Bernulf Kanitscheider

Natur und Zahl

Die Mathematisierbarkeit der Welt

SACHBUCH

Springer Spektrum

Natur und Zahl

Bernulf Kanitscheider

Natur und Zahl

Die Mathematisierbarkeit der Welt

Springer Spektrum

Bernulf Kanitscheider
Zentrum für Philosophie und Grundlagen
der Wissenschaft
Justus-Liebig-Universität
Rathenaustraße 8, Gießen 35394
Deutschland

ISBN 978-3-642-37707-5 ISBN 978-3-642-37708-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-37708-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Dr. Vera Spillner, Dr. Meike Barth
Redaktion: Alexander Reischert (Redaktion ALUAN)
Einbandabbildung: © Johan Swanepoel/Fotolia
Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-Spektrum.de

Vorwort

Auch dem flüchtigen Betrachter der Ergebnisse der heutigen Naturwissenschaft bleibt nicht verborgen, dass deren eindrucksvolle Erfolge zum wesentlichen Teil auf die Mathematisierung der entsprechenden Theorien zurückgehen. Von der Kosmologie bis zur Populationsgenetik finden wir eine Vielfalt von Errungenschaften der Erkenntnis, ausgedrückt durch theoretische Modelle und eine Logik, die die deduktiven Zusammenhänge der Aussagen verstehen lässt. Alles weist darauf hin, dass diese Formalisierungstendenz sich fortsetzen wird. Mit Kant kann man sogar den Reifegrad einer Wissenschaft durch das Ausmaß kennzeichnen, mit der sie von der formalen quantitativen Beschreibungsform Gebrauch macht. Was hat die Mathematik und die mit ihr verbundene Logik an sich, dass sie dermaßen zum Fortschritt des Wissens beitragen kann?

In der aktuellen analytischen Wissenschaftstheorie wird die Frage nach dem Grund für diese erfolgreiche Karriere der Mathematik recht stiefmütterlich behandelt, obwohl führende Physiker wie E. P. Wigner schon vor geraumer Zeit auf das Rätsel der fruchtbaren Anwendung formaler Strukturen auf die Welt der Materie hingewiesen haben. Auf der anderen Seite wurde in der Geschichte der Erkenntnistheorie, allerdings unter verschiedener Begrifflichkeit, die Erstaunlichkeit der Symbiose von Mathematik und Naturerkenntnis thematisiert, ohne dass es jedoch zu einer Konvergenz in den Begründungen kam. Unter pythagoreischem Einfluss bemüht Platon eine metaphysische Teilhabe an den mathematischen Ideen, um die Erklärungsleistung von Geometrie und Arithmetik in der sinnlichen Welt zu verstehen. Aristoteles betont den innerlich numerischen Charakter der Elemente der Erfahrungswelt, um den Passungscharakter abstrakter und konkreter Objekte begreiflich zu machen. In christlicher Zeit wird göttliches Wirken herangezogen, um zu verstehen, warum formale Gebilde in der materiellen Welt vorzufinden sind. Selbst Galilei und Descartes wissen sich in dieser Frage nicht anders zu helfen, als die transzendente Vorsehung zu bemühen, um den mathematischen Charakter der Natur zu erklären. Dies zeigt, dass die Thematik dieses Buches im Kernfeld der Erkenntnistheorie liegt. Sie ist für alle Leser von Bedeutung, die nicht nur routinemäßig täglich ihren Rechner hochfahren, sondern immer schon gestaunt haben, warum abstrakte Formen wie Programme die Erfahrungswelt organisieren können.

Der Aufbau des Buches ist im Ansatz historisch gegliedert, wobei aber die wissenschaftsgeschichtlichen Zusammenhänge immer unter systematische Absicht gestellt wurden. Die zeitliche Ordnung wurde auch immer wieder verlassen, wenn es die logische Zielsetzung erforderte. Der Aufwand an formaler Schreibweise wurde bewusst klein gehalten, um die begrifflichen Probleme in den Mittelpunkt zu stellen und um diese nicht durch einen aufwendigen technischen Apparat zu verdecken. Zwei Leser-gruppen mögen sich durch die vorliegenden Überlegungen angesprochen fühlen: einmal diejenigen, die an der Natur der mathematischen Objekte selber interessiert sind, zum anderen jene, denen der Erfolg der mathematisierten Naturwissenschaft schon immer ein Staunen abgenötigt hat. Wie sich überdies zeigen wird, sind diese beiden Probleme verschränkt, denn es hängt wesentlich von der Art der Gegenständlichkeit abstrakter Dinge ab, wie sich das Anwendungsproblem ansteuern lässt. Hinsichtlich der Lösung der Grundfrage nach dem Verhältnis von Natur und Zahl will der Autor dem Leser nur einen argumentativ gestützten Vorschlag machen, wohl wissend, dass in der Philosophie Sicherheiten und Endgültigkeiten noch weniger als in den Wissenschaften zu haben sind. Dennoch scheint mir, dass die Intuition des Aristoteles, die in der Neuzeit wieder von P.A.M. Dirac aufgegriffen wurde, am besten verstehen lässt, warum wir offenbar in einem durch und durch mathematischen Universum leben.

