



Andreas Stadler

# Photonik der Solarzellen

Innovative Messverfahren  
für moderne Solarzellen

 Springer Vieweg

---

# Photonik der Solarzellen

---

Andreas Stadler

# Photonik der Solarzellen

Innovative Messverfahren für moderne  
Solarzellen

Andreas Stadler  
München  
Deutschland

ISBN 978-3-658-08917-7  
DOI 10.1007/978-3-658-08918-4

ISBN 978-3-658-08918-4 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

*Lektorat:* Dr. Daniel Fröhlich | Pamela Frank

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

## Vorwort

Sogenannte alternative Energiequellen werden zukünftig zum Standard in der Energieversorgung der Bundesrepublik Deutschland werden. Dies ist derzeit schon absehbar. Zahlreiche Wind-, Wasser und insbesondere Solarkraftwerke werden in Betrieb genommen, während vorwiegend alte Kernkraftwerke stillgelegt werden.

Folglich ist die Effizienz und damit die Wirtschaftlichkeit auch der Solarkraftwerke zu erhöhen, um den zukünftig zunehmenden Energiebedarf – bei gleichbleibender Fläche, welche diese Kraftwerke an Gebäuden und in der Natur einnehmen – sicherzustellen. Voraussetzung hierfür ist ein fundiertes Verständnis der Funktionsweise von Solarzellen.

Dieses „*Verstehen der Funktionsweise von Solarzellen*“ zu ermöglichen, ist zentrales Ziel dieses Buches. Hierbei wird nicht nur die bislang noch vorwiegend verwendete Silizium-Technologie berücksichtigt, sondern insbesondere die zukunftsweisende Dünnschicht-Solarzellen-Technologie in den Vordergrund gestellt.

Ausgehend von grundlegenden physikalischen Gesetzen wird *im ersten Teil dieses Buches* ein in sich konsistentes, umfassendes Werk an opto-elektrischen Formeln, für die **Photonik der Solarzellen**, nachvollziehbar und weitestgehend näherungsfrei hergeleitet. Die Gültigkeit all dieser Gesetze wird stets über entsprechende Messungen, mit derzeit marktführenden Geräten, experimentell belegt. Da hierbei auf numerische Betrachtungen gänzlich verzichtet worden ist und stattdessen arithmetische Beziehungen effektiv angewandt worden sind, können diese vom Leser mit Tabellenkalkulations- und eigenen Simulationsprogrammen leicht nachvollzogen werden.

*Im zweiten Teil dieses Buches* werden einzelne Schichten und ganze Solarzellen entsprechend der soeben genannten Theorien systematisch messtechnisch analysiert. Die Verwendung verbesserter, bereits vorhandener und innovativer neuer theoretischer Modelle erlaubt somit tiefe Einsichten in die vom Herstellungsprozess (verwendete Prozessparameter) abhängenden physikalischen Größen der einzelnen Schichten sowie in die, hierdurch bedingte Funktionsweise ganzer Solarzellen. Ziel dieses Buches ist es hierbei nicht, Solarzellen mit extrem hohen Wirkungsgraden zu präsentieren, sondern vielmehr den vielfältigen Einfluss eines Produktionsverfahrens – hier des Kathodenzerstäubungsverfahrens (Sputterns) – auf die opto-elektrischen Größen der Schichten und Solarzellen

herauszuarbeiten. Die hier gezeigten Einflüsse sind für ähnliche Herstellungsverfahren in vergleichbarer Weise anwendbar.

Bedanken möchte ich mich bei allen Menschen, auch aus der Universität Salzburg, die zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben. Allen Lesern wünsche ich viel Freude beim Erarbeiten dieser zukunftssträchtigen Thematik.

im Dezember 2014

Andreas Stadler

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	1
1.1	Die Nutzung des Sonnenlichts .....	1
	Literatur .....	4
<b>2</b>	<b>Theorie</b> .....	5
2.1	Optische Grundlagen für Grenzflächen und Volumina von Festkörpern ..	5
2.1.1	Transmissions- $t$ und Reflexionskoeffizienten $r$ – Fresnelsche Gleichungen .....	5
2.1.2	Transmissions- $T$ , Absorptions- $A$ und Reflexionsgrade $R$ .....	16
2.2	UV/Vis/NIR-Spektroskopie an Ein- und Zwei-Schichten-Systemen .....	29
2.2.1	Physikalische Größen für Ein-Schicht-Systeme .....	29
2.2.2	Das erweiterte Ein-Schicht-Modell .....	52
2.2.3	Das exakte Zwei-Schichten-Modell – Stadler-Modell .....	56
2.2.4	Grundlegendes zum Vermessen von Mehr-Als-Zwei-Schichten-Systemen .....	62
2.3	Das Keradec/Swanepoel-Modell .....	62
2.3.1	Parameter des Substrats .....	62
2.3.2	Die wellenlängenabhängige Transmissionsrate $T(n_{Sch}, \alpha_{Sch}, d_{Sch})$ nach Keradec .....	66
2.3.3	Brechungsindex $n_{Sch}$ und Absorptionskoeffizient $\alpha_{Sch}$ nach Swanepoel .....	68
2.4	Das Quantenmechanische Modell .....	73
2.4.1	Quantenmechanisches Modell für ein Ein-Schicht-System .....	73
2.4.2	Quantenmechanisches Modell für Zwei-Schichten-Systeme .....	81
2.5	Elektrische Bestimmung des spezifischen Widerstandes dünner Schichten .....	82
2.5.1	Van-der-Pauw Methode .....	82
2.5.2	Lineare Vier-Spitzen-Methode .....	85
2.5.3	Zwei-Spitzen-Methode .....	87

2.6	Dotierstoffkonzentrationen, Beweglichkeiten und Stoßzeiten . . . . .	90
2.6.1	Ladungsträgerdichten, Dotierstoffkonzentrationen $n$ , $p$ und Energieniveaus $E$ . . . . .	90
2.6.2	Beweglichkeit $\mu$ und Stoßzeit $\tau$ . . . . .	100
2.7	Strom-Spannungs-Messungen an Solarzellen . . . . .	105
2.7.1	Theoretische Strom-Spannungs-Kennlinie und Ersatzschaltbild . .	105
2.7.2	Einfluss des Lichtspektrums auf die $I(U)$ -Kennlinie . . . . .	114
2.7.3	Alterung . . . . .	120
	Literatur . . . . .	124
<b>3</b>	<b>Experimente</b> . . . . .	125
3.1	Das Materialsystem der Sulfide . . . . .	125
3.1.1	Allgemeines zu Sulfiden für die Photovoltaik . . . . .	125
3.1.2	Auswahl der Materialien, Produktionsverfahren und Analysemethoden . . . . .	127
3.1.3	Untersuchte Material- und Solarzellen-Systeme . . . . .	129
3.2	UV/Vis/NIR-Spektroskopie an transparenten und opaken Schichten . . .	131
3.2.1	Transparente, isolierende Glas- und BSG-Substrate . . . . .	131
3.2.2	Transparente, leitende Oxide (TCO) . . . . .	132
3.2.3	Puffer- und Zwischenschichten . . . . .	181
3.2.4	Opake, absorbierende Sulfide . . . . .	185
3.2.5	Grundkontakte aus Molybdän Mo . . . . .	216
3.3	Elektrische Bestimmung des spezifischen Schichtwiderstandes . . . . .	220
3.3.1	Aluminiumdotierte Zinkoxid (ZnO:Al) TCO-Schichten . . . . .	221
3.3.2	Zinnsulfid ( $\text{Sn}_x\text{S}_y$ ) Absorberschichten . . . . .	221
3.4	Strom-Spannungs-Messungen an Solarzellen . . . . .	224
3.4.1	Strom-Spannungs-Messungen . . . . .	224
3.4.2	Einfluss typischer Prozessparameter . . . . .	226
3.4.3	Einfluss der Beleuchtungsstärke $E$ und der Temperatur $T$ . . . . .	231
	Literatur . . . . .	233
<b>4</b>	<b>Anhänge</b> . . . . .	239
4.1	Anhang A: Exaktes Lösen eines Polynoms 3. Grades . . . . .	239
4.2	Anhang B: Exaktes Lösen eines Polynoms 4. Grades . . . . .	242
4.3	Anhang C: Perkin Elmer Lambda 750 UV/Vis/NIR Spektrometer . . . . .	244
4.4	Anhang D: Strom-Spannungs-Messplatz . . . . .	246
4.5	Anhang E: Vierspitzenmessplatz . . . . .	248
4.6	Anhang F: Verbindungen, ausschließlich mit Zink Zn und Sauerstoff O, entsprechend der Inorganic Crystal Structure Database ICSD 2009/1 . . .	249
4.7	Anhang G: Verbindungen, ausschließlich mit Zink Zn, Sauerstoff O und Aluminium Al entsprechend der Inorganic Crystal Structure Database ICSD 2009/1 . . . . .	250

