Deshalb gehen wir noch einen Schritt weiter und wandeln den Bruch in eine Ihnen vermutlich geläufigere Dezimalzahl um. $\frac{75}{100}$ entsprechen der Dezimalzahl 0,75.

Um Sie an den Gedanken zu gewöhnen, eine Prozentangabe als ganz normale Dezimalzahl anzusehen, kommen hier einige Beispiele:

$$300\,\% = \frac{300}{100} = 3$$

$$119\,\% = \frac{119}{100} = 1{,}19$$

$$100\,\% = \frac{100}{100} = 1$$

$$75\,\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$28{,}4\,\% = \frac{28{,}4}{100} = 0{,}284$$

$$19\,\% = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

$$10\,\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

$$3\,\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$1{,}37\,\% = \frac{1{,}37}{100} = 0{,}0137$$

$$0{,}26\,\% = \frac{0{,}26}{100} = 0{,}0026$$

Auf dieselbe Weise können wir eine Angabe in Promille mit Hilfe eines Bruches in eine Dezimalzahl umwandeln, denn «Promille» bedeutet «von Tausend». Hier wieder einige Beispiele:

$$1000\,‰ = \frac{1000}{1000} = 1$$

$$10\,‰ = \frac{10}{1000} = 0{,}01$$

$$3\,‰ = \frac{3}{1000} = 0{,}003$$

$$2{,}1\ ‰ = \frac{2{,}1}{1000} = 0{,}0021$$

$$0{,}2\ ‰ = \frac{0{,}2}{1000} = 0{,}0002$$

Wie man an den Beispielen leicht erkennt, ist 1 % genauso viel wie 10 ‰. Umgekehrt entsprechen 2,1 ‰ Alkohol im Blut einer Alkoholkonzentration von 0,21 %.

Wozu sind nun diese Überlegungen gut? Viele Menschen glauben, dass Prozent- und Promilleangaben recht anschaulich einen Sachverhalt beschreiben. Wenn man sie aber bittet, mit diesen Angaben eine Rechnung zu machen, reagieren sie oft hilflos.

In der Frage «Wie viel ist 19 % von 850 Euro?» tauchen ja keine Angaben wie «mal», «geteilt», «plus» oder «minus» auf. Dabei ist «19 % von 850 Euro» dasselbe wie die entsprechende Dezimalzahl 0,19 mal 850 Euro. Mit jedem Taschenrechner auch ohne Prozenttaste erhält man sofort das richtige Ergebnis

$$0{,}19 \cdot 850 \text{ Euro} = 161{,}50 \text{ Euro}$$

Praktisch genauso einfach ist es, auf 850 Euro zum Beispiel 19 % Mehrwertsteuer aufzuschlagen. Da der Ausgangswert von 850 Euro 100 % entspricht, wollen Sie hier eigentlich nur wissen, wie viel 100 % + 19 % = 119 % von 850 Euro ist. Und wie Sie wahrscheinlich vermuten, erhalten Sie mit der einfachen Rechnung

$$1{,}19 \cdot 850 \text{ Euro} = 1011{,}50 \text{ Euro}$$

das richtige Ergebnis. Wenn Sie also demnächst aus einem Betrag ohne Mehrwertsteuer den Betrag mit Mehrwertsteuer berechnen wollen, dann multiplizieren Sie einfach den angegebenen Euro-Betrag mit 1,19. Wollen Sie jedoch wissen, welcher Betrag sich bei einer Erhöhung um 100 % ergibt, müssen Sie zu den ursprünglichen 100 % weitere 100 % addieren. 200 % von 850 Euro sind dann

$$2 \cdot 850 \text{ Euro} = 1700 \text{ Euro}$$

Eine Verteuerung um 100 % entspricht also einer Verdoppelung des Preises. Bei einer Preiserhöhung um 200 % würde sich folglich der Preis verdreifachen. Weitere interessante Beispiele für Prozentrechnungen finden Sie im nächsten Kapitel.

Ebenso ist es für Rechnungen oft nützlich, Brüche in Dezimalzahlen umwandeln und damit weiterzurechnen. Beispielsweise ist $\frac{3}{4}$ gleich 3 geteilt durch 4, und das ist 0,75. Ebenso ist $\frac{3}{8} = 0{,}375$, $\frac{1}{5} = 0{,}2$ und $\frac{7}{10} = 0{,}7$. Wenn Sie also $\frac{3}{8}$ von 7 Kilogramm bestimmen wollen, dann sieht die Rechnung ganz einfach so aus:

$$0{,}375 \cdot 7 \text{ kg} = 2{,}625 \text{ kg}$$

Als Nächstes möchte ich auf eine Fähigkeit hinweisen, die für Sie im täglichen Leben sehr nützlich sein kann. Ich meine die Fähigkeit, etwas abschätzen zu können. Oft geht es ja gar nicht darum, dass man etwas genau wissen will, sondern nur ungefähr.