Bernulf Kanitscheider, im Juni 2013

Inhalt

Abkürzungsverzeichnis

AP	Anthropisches Prinzip
ART	Allgemeine Relativitätstheorie
CH	Kontinuumshypothese
CP	charge, parity = Ladung, Parität
CPT	charge, parity, time = Ladung, Parität, Zeit
ECQ	ex contradictione quodlibet
EG	Euklidische Geometrie
ETM	Erweiterte Turing-Maschine
FAPP	For All Practical Purposes
FAS	Formales Axiomensystem
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik
GF	Galois-Feld
KAM	Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorem
NBG	Axiomensystem, benannt nach von Neumann, Bernays und Gödel
NEG	Nicht euklidische Geometrie
PA	Arithmetik von Peano
PCE	Principle of Computational Equivalence
QCD	Quantenchromodynamik
QED	Quantenelektrodynamik
QFT	Quantenfeldtheorie
QM	Quantenmechanik
QT	Quantentheorie

RT	Relativitätstheorie
RZ	Raumzeit
SRT	Spezielle Relativitätstheorie
SST	Steady State Theory
TM	Turing-Maschine
TOE	Theory of Everything (dt. Einheitliche Theorie)
UTM	Universelle Turing-Maschine
ZA	Zellulärer Automat
ZF	Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem
ZFC	Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem + Auswahlaxiom (Choice)

1 Über die Notwendigkeit einer Philosophie der Mathematik

Zweifel an dem Sinn und Nutzen philosophischer Reflexionen über einzelwissenschaftliche Theorien gibt es in Hülle und Fülle. Niemand anderer als Steven Weinberg hat den Wert der Wissenschaftstheorie für den Fortschritt der Wissenschaft heftig infrage gestellt. Er belegt es mit vielen Beispielen, dass die empiristische Wissenschaftsphilosophie keine positive Heuristik bei der Theorienkonstruktion von einheitlichen Theorien geliefert habe.[1] Seine Intuition scheint eher in die Richtung zu gehen, wie es die Franzosen formulieren: „Allez en avant et la foi vous viendra." Die Skeptiker der Wissenschaftsphilosophie meinen somit, dass die Skrupel der Begriffsnörgler nur die Arbeit der kreativen Forscher hemmen; wenn man sie ungestört arbeiten lässt, werden sich die Erfolge schon einstellen. Die Erzeuger logischer Bedenken mit ihren methodologischen, epistemologischen und erst recht ontologischen Fragestellungen breiten danach nur ein Fangnetz von Bedenken aus, das die Eigendynamik der Theoriebildung behindert und den kreativen Wagemut in den Wissenschaften blockiert. Soll-

[1] S. Weinberg: *Der Traum von der Einheit des Universums*. München 1993, S. 173

B. Kanitscheider, *Natur und Zahl*,
DOI 10.1007/978-3-642-37708-2_1,

ten die Philosophen somit die Wissenschaftler schlichtweg in Ruhe lassen? Einigermaßen seltsam mutet dann aber die Tatsache an, dass aus der Mitte der Einzelwissenschaften die philosophischen Fragestellungen mit einer unabweisbaren Hartnäckigkeit immer wieder hervortreten, welche die Fachwissenschaftler anschließend veranlasst, mitten in ihren Untersuchungen begriffliche Reflexionen einzublenden. Ein hervorstechendes Beispiel ist die Quantenmechanik (QM). Als sie in den 20er-Jahren des vorigen Jahrhunderts entstand, wagten die Berufsphilosophen kaum Meinungen zu der neuen Theorie der Materie zu äußern. Die Heisenbergschen Streurelationen, das Superpositionsprinzip, die Systemverschränkungen, das Rätsel der doppelten Dynamik beim Messprozess hauchten zwar Befremden ein, legten aber erst einmal Distanz nahe. Anders die Physiker selber. Max Planck war sicher der Erste, der sich an philosophische Bekenntnisse, Deutungen und erkenntnistheoretische Positionen in Bezug auf die Quantenphysik wagte. Niels Bohr unternahm es, einen der Quantensituation angepassten begrifflichen Entwurf in seiner Komplementaritätsphilosophie zu versuchen, die viele