---

4.8	Anhang H: Verbindungen, ausschließlich mit Zink Zn, Sauerstoff O, Stickstoff N und Aluminium Al entsprechend der Inorganic Crystal Structure Database ICSD 2009/1 .....	250
4.9	Anhang I: Verbindungen, ausschließlich mit Zinn Sn und Schwefel S, entsprechend der Inorganic Crystal Structure Database ICSD 2009/1 ...	251
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	253

---

## 1.1 Die Nutzung des Sonnenlichts

Sonne. Sie ist das Zentralgestirn unseres Planetensystems, das nach ihr Sonnensystem genannt wird. Die Sonne ist für die Erde von fundamentaler Bedeutung. Viele wichtige Prozesse auf der Erdoberfläche, wie das Klima und das Leben selbst, wären ohne die Strahlungsenergie der Sonne nicht denkbar. So stammen etwa 99,98 % des gesamten Energiebeitrags zum Erdklima von der Sonne, der winzige Rest wird aus geothermalen Wärmequellen gespeist. Am Äquator ist die Sonneneinstrahlung am stärksten, sie nimmt zu den Polen hin etwas ab. Zudem ist sie abhängig von Tages- und Jahreszeit, d. h. von der Zu- bzw. Abwendung der Erdoberfläche zur/von der Sonne, Letztendlich ist sie auch von der Erdatmosphäre abhängig, d. h. vom witterungsbedingten optischen Widerstand für das Sonnenlicht, vgl. Tab. 1.1.

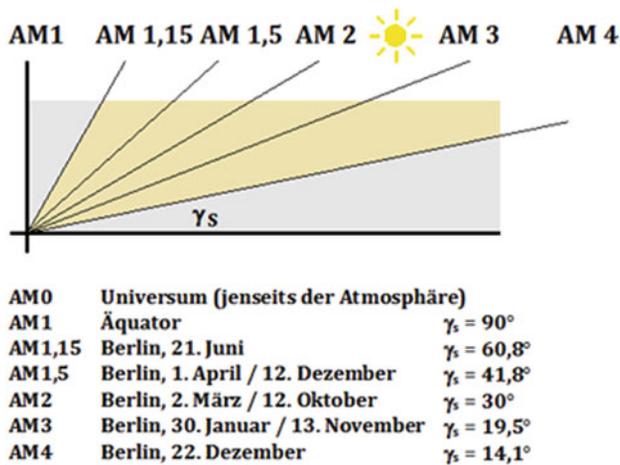
Die Luftmasse (air mass, AM), welche die Sonnenstrahlen bei wolkenfreiem Himmel durchlaufen müssen um auf die Erdoberfläche zu gelangen, ist also von der Tages- und Jahreszeit abhängig; d.h. abhängig vom Einfallswinkel  $\gamma_S$  des Sonnenlichts zur Erdoberfläche. Der einem Einfallswinkel  $\gamma_S$  entsprechende AM-Wert lässt sich über  $AM = 1/\sin \gamma_S$  berechnen.  $AM = 0$  ist definiert für das Spektrum außerhalb der Erdatmosphäre (extraterrestrisches Spektrum) im Weltraum. Die Strahlungsleistungsdichte beträgt dort  $p_0 = 1367 \text{ W/m}^2$  (Solarkonstante).  $AM = 1$  erhält man für das Spektrum der senkrecht auf die Erdoberfläche fallenden Sonnenstrahlen, d.h. die Sonne muss dafür genau im Zenit stehen,  $\gamma_S = 90^\circ$ ,  $AM = 1/\sin \gamma_S = 1$ . Die Strahlen legen hierbei den kürzesten Weg durch die Atmosphäre zur Erdoberfläche zurück. Für  $AM = 1,5$  ergibt sich ein Zenitwinkel von etwa  $\gamma_S = 41,8^\circ$ . Die gesamte Strahlungsleistungsdichte des entsprechenden Spektrums beträgt hierbei  $p_{Erde} = 1000 \text{ W/m}^2$ , vgl. Abb. 1.1. Aus diesem Grunde wurde  $AM = 1,5$  als Standardwert für die Vermessung von Solarmodulen eingeführt.

**Tab. 1.1** Strahlungsleistungsdichte  $p_{\text{Erde}}$  (AM1.5) des Sonnenlichts auf der Erdoberfläche in Abhängigkeit von der Bewölkung, d. h. in Abhängigkeit vom optischen Widerstand, den die Atmosphäre für das Sonnenlicht auf seinem Weg zur Erdoberfläche darstellt [1]

$p_{\text{Erde}}/\text{Wm}^{-2}$	Sonnenschein	leicht bewölkt	stark bewölkt
Sommer	600 ... 1000	300 ... 600	100 ... 300
Winter	300 ... 500	150 ... 300	50 ... 150

Sonnenstrahlen, die auf die Erdoberfläche treffen können reflektiert, absorbiert oder mitunter auch transmittiert werden. Reflektierter und transmittierter Anteil passieren wiederholt die Atmosphäre und machen somit unseren Planeten Erde im Weltall sichtbar. Der absorbierte Anteil ermöglicht auf der Erde Leben. So nutzen die Pflanzen mit ihren ganz unterschiedlich ausgebildeten Blättern das Sonnenlicht für ihr Wachstum (Photosynthese). Für uns Menschen ist es von technologischem und wirtschaftlichem Interesse die optische Energie des Sonnenlichts in andere Energieformen, wie mechanische-, thermische- oder elektrische Energie umzuwandeln (Abb. 1.2).

In der Photovoltaik, d. h. im Fall der Wandlung von optischer- in elektrische Energie, verwendet man i.Allg. reine Halbleiter (z. B. Silizium Si) oder Verbindungshalbleiter (z. B. Galliumarsenid GaAs oder Kupferindiumselenid CuInSe<sub>2</sub>).



**Abb. 1.1** Die Luftmasse (air mass, AM) welche die Sonnenstrahlen durchlaufen müssen um auf die Erdoberfläche zu gelangen ist von Tages- und Jahreszeit abhängig. Die der Jahreszeit zugeordneten AM-Werte errechnen sich aus dem Einfallswinkel  $\gamma_s$  über  $AM = 1/\sin \gamma_s$ . Die gemachten Angaben gelten für Zentraleuropa, sowie entsprechende Breitengrade in Nordamerika und Asien. Berücksichtigt man die Inversion der Jahreszeiten, sind sie natürlich auch auf die Südhalbkugel, d. h. Südamerika, Südafrika und Australien anwendbar

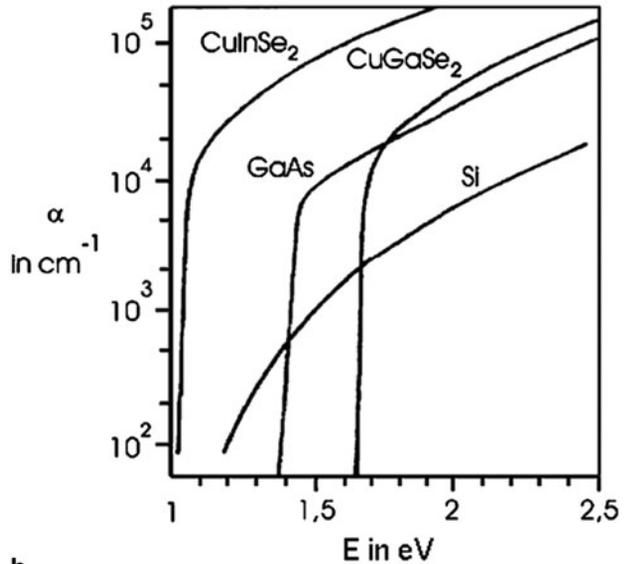
**Abb. 1.2 a**

Silizium-Solarzellen. (Quelle unbekannt). **b**

Absorptionskoeffizienten  
verschiedener

Absorbermaterialien, nach [2].

Zu sehen sind sowohl der  
reine Halbleiter Silizium (Si)  
als auch die  
Verbindungshalbleiter (GaAs,  
CuGaSe<sub>2</sub> und CuInSe<sub>2</sub>)

**a****b**

Bekannt ist hier bereits die CI(G)S-Technologie, die primär auf chemischen Verbindungen von Kupfer, Indium (Gallium) und wahlweise Schwefel oder Selen sowie einigen weiteren Elementen basiert. Ziel der Forschung muss es sein, weitere Gruppen chalcogener Verbindungshalbleiter zu finden, deren photovoltaische Eigenschaften noch effizienter optische in elektrische Energie umwandeln (z. B. Sulfosalze).

**Dieses Buch** befasst sich mit physikalischen Theorien und der opto-elektrischen Analyse (Messtechnik) für transparente und opake Schichten sowie der hiermit hergestellten Solarzellen.

Bestehende physikalische Theorien werden verbessert und weiterentwickelt, um opto-elektrische Messungen (z. B. UV/Vis/NIR Spektroskopie, I(U) Messung) an einzelnen Schichten und kompletten Solarzellen noch effektiver auswerten zu können.

Mithilfe dieser Theorien werden dann exemplarisch eine TCO-Schicht (Transparent Conducting Oxide/aluminiumdotiertes Zinkoxid (ZnO:Al)), eine Pufferschicht (Cadmiumsulfid (CdS)), eine Absorberschicht (binäres Zinnsulfid (SnS)) und ein typischer Grundkontakt (Molybdän (Mo)) opto-elektrisch analysiert. Da die theoretischen Modelle weitestgehend näherungsfrei hergeleitet wurden, ergeben sich hierbei tiefe Einsichten in Zusammenhänge zwischen Herstellungsverfahren (Kathodenzerstäubung (Sputtern)) und physikalischen Eigenschaften der Schichten.

---

## Literatur

1. Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenschein>, 2009.
2. D. Meissner, Solarzellen, ISBN 3 5280 65184, Vieweg, 1993.

---

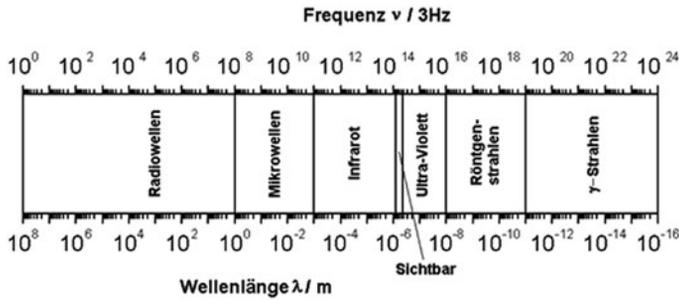
## 2.1 Optische Grundlagen für Grenzflächen und Volumina von Festkörpern

### 2.1.1 Transmissions- $t$ und Reflexionskoeffizienten $r$ – Fresnelsche Gleichungen

Sonnenlicht ist physikalisch betrachtet eine elektromagnetische Welle. **Elektromagnetische Wellen** sind, wie alle anderen Wellen auch, vom Ort  $\vec{r}$  und von der Zeit  $t$  abhängig. Mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $\nu = 1/T$  (wobei  $T$  die Periodendauer ist) gilt für die Lichtgeschwindigkeit  $c = \lambda\nu$  ( $c \approx 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$ ). Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen verläuft damit kontinuierlich von  $\lambda \approx 100000\text{km}$  bis  $\lambda \approx 0,1\text{fm}$  – dies entspricht Frequenzen von  $\nu \approx 3\text{Hz}$  bis  $\nu \approx 3 \times 10^{24}\text{Hz}$ . Dieses kontinuierliche Spektrum wird in verschiedene arbiträre Bereiche eingeteilt, welche ihrerseits wieder unterteilt sein können, vgl. Abb. 2.1.

Für das menschliche Auge sichtbar (Vis = Visible) ist nur der vergleichsweise kleine Bereich von  $\lambda \approx 380\text{nm}$  bis  $\lambda \approx 780\text{nm}$ , also der Frequenzbereich von  $\nu \approx 7,89 \times 10^{14}\text{Hz}$  bis  $\nu \approx 3,85 \times 10^{14}\text{Hz}$ . Dieser kann entsprechend Tab. 2.1 in die sechs Spektralfarben, violett, blau, grün, gelb, orange und rot, unterteilt werden. An das langwellige Ende des **sichtbaren Spektralbereichs** grenzt der **Infrarotbereich (IR)**, der wiederum in IR-A, IR-B, IR-C und fernes IR gegliedert werden kann, vgl. Tab. 2.1. Am kurzwelligen Ende schließt sich der **Ultra-Violette (UV) Bereich** des Spektrums an.

Diese drei Spektralbereiche, UV, Vis und IR, wobei vom Infrarotbereich nur der dem sichtbaren Spektrum nahe Anteil (NIR = IR – A und IR – B) abgedeckt wird, bilden die Basis für die UV/Vis/NIR Spektroskopie.



**Abb. 2.1** Das elektromagnetische Spektrum

**Tab. 2.1** Unterteilung des sichtbaren und infraroten Bereichs des elektromagnetischen Spektrums

Farbe	Wellenlänge $\lambda/\text{nm}$	Frequenz $\nu/10^{14}\text{Hz}$	Energie $E/\text{eV}$
Violett	380 ... 435	7,9 ... 6,9	3,6 ... 2,8
Blau	435 ... 500	6,9 ... 6,0	2,8 ... 2,4
Grün	500 ... 565	6,0 ... 5,3	2,4 ... 2,2
Gelb	565 ... 590	5,3 ... 5,1	2,2 ... 2,1
Orange	590 ... 625	5,1 ... 4,8	2,1 ... 2,0
Rot	625 ... 780	4,8 ... 3,8	2,0 ... 1,6
IR-A	780 ... 1400	3,8 ... 2,14	1,6 ... 0,886
IR-B	1400 ... 3000	2,14 ... 1,0	0,886 ... 0,414
IR-C	3000 ... $1 \times 10^4$	1,0 ... 0,3	0,414 ... 0,124
Ferner IR	$1 \times 10^4$ ... $1 \times 10^6$	$0,3$ ... $3 \times 10^{-3}$	$0,124$ ... $1,24 \times 10^{-3}$

Trifft nun eine elektromagnetische Welle, wie Licht, auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, so müssen die elektrische  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  der einfallenden **Welle als Funktion von Raum  $\vec{r}$  und Zeit  $t$**

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{e0} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} e^{i\omega_e t}, \\ \vec{H}_e(\vec{r}, t) &= \vec{H}_{e0} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} e^{i\omega_e t}\end{aligned}\quad (2.1)$$

auch nach der Wechselwirkung mit der Grenzfläche, d. h. der **Reflexion  $\mathbf{r}$**  an der Grenzfläche bzw. der **Transmission  $\mathbf{t}$**  durch die Grenzfläche,

$$\begin{aligned}\vec{E}_m(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{m0} e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r} + i\varphi_m} e^{i\omega_m t}, \\ \vec{H}_m(\vec{r}, t) &= \vec{H}_{m0} e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r} + i\varphi_m} e^{i\omega_m t}, \\ m &\in \{r, t\}\end{aligned}\quad (2.2)$$

erhalten bleiben – es gelten folgende Bilanzgleichungen:

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(\vec{r}, t) &= \vec{E}_r(\vec{r}, t) + \vec{E}_t(\vec{r}, t), \\ \vec{H}_e(\vec{r}, t) &= \vec{H}_r(\vec{r}, t) + \vec{H}_t(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Eine mögliche Phasenverschiebung der drei Feldstärken zueinander – ob nun elektrische  $\vec{E}$  oder magnetische  $\vec{H}$  – wird mit  $\varphi_m, m \in \{r, t\}$  bezeichnet und formal ohne Einschränkung der Allgemeinheit dem Ortsvektor  $\vec{r}$  zugeordnet.

Der Wellenvektor  $\vec{k}$ , der elektrische Feldvektor  $\vec{E}$  und der magnetische Feldvektor  $\vec{H}$  stehen jeweils senkrecht aufeinander und bilden ein Rechtssystem. Die Wellenvektoren  $\vec{k}_m, m \in \{e, r, t\}$  spannen die Einfallsebene auf und zeigen in die Richtung, in die sich nach deBroglies Welle-Teilchen-Dualismus die den Wellen zugeordneten Teilchen – die Photonen – bewegen.

Zu betrachten sind nun zwei **Polarisationszustände** und zwar für einen *elektrischen Feldvektor* der einerseits *senkrecht zur Einfallsebene* steht und andererseits *in der Einfallsebene* liegt. Jede beliebige räumliche Lage einer transversalen elektromagnetischen Welle lässt sich dann durch Linearkombination dieser beiden Polarisationszustände beschreiben.

An der Grenzfläche zwischen zwei isotropen Medien müssen Betrag und Phase der beiden Feldvektoren  $\vec{E}, \vec{H}$  als Funktion von Raum  $r$  und Zeit  $t$  stetig sein. Für deren Phase  $\varphi_m = \omega_m t, m \in \{e, r, t\}$  gilt also ganz allgemein

$$\begin{aligned}\omega_e t &= \omega_r t = \omega_t t \\ \Leftrightarrow \omega_e &= \omega_r = \omega_t, \quad \omega_m = 2\pi\nu_m, \quad m \in \{e, r, t\} \\ \Leftrightarrow v_e &= v_r = v_t\end{aligned}\quad (2.4)$$

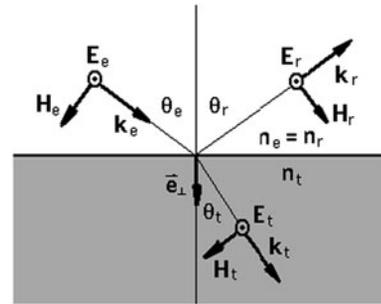
und

$$\begin{aligned}\vec{e}_\perp \times \vec{k}_e \cdot \vec{r} &= \vec{e}_\perp \times (\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \varphi_r) = \vec{e}_\perp \times (\vec{k}_t \cdot \vec{r} + \varphi_t) \\ \Leftrightarrow \vec{e}_\perp \times (\vec{k}_e - \vec{k}_r) &= 0, \quad \vec{e}_\perp \times (\vec{k}_e - \vec{k}_t) = 0 \\ \Leftrightarrow k_e \sin \theta_e - k_r \sin \theta_r &= 0, \quad k_e \sin \theta_e - k_t \sin \theta_t = 0,\end{aligned}\quad (2.5)$$

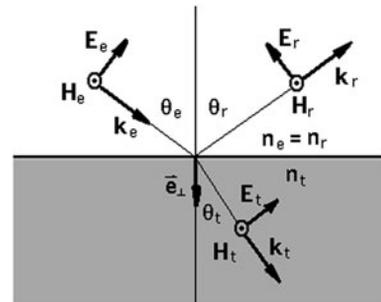
berücksichtigt man noch  $k_m = 2\pi/\lambda_m, c_m = \lambda_m \nu = 1/\sqrt{\varepsilon_m \mu_m}$  und  $n_m = c_0/c_m = \sqrt{\varepsilon'_m \mu'_m}$  wobei  $\varepsilon_m = \varepsilon'_m \varepsilon_0, \mu = \mu'_m \mu_0, m \in \{e, r, t\}$  dann folgt daraus das **Snelliussche Brechungsgesetz** (benannt nach dem niederländischen Mathematiker Rudolph Snellius)

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_r} = \frac{k_r}{k_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_r} = \frac{C_e}{C_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \mu_r}{\varepsilon_e \mu_e}} = \frac{n_r}{n_e} = 1, \\ \frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_t} = \frac{C_e}{C_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_t \mu_t}{\varepsilon_e \mu_e}} = \frac{n_t}{n_e} \neq 1, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \theta_e = \theta_r, \quad \left| \vec{k}_e \right| = \left| \vec{k}_r \right|, \lambda_e = \lambda_r, \quad c_e = c_r, \quad n_e = n_r\end{aligned}\quad (2.6)$$

**Abb. 2.2** Reflexion und Transmission einer einfallenden Welle, deren E-Feld senkrecht zur Einfallsebene steht



**Abb. 2.3** Reflexion und Transmission einer einfallenden Welle, deren E-Feld parallel zur Einfallsebene steht



d. h. der Zusammenhang zwischen den Winkeln  $\theta_m$ , den Beträgen der Wellenvektoren  $k_m$ , den Wellenlängen  $\lambda_m$ , den Geschwindigkeiten  $c_m$  den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m$ , den Permeabilitäten  $\mu_m$  und den Brechungsindizes  $n_m$ , vgl. Abb. 2.2 und 2.3. Erhalten bleibt jedoch durchwegs die Frequenz  $\nu_m = 1/T_m = \omega_m/2\pi$ . Dies, da an der Grenzfläche aus Gl. (2.4) die Zeit  $t$  und damit deren Kehrwert, die Frequenz, gekürzt werden kann.

Die soeben genannten Größen sind durchwegs komplexwertig, d. h. sie können in einen Realteil und einen Imaginärteil zerlegt werden:  $\theta_m = \theta_{m,R} + i\theta_{m,I}$ ,  $k_m = k_{m,R} + ik_{m,I}$ ,  $\lambda_m = \lambda_{m,R} + i\lambda_{m,I}$ ,  $c_m = c_{m,R} + ic_{m,I}$ ,  $\varepsilon_m = (\varepsilon'_{m,R} + i\varepsilon'_{m,I})\varepsilon_0$ ,  $\mu_m = (\mu'_{m,R} + i\mu'_{m,I})\mu_0$  und  $n_m = n_{m,R} + in_{m,I}$ , wobei  $m \in \{e, r, t\}$ . Kann die Absorption von Licht im Medium vernachlässigt werden, dann können die Imaginärteile dieser Größen vernachlässigt werden.

Betrachten wir zuerst den **Polarisationszustand, in dem die elektrischen Feldvektoren  $\vec{E}$  senkrecht auf die Einfallsebene** stehen, vgl. Abb. 2.2. Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}_e + \vec{E}_r &= \vec{E}_t \\ \Leftrightarrow E_e + E_r &= E_t.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Der Betrag des  $\vec{E}$ -Feldes senkrecht zur Grenzfläche ist für elektrische Feldvektoren senkrecht zur Einfallsebene stets null.

Da der magnetische Feldvektor  $\vec{H}$  mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und dem elektrischen Feldvektor  $\vec{E}$  ein Rechtssystem bildet liegt er für diesen Fall in der Einfallsebene. Seine

Komponente tangential zur Grenzfläche ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_\perp \times (\vec{H}_e + \vec{H}_r) &= \vec{e}_\perp \times \vec{H}_t \\
 \Leftrightarrow H_e \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_e\right) - H_r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) &= H_t \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) \\
 \Leftrightarrow H_e \cos \theta_e - H_r \cos \theta_r &= H_t \cos \theta_t \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{c_e \mu_e} (E_e - E_r) \cos \theta_e &= \frac{1}{c_t \mu_t} E_t \cos \theta_t; \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

für die Komponente vertikal zur Grenzfläche gilt analog

$$\frac{1}{c_e \mu_e} (E_e + E_r) \sin \theta_e = \frac{1}{c_t \mu_t} E_t \sin \theta_t, \tag{2.9}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 |\vec{e}_{k_m} \times \vec{E}_m| &= |c_m \vec{B}_m| = |c_m \mu_m \vec{H}_m|, \\
 |\vec{e}_{k_m} \cdot \vec{E}_m| &= 0, \\
 m &\in \{e, r, t\} \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

und  $\theta_e = \theta_r, c_e = c_r$  aus Gl. (2.5) verwendet wurden.

Den **Amplitudenreflexionskoeffizienten** erhält man durch eliminieren von  $E_t$  aus dem Gleichungssystem (2.7) & (2.8) zu

$$r_\perp = \left(\frac{E_r}{E_e}\right)_\perp = \frac{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_e - (1/c_t \mu_t) \cos \theta_t}{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_e + (1/c_t \mu_t) \cos \theta_t} \xrightarrow{\mu_e \rightarrow \mu_t} -\frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \tag{2.11}$$

Das negative Vorzeichen des Reflexionskoeffizienten für ein  $\vec{E}$ -Feld senkrecht zur Einfallsebene ist ein Hinweis auf eine Phasendrehung zwischen  $\vec{E}_e$  und  $\vec{E}_r$  um den Winkel  $\varphi_r = \pi$ , d.h.  $\vec{E}_r$  und  $\vec{E}_e$  sind antiparallel. Darauf soll jedoch später noch genauer eingegangen werden.

Den **Amplitudentransmissionskoeffizienten** erhält man durch eliminieren von  $E_r$  aus dem Gleichungssystem bestehend aus Gln. (2.7) und (2.8) zu

$$t_\perp = \left(\frac{E_t}{E_e}\right)_\perp = \frac{2(1/c_e \mu_e) \cos \theta_e}{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_e + (1/c_t \mu_t) \cos \theta_t} \xrightarrow{\mu_e \rightarrow \mu_t} +\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_t)}, \tag{2.12}$$

wobei das Snelliussche Gesetz Gl. (2.5) berücksichtigt wurde.

Betrachten wir nun den **Polarisationszustand, in dem die elektrischen Feldvektoren  $\vec{E}$  in der Einfallsebene liegen**, vgl. Abb. 2.3.

Für die Beträge der elektrischen Feldvektoren tangential zur Grenzfläche gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_\perp \times (\vec{E}_e + \vec{E}_r) &= \vec{e}_\perp \times \vec{E}_t \\
 \Leftrightarrow E_e \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_e\right) - E_r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) &= E_t \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E_e \cos \theta_e - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ \Leftrightarrow (E_e - E_r) \cos \theta_e &= E_t \cos \theta_t \end{aligned} \quad (2.13)$$

und für deren Beträge vertikal zur Grenzfläche gilt analog

$$(E_e + E_r) \sin \theta_e = E_t \sin \theta_t \quad (2.14)$$

Da der magnetische Feldvektor  $\vec{H}$  mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und dem elektrischen Feldvektor  $\vec{E}$  ein Rechtssystem bildet und sowohl der  $\vec{k}$ -Vektor als auch der  $\vec{E}$ -Vektor in der Einfallsebene liegen, steht der  $\vec{H}$ -Vektor senkrecht auf dieser. Dies bedeutet aber auch, dass nur die tangential zur Grenzfläche verlaufende Komponente des magnetischen Feldes  $\vec{H}$  von null verschieden ist. Für sie gilt mit Gl. (2.10)

$$\begin{aligned} \vec{H}_e + \vec{H}_r &= \vec{H}_t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c_e \mu_e} (E_e + E_r) &= \frac{1}{c_t \mu_t} E_t \end{aligned} \quad (2.15)$$

Den **Amplitudenreflexionskoeffizienten** erhält man wieder durch eliminieren von  $E_t$  aus dem Gleichungssystem Gln. (2.13) & (2.15) zu

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_{\parallel} = - \frac{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_t - (1/c_t \mu_t) \cos \theta_e}{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_t + (1/c_t \mu_t) \cos \theta_e} \\ &\xrightarrow{\mu_e \rightarrow \mu_t} + \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Den **Amplitudentransmissionskoeffizienten** erhält man durch eliminieren von  $E_r$  zu

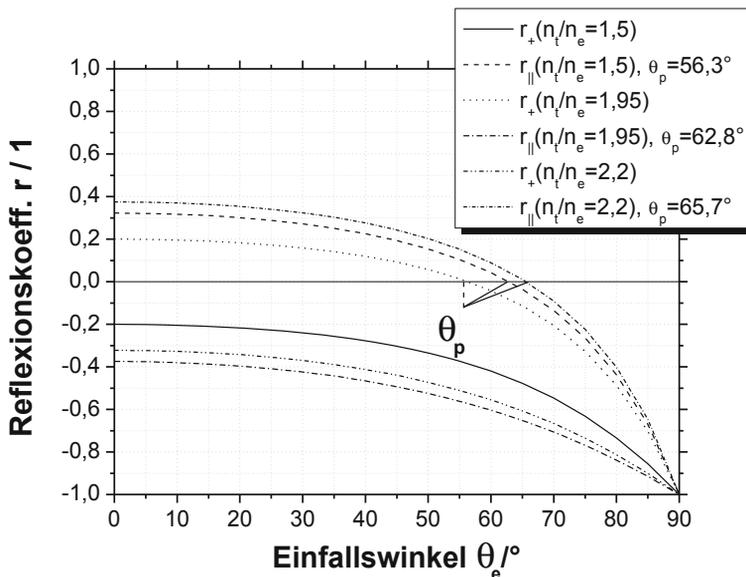
$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \left( \frac{E_t}{E_e} \right)_{\parallel} = \frac{2 (1/c_e \mu_e) \cos \theta_e}{(1/c_e \mu_e) \cos \theta_t + (1/c_t \mu_t) \cos \theta_e} \\ &\xrightarrow{\mu_e \rightarrow \mu_t} + \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_t) \cos(\theta_e - \theta_t)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei das Snelliussche Gesetz verwendet wurde.

Die Gleichungen für die Amplitudenkoeffizienten für die Reflexion Gln. (2.11), (2.16) und die Transmission Gln. (2.12), (2.17) werden (nach dem französischen Physiker Augustin Jean Fresnel) **Fresnelsche Gleichungen** genannt. Diese lassen sich mit Hilfe des Snelliusschen Gesetzes  $\sin \theta_t = (c_t/c_e) \sin \theta_e = (n_e/n_t) \sin \theta_e$  und  $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}$  durch Elimination des Winkels  $\theta_t$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\theta_e$ , den Brechungsindizes  $n_e$ ,  $n_t$  und den Induktionskonstanten  $\mu_e$ ,  $\mu_t$  darstellen.

$$r_{\perp} = \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_{\perp} = \frac{(n_e/\mu_e) \cos \theta_e - (n_t/\mu_t) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e}}{(n_e/\mu_e) \cos \theta_e + (n_t/\mu_t) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e}} \quad (2.18)$$

$$t_{\perp} = \left( \frac{E_t}{E_e} \right)_{\perp} = \frac{2 (n_e/\mu_e) \cos \theta_e}{(n_e/\mu_e) \cos \theta_e + (n_t/\mu_t) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e}}, \quad (2.19)$$



**Abb. 2.4** Reflexionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels für  $n_e < n_t$  am Beispiel einer Luft/Glas-Grenzfläche  $n_L/n_G = 1/1,5$  und einer Luft/ZnO-Grenzfläche innerhalb des Wellenlängenbereichs von sichtbarem Licht zwischen  $n_{\text{ZnO}}(\lambda = 400 \text{ nm}) = 2,2$  und  $n_{\text{ZnO}}(\lambda = 800 \text{ nm}) = 1,95$

$$r_{\parallel} = \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_{\parallel} = \frac{(n_e/\mu_e) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e} - (n_t/\mu_t) \cos \theta_e}{(n_e/\mu_e) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e} + (n_t/\mu_t) \cos \theta_e}, \quad (2.20)$$

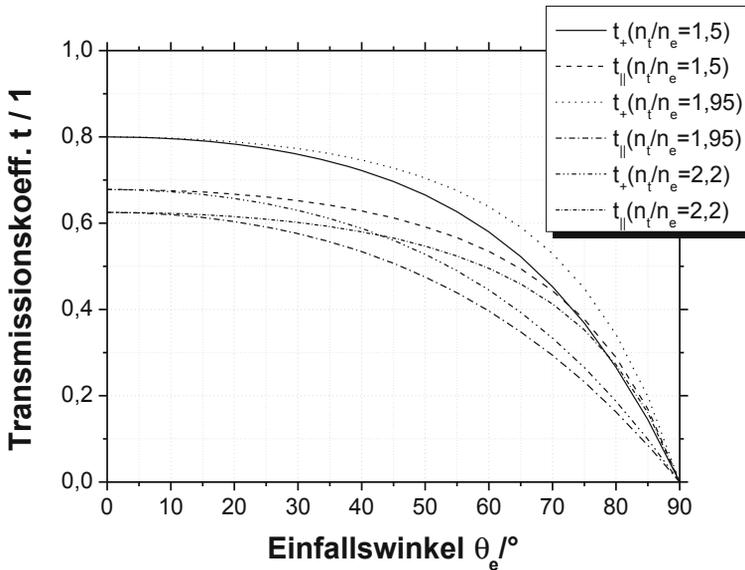
$$t_{\parallel} = \left( \frac{E_t}{E_e} \right)_{\parallel} = + \frac{2 (n_e/\mu_e) \cos \theta_e}{(n_e/\mu_e) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e} + (n_t/\mu_t) \cos \theta_e}. \quad (2.21)$$

Bis auf wenige Ausnahmen (Eisen Fe, Kobalt Co, Nickel Ni und einige magnetische Verbindungen wie Permalloy etc.) gilt für die Induktionskonstante  $\mu_e = \mu_t = \mu_0$ . Da jedoch Luft wie auch Glas und ZnO keinen nennenswerten magnetischen Einfluss auf die elektromagnetische Lichtwelle aufweisen, kann die Induktionskonstante i. Allg. aus allen Amplitudenkoeffizienten gekürzt werden.

Zu unterscheiden sind nun grundsätzlich der *Übergang einer elektromagnetischen Welle aus einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium, d. h.  $n_e < n_t$*  und der *Übergang aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium  $n_e > n_t$* .

### Experiment

Betrachten wir zunächst den **Übergang aus einem optisch dünneren Medium in ein optisch dichteres,  $n_e < n_t$** , für beispielsweise eine *Luft/Glas-* bzw. *Luft/ZnO-Grenzfläche* mit  $n_L = 1$  für Luft  $n_G = 1,5$  für Glas und  $n_{\text{ZnO}} = 1,95 \dots 2,2$  (wellenlängenabhängig).



**Abb. 2.5** Transmissionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels für  $n_e < n_t$  mit unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_t$ . Betrachtet werden eine Luft/Glas-Grenzfläche  $n_L/n_G = 1/1,5$  und eine Luft/ZnO-Grenzfläche  $n_L/n_{ZnO}(\lambda = 400\text{nm}) = 1/2,2, \dots, n_L/n_{ZnO}(\lambda = 800\text{nm}) = 1/1,95$

Abbildung 2.4 zeigt die Abhängigkeit der Reflexionskoeffizienten vom Einfallswinkel und den Brechungsindizes,  $n_e < n_t$ , für eine Luft/Glas-Grenzfläche mit  $n_L/n_G = 1/1,5$  und eine Luft/ZnO-Grenzfläche im Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts mit  $n_{ZnO}(\lambda = 400\text{ nm}) = 2,2, \dots, n_{ZnO}(\lambda = 800\text{ nm}) = 1,95$ . Der Brechungsindex von SnO verläuft im gleichen Wellenlängenbereich zwischen 2,2 und 1,8.

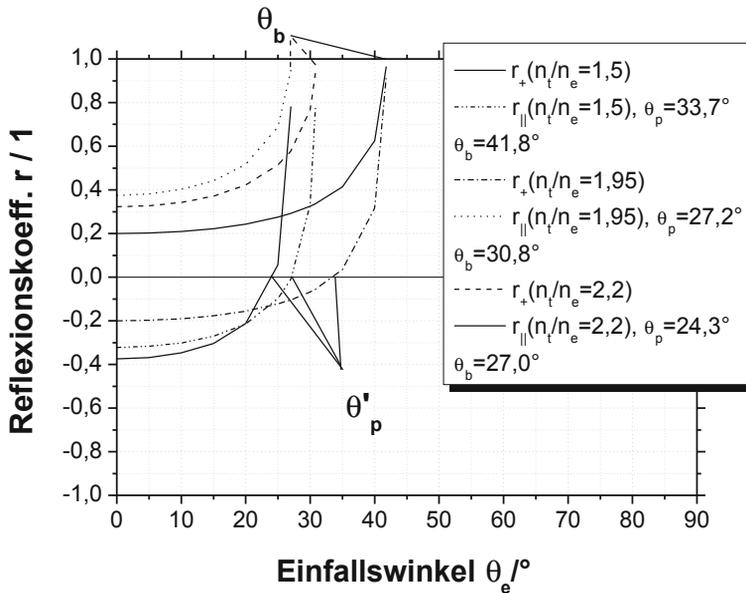
Abbildung 2.5 zeigt die entsprechenden Transmissionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels  $\theta_e$  und der Brechungsindizes  $n_e < n_t$ .

◇

### Experiment

Für den **Übergang aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium**,  $n_e > n_t$ , z. B. für eine Glas/Luft-Grenzfläche mit  $n_G/n_L = 1,5/1$  oder eine ZnO/Luft-Grenzfläche mit  $n_{ZnO}/n_L(\lambda = 400\text{nm}) = 2,2/1, \dots, n_{ZnO}/n_L(\lambda = 800\text{nm}) = 1,95/1$  ergeben sich die in Abb. 2.6 gezeigten Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit von den Brechungsindizes  $n_e, n_t$  und dem Einfallswinkel  $\theta_e$ .

◇



**Abb. 2.6** Reflexionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels für  $n_e > n_t$  (z. B. eine Glas/Luft-Grenzfläche  $n_G/n_L = 1,5/1$  oder eine ZnO/Luft-Grenzfläche mit  $n_{ZnO}/n_L (\lambda = 400nm) = 2,2/1, \dots, n_{ZnO}/n_L (\lambda = 800nm) = 1,95/1$ ). Reflexionskoeffizienten mit Beträgen größer als 1 sind physikalisch nicht sinnvoll

- ▶ **Bemerkung** An den **Polarisationswinkeln**  $\theta_e = \theta_p$  und  $\theta_e = \theta'_p$  verschwindet die Komponente parallel zur Einfallsebene der reflektierten elektrischen Feldstärke  $E_{r,\parallel}$  es verbleibt nur noch die vertikal zur Einfallsebene polarisierte Komponente  $E_{r,\perp}$ . Das von der Grenzfläche reflektierte Licht ist folglich senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Allgemein gilt für die beiden Polarisationswinkel  $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$  wenn es sich um dieselbe Grenzfläche zwischen zwei isotropen Medien handelt. ◇
- ▶ **Bemerkung** Der **Grenz- oder Brewster-Winkel**  $\theta_e = \theta_b$  tritt ausschließlich für  $n_e > n_t$  bei  $\theta_t = \pi/2$  auf. Für Einfallswinkel größer oder gleich dem Brewster-Winkel  $\theta_e \geq \theta_b$  tritt **Totalreflexion** ein, d. h. die gesamte einfallende Welle wird reflektiert. ◇
- ▶ **Bemerkung** Für **Einfallswinkel**  $\theta_e \in [0^\circ, \dots, 10^\circ]$  ändern sich die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten nur so geringfügig, dass die für diesen Bereich zu veranschlagende Abweichung i. Allg. in der Größenordnung etwaiger Messfehler zu liegen kommt, vgl. auch Anhang C. ◇

Bislang betrachteten wir die Beträge der elektromagnetischen Wellen nach Gl. (2.1)  $\vec{E}_e(\vec{r}, t) = \vec{E}_{e0} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} e^{i\omega_e t}$  und Gl. (2.2)  $\vec{E}_m(\vec{r}, t) = \vec{E}_{m0} e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r} + i\varphi_m} e^{i\omega_m t}$   $m \in \{r, t\}$ , d. h.  $E_e$ ,  $E_r$  und  $E_t$  zur Herleitung der **Fresnelschen Gleichungen**. Um nun Aussagen über die *Phasendifferenzen zwischen reflektierter und einfallender Welle*  $\varphi_{r,\perp}$ ,  $\varphi_{r,\parallel}$  oder *transmittierter und einfallender Welle*  $\varphi_{t,\perp}$ ,  $\varphi_{t,\parallel}$  machen zu können zerlegt man die komplexwertigen Amplitudenkoeffizienten explizit in ihre **Beträge**  $|r_\perp|$ ,  $|t_\perp|$ ,  $|r_\parallel|$ ,  $|t_\parallel|$  und ihre **Phasenanteile**  $\varphi_{r,\perp}$ ,  $\varphi_{t,\perp}$ ,  $\varphi_{r,\parallel}$ ,  $\varphi_{t,\parallel}$ .

Zu beachten sind zwei *Randwertbedingungen*: Erstens, dass die Beträge der Amplitudenkoeffizienten den Wert 1, d. h.  $E_e = E_r$  oder  $E_e = E_t$ , nicht überschreiten dürfen. Zweitens, dass die Phasenverschiebungen den Bereich zwischen  $+\pi$  und  $-\pi$  nicht über- oder unterschreiten können.

In komplexer Schreibweise erhält man mit Gln. (2.1), (2.2) und (2.5) sowie Gln. (2.11) und (2.16) folgende Fresnel-Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_\perp &= |r_\perp| e^{i\varphi_{r,\perp}} = \left( \frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)_\perp e^{i\varphi_{r,\perp}} = \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_\perp \\ &= \frac{(n_e/\mu_e) \cos \theta_e - (n_t/\mu_t) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e}}{(n_e/\mu_e) \cos \theta_e + (n_t/\mu_t) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

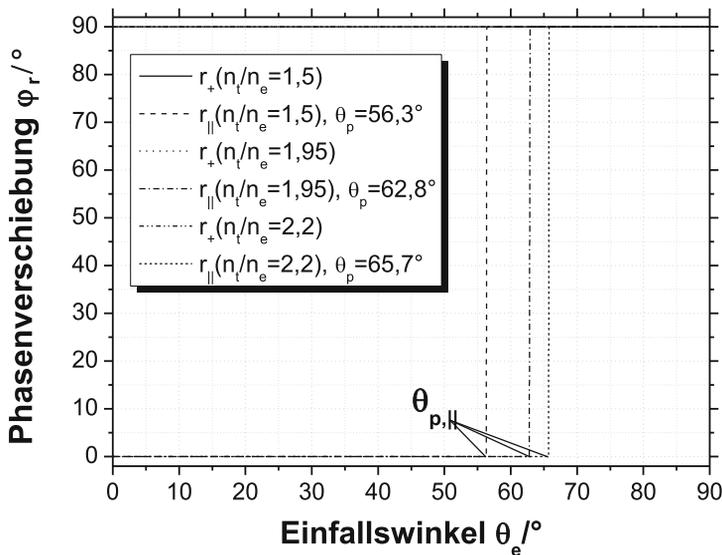
$$\begin{aligned} r_\parallel &= |r_\parallel| e^{i\varphi_{r,\parallel}} = \left( \frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right)_\parallel e^{i\varphi_{r,\parallel}} = \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_\parallel \\ &= \frac{(n_e/\mu_e) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e} - (n_t/\mu_t) \cos \theta_e}{(n_e/\mu_e) \sqrt{1 - (n_e/n_t)^2 \sin^2 \theta_e} + (n_t/\mu_t) \cos \theta_e} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Es seien wieder Schichten vorausgesetzt, deren Magnetismus keinen Einfluss auf die elektromagnetischen Wellen haben, d. h.  $\mu_e = \mu_t = \mu_0$ . Damit können die Induktionskonstanten wieder gekürzt werden. Sollte dies nicht der Fall sein, kann dennoch ganz analog vorgegangen werden.

### Experiment

Betrachten wir uns vorerst den **Übergang aus einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium**,  $n_e < n_t$ : Für  $r_\perp$ , vgl. auch Abb. 2.4, ist Gl. (2.22) durchwegs reell und das Vorzeichen stets negativ – d. h.  $E_{r0}$  ist gegenüber  $E_{e0}$  um  $\varphi_{r,\perp} = \pi$  in der Phase verschoben, vgl. Abb. 2.7.

Für  $r_\parallel$  wechselt in Gl. (2.23) das Vorzeichen bei  $\theta_e = \theta_{p,\parallel}$  von positiven zu negativen Werten (beide Terme im Zähler gleich groß). Folglich wechselt bei  $\theta_e = \theta_{p,\parallel}$  der Phasenwinkel  $\varphi_{r,\parallel}$  von 0 auf  $\pi$ , vgl. Abb. 2.7.



**Abb. 2.7** Phasenwinkel für den Übergang aus einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium  $n_e < n_t$

### Experiment

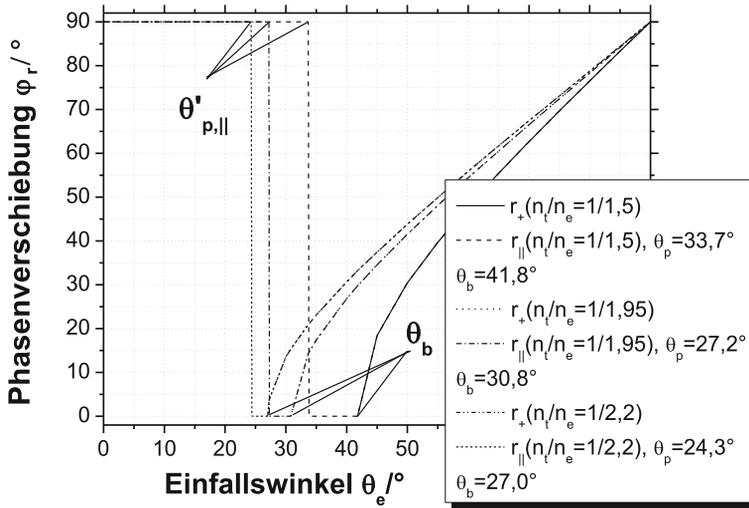
Betrachten wir uns nun den **Übergang aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium**  $n_e > n_t$ : Für  $r_{\perp}$ , vgl. auch Abb. 2.6, ist Gl. (2.22) reell und positiv, wenn  $\theta_e \leq \theta_b$  – d. h. für die Phasenverschiebung gilt  $\varphi_{r,\perp} = 0$ . Für  $\theta_e > \theta_b$  wird Gl. (2.22) komplexwertig, da der Term unter der Wurzel negativ wird. Der Betrag des Reflexionskoeffizienten ergibt sich für diesen Fall der **Totalreflexion** zu

$$|r_{\perp}| = \frac{n_e \cos \theta_e - n_t \cos \theta_t}{n_e \cos \theta_e + n_t \cos \theta_t} \xrightarrow{\theta_t = \pi/2} 1, \quad \theta_e \geq \theta_b. \quad (2.24)$$

Gleiches gilt für  $|r_{\parallel}|$ . Da der Betrag des Reflexionskoeffizienten konstant eins ist, muss eine weitere Erhöhung des Einfallswinkels  $\theta_e > \theta_b$  zu einer Phasenverschiebung  $\varphi_{r,\perp} \neq 0$  zwischen reflektiertem und einfallendem  $\vec{E}$ -Feldvektor führen. Für den **Brewster-Winkel**  $\theta_b$  gilt  $\theta_t = \pi/2$ . Dies ist exakt dann der Fall, wenn  $\cos \theta_t$  oder gleichermaßen der Term unter der Wurzel in Gl. (2.22) null werden, d. h.  $\sin \theta_b = n_t/n_e$ . Für  $\theta_e > \theta_b$  wird damit der Ausdruck unter der Wurzel kleiner null und die Wurzel imaginär. Der Phasenwinkel kann dann mit Gl. (2.22) bestimmt werden zu

$$\varphi_{r,\perp} = \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_e - n_t^2/n_e^2}}{\cos \theta_e}, \quad \theta_e > \theta_b. \quad (2.25)$$

Gleiches gilt für  $\varphi_{r,\parallel}$ .  $\varphi_{r,\parallel}$  vollzieht jedoch zudem beim Polarisationswinkel  $\theta_e = \theta_p'$  einen Phasensprung von  $\pi$  auf 0 – invers zum Fall  $n_e < n_t$ , vgl. Abb. 2.8.



**Abb. 2.8** Phasenwinkel für den Übergang aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium  $n_e > n_t$

### 2.1.2 Transmissions- $T$ , Absorptions- $A$ und Reflexionsgrade $R$

Die **Maxwell-Gleichungen** lassen sich mit der elektrischen Verschiebungsdichte  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  und der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{r}, t) &= \varepsilon' \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu' \mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t), \\ c &= 1/\sqrt{\varepsilon' \varepsilon_0 \mu' \mu_0},\end{aligned}\quad (2.26)$$

sowie den Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik in differentieller Form wie folgt formulieren

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \underbrace{\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\text{Induktion}} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \underbrace{\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\text{Verschiebungsstrom}} &= \vec{j}(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Hierbei sind  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  die vom Ort  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$  abhängende elektrische Feldstärke,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  die magnetische Feldstärke,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Medium,  $\varepsilon'$

die Dielektrizitätskonstante,  $\varepsilon_0$  die Influenzkonstante,  $\mu'$  die Permeabilität,  $\mu_0$  die Induktionskonstante,  $\rho(\vec{r}, t)$  die Raumladungsdichte und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  die Strom(flächen)dichte. Im Rahmen der hier betrachteten elektromagnetischen Felder (Elektrodynamik) waren mit der Zeit  $t$  als zusätzlichem Argument gegenüber den Feldgleichungen der Elektro- beziehungsweise Magnetostatik lediglich die beiden Zeitableitungen der magnetischen Flussdichte und der elektrischen Verschiebungsdichte – die Induktion und der Verschiebungsstrom – zu ergänzen. Die mathematische Notwendigkeit dieser Ergänzungen ergibt sich aus der **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.28)$$

die nur erfüllt ist, wenn Induktion und Verschiebungsstrom berücksichtigt werden – was sofort ersichtlich wird, wenn  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  aus Gl. (2.27) in Gl. (2.28) eingesetzt werden. Experimentell lässt sich die physikalische Notwendigkeit der Induktion und des Verschiebungsstroms in den Maxwellgleichungen der Elektrodynamik an Hand einer (bewegten) Leiterschleife im (variablen) Magnetfeld veranschaulichen.

Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass eine von der Zeit abhängige Änderung der Ladungsdichte in einem wohldefinierten Volumen einer gleich großen Änderung der Stromdichte aus diesem Volumen oder in dieses Volumen entspricht. Sie ist somit eine *Bilanzgleichung für Ladungen* in einem wohldefinierten Volumen.

Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen kann nun auch das **Poynting-Theorem** hergeleitet werden. Hierzu multipliziert man die Maxwellsche Gleichung (incl. Verschiebungsstrom)  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = j + \partial \vec{D} / \partial t$  mit der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  und die Maxwellsche Gleichung (incl. Induktion)  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  mit der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$ . Dann bildet man die Differenz der sich ergebenden Gleichungen und erhält unter Berücksichtigung von Gl. (2.26)

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{\vec{S}(\vec{r}, t)} &= j \cdot \vec{E} + \underbrace{\vec{E} \cdot \partial \vec{D} / \partial t + \vec{H} \cdot \partial \vec{B} / \partial t}_{w(\vec{r}, t)} \\ - \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H})}_{\vec{S}(\vec{r}, t)} &= j \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})}_{w(\vec{r}, t)} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}, t) + \vec{j} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Hierin sind  $w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)) = \varepsilon' \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) = \mu' \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r}, t)$ , die (Raum)energie-dichte des elektromagnetischen Feldes und  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$ ,  $|\vec{S}(\vec{r}, t)| = \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu' \mu_0}} \vec{E}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon' \varepsilon_0 \mu' \mu_0}} \varepsilon' \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) = c \cdot w(\vec{r}, t)$  der Poynting-Vektor, der ein Maß für die Energiestrom(flächen)dichte ist.

- **Bemerkung** Ähnlich der *Kontinuitätsgleichung* ist auch das *Poynting-Theorem* eine **Bilanzgleichung**, dies jedoch nicht für *Ladungen* sondern für *Energiedichten*. Die gesamte Energiedichte  $w(\vec{r}, t)$ , die ein elektromagnetisches Feld – wie Licht – besitzt, teilt sich auf in den Anteil den das Medium durch Anregung von Elektronen oder Erzeugung von Phononen aufnimmt  $\vec{j} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$  und den Anteil  $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t)$ , der das Medium passiert.

◇

Ganz allgemein ergibt sich die **Strahlungs(energie)flussdichte**  $I$  als Mittelwert der Energiestromdichte  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  zu

$$\begin{aligned} I &= \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \int_0^\lambda \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu' \mu_0}} \int_0^\lambda \vec{E}^2(\vec{r}, t) dr \quad (2.30) \\ &= \int_0^T \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) dr = \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu' \mu_0}} \int_0^T \vec{E}^2(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu' \mu_0}} \vec{E}_0^2 = \frac{1}{2} c \cdot w_0 \end{aligned}$$

Dies ist die Durchschnittsenergie, die pro Zeiteinheit eine Flächeneinheit senkrecht zu  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  durchquert. In isotropen Medien ist der Poynting-Vektor  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  parallel zum Wellenvektor  $\vec{k}(\vec{r}, t)$ , da beide senkrecht auf den elektrischen und magnetischen Feld-Vektoren stehen, vgl. Gln. (2.10) und (2.29).

Betrachten wir uns wieder eine Grenzfläche zwischen zwei Medien. Seien  $I_e$ ,  $I_r$  und  $I_t$  die Strahlungsflussdichten des einfallenden, reflektierten und transmittierten Strahls sowie  $\theta_e$ ,  $\theta_r$  und  $\theta_t$  die entsprechenden Winkel zur Oberflächennormalen unter denen diese Strahlenbündel ein- bzw. ausfallen, dann ergeben sich die effektiven Querschnittsflächen auf die diese drei Strahlenbündel einfallen aus dem Skalarprodukt des Einheitsvektors in Strahlrichtung und der Oberflächennormalen zu  $A \cos \theta_e$ ,  $A \cos \theta_r$  und  $A \cos \theta_t$ .

Teilen wir überdies die Strahlen wieder in ihre Komponenten senkrecht  $\perp$  und parallel  $\parallel$  zur Einfallsebene auf, dann erhalten wir beispielsweise für den auf eine Grenzfläche einfallenden Strahlungsfluss, d. h. die **Strahlungsleistung**  $P_{e,j}$  ([1, 2])

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= I_{i,j} A \cos \theta_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon_0}{\mu' \mu_0}} \vec{E}_{i,j,0}^2 A \cos \theta_i \\ &= \frac{1}{2} c_{ij} w_{i,j,0} A \cos \theta_i, \quad i \in \{e, r, t\}, \quad j \in \{\perp, \parallel\}. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun die senkrecht und parallel zur Einfallsebene stehenden Komponenten der Reflexionsgrade und Transmissionsgrade definieren. Der **Reflexionsgrad**  $R_{i,j}$  an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien ist der Quotient aus reflektierter und einfallender Strahlungsleistung, da mit  $\theta_r = \theta_e$  auch die Flächen  $A \cos \theta_i$ ,  $i \in \{e, r, t\}$ ,