Angenommen, der Tank Ihres Autos ist fast leer und Sie wollen tanken. Der Tank fasst 60 Liter und ein Liter Benzin kostet 1,469 Euro. Reicht Ihr Geld, um vollzutanken? Um auf der sicheren Seite zu sein, nehmen Sie einfach an, Sie müssten 60 Liter tanken und ein Liter würde 1,50 Euro kosten. Ihre Abschätzung ergibt dann, dass $60 \cdot 1{,}50$ Euro = 90 Euro auf jeden Fall reichen, um vollzutanken. In den meisten Fällen reicht so eine grobe Abschätzung. Aber auch bei genauen Rechnungen sind Abschätzungen wichtig. Diese Rechnungen werden Sie meistens mit einem Taschenrechner machen. Beim Eingeben der Rechnung können Sie jedoch die verschiedensten Fehler machen. Beispielsweise können Sie eine Ziffer falsch oder doppelt eintippen, Sie können das Dezimalkomma an die falsche Stelle setzen oder die Additionstaste mit der Multiplikationstaste verwechseln. Und oft können Sie dem Ergebnis nicht sofort ansehen, dass beim Eingeben etwas falsch gelaufen ist.

Um grobe Fehler sofort zu bemerken, ist es deshalb sinnvoll, zusätzlich im Kopf eine grobe Abschätzung zu machen. Dazu wird die Rechnung mit stark gerundeten Zahlen durchgeführt. Beispielsweise vereinfachen Sie die Rechnung $4{,}25 \cdot 2{,}60 = 11{,}05$ zu $4 \cdot 3 = 12$, indem Sie 4,25 zu 4 abrunden und 2,6 zu 3 aufrunden. Weicht das Ergebnis des Taschenrechners deutlich von der Abschätzung ab, dann haben Sie höchstwahrscheinlich beim Eintippen einen Fehler gemacht.

Ein weiteres Beispiel: $670 \cdot 86{,}98 = 58\,276{,}6$. Für die Abschätzung müssen Sie hier $700 \cdot 90$ ausrechnen. Hier rechnen Sie mit Hilfe des kleinen Einmaleins $7 \cdot 9 = 63$ im Kopf, hängen an das Ergebnis die zwei Nullen von der 700 und die eine Null von der 90 hinten an und erhalten als Abschätzung den Wert 63 000. Auch diese Abschätzung liegt nicht sehr weit vom richtigen Wert entfernt.

Ein drittes Beispiel: $0{,}0019 \cdot 840\,000 = 1596$. Diese Rechnung vereinfachen Sie zu $0{,}002 \cdot 800\,000$. Sie rechnen jetzt $2 \cdot 8 = 16$ und hängen hier die fünf Nullen von 800 000 an. Allerdings müssen Sie wieder drei Nullen wegnehmen, weil die 2 in der Zahl 0,002 erst an der dritten Stelle nach dem Komma kommt. Also bleiben zwei Nullen und die Abschätzung ergibt 1600 und ist damit in guter Übereinstimmung mit der genauen Rechnung.

Bisher kamen bei den Abschätzungen nur Multiplikationen vor. Geht es um Additionen oder Subtraktionen, sind die Abschätzungen noch einfacher. Addieren Sie zwei Zahlen, dann ist das Ergebnis nicht wesentlich größer als die größere der beiden Zahlen. $7046 + 4277 = 11\,323$ und nicht 49 823. Entsprechend ist $1841 + 78 = 1919$ und nicht 4919. Haben Sie bemerkt, welche

Fehler beim Eintippen in den Taschenrechner hier gemacht worden sind? Ziehen Sie bei der Subtraktion eine kleine Zahl von einer großen ab, muss das Ergebnis grob der größeren Zahl entsprechen. Ziehen Sie eine fast gleich große Zahl ab, erhalten Sie als Resultat eine vergleichsweise kleine Zahl.

Es bleiben noch die Abschätzungen bei Divisionsaufgaben. Hier ist es nützlich, die erste Zahl auf zwei Stellen genau zu runden. So wird aus der Aufgabe $\frac{25\,379}{41} = 619$ die Abschätzung $\frac{25\,000}{40}$. Jetzt überlegen Sie, dass $\frac{25}{4}$ ungefähr gleich 6 ist. An die 6 hängen Sie zunächst die drei Nullen von 25 000 an. Die eine Null in der Zahl 40 dürfen Sie aber dann nicht zusätzlich anhängen, sondern Sie müssen Sie wegnehmen, weil durch 40 geteilt wird. Es bleiben also zwei Nullen übrig, und die Abschätzung beträgt damit 600.

Zum Schluss dieses Kapitels möchte ich mich mit Ihnen in die Welt der großen Zahlen begeben. Der Begriff «Millionen» ist Ihnen natürlich geläufig, und von Billionen haben Sie auch schon gehört, vielleicht auch von Trillionen, Quadrillionen, Quintillionen und Sextillionen. Wie viele Nullen haben diese Zahlen?

Außer bei den Millionen verbergen sich in den aus dem Lateinischen abgeleiteten Vorsilben die Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Multipliziert man diese Zahlen mit 6, erhält man sofort die Anzahl der gesuchten Nullen. Bei 17 Billionen folgen nach der 17 deshalb $2 \cdot 6 = 12$ Nullen, also schreibt man 17 000 000 000 000. Bei 9 Trillionen muss man an die 9 schon $3 \cdot 6 = 18$ Nullen anhängen. Wie Sie wissen, sind es bei zum Beispiel 128 Millionen nur $1 \cdot 6 = 6$ Nullen. Zusätzlich gibt es noch die «Zwischengrößen» wie zum Beispiel Milliarden, Billiarden und Trilliarden, die jeweils 3 Nullen mehr haben als Millionen, Billionen und Trillionen. Eine Milliarde hat also 9 Nullen.

Immer wieder führt es zu Verwirrung, dass die englischsprachigen Länder diese Begriffe nicht benutzen. Dort folgt auf «million» (6 Nullen) «billion» (9 Nullen), auf «billion» folgt «trillion» (12 Nullen) usw. Man kann hier aus den Vorsilben nicht mehr direkt die Anzahl der Nullen bestimmen.

Anschaulich können wir uns diese großen Zahlen nicht mehr vorstellen. Wie weit reicht denn überhaupt unsere Vorstellung? Wenn wir in einem Stadion mit 85 000 Zuschauern sitzen, können wir diese mit unseren Augen noch unterscheiden. Die Zahl 85 000 können wir uns also noch veranschaulichen. Man könnte das wohl noch etwas weiter treiben, aber ab etwa einer Million dürfte Schluss sein. Die Anzahl der Zapfen auf der Netzhaut unserer Augen setzt der Anschauung im wahrsten Sinne des Wortes eine Grenze.

Wenn wir uns größere Zahlen veranschaulichen wollen, geht das eigentlich nur, indem wir sie sinnvoll in kleinere Zahlen zerlegen. Wenn wir hören, dass die Staatsverschuldung Deutschlands etwa 2 Billionen Euro beträgt, dann können wir den Betrag gleichmäßig auf die etwa 80 Millionen Bürger in unserem Land aufteilen. Die Rechnung ergibt:

$$\frac{2\,000\,000\,000\,000 \text{ Euro}}{80\,000\,000} = 25\,000 \text{ Euro}$$

Jeder Bürger – egal, ob jung oder alt – trägt also im Mittel eine Schuldenlast von etwa 25 000 Euro. Darunter können wir uns etwas vorstellen.

Auch die etwas mehr als 7 Milliarden Menschen auf der Erde sprengen unsere Vorstellungskraft. Nehmen wir an, Sie sitzen in dem Stadion mit 85 000 Zuschauern und stellen sich vor, jeder Zuschauer entspräche wieder einem vollen Stadion mit 85 000 Zuschauern. Dann haben Sie ein Gefühl für die gigantische Anzahl der Menschen auf der Erde. Eine schnelle Rechnung wird Sie überzeugen:

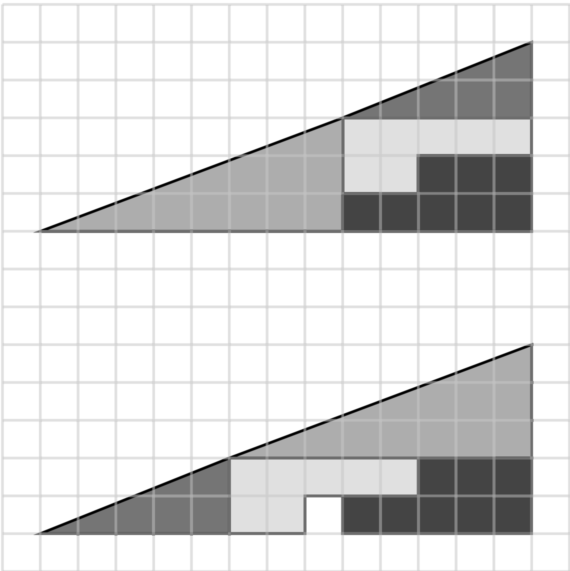
$$85\,000 \cdot 85\,000 = 7{,}225 \text{ Milliarden}$$

Sollten Sie sich schließlich das Jahresgehalt eines Spitzenmanagers von vielleicht 60 Millionen Dollar veranschaulichen wollen, dann nehmen Sie einfach eine Arbeitszeit von 3000 Stunden pro Jahr an und berechnen den Stundenlohn:

$$\frac{60\,000\,000 \text{ Dollar}}{3000 \text{ Stunden}} = 20\,000 \text{ Dollar/Stunde}$$

Mit diesem Stundenlohn hätten Sie spätestens nach einem Monat für den Rest Ihres Lebens ausgesorgt. Die entsprechende Rechnung überlasse ich Ihnen.

Das Geheimnis der Lücke



Werden in der abgebildeten Figur die vier Puzzle-Teile anders angeordnet, entsteht plötzlich eine Lücke. Ist die Gesamtfläche etwa kleiner geworden?

Auflösung auf Seite 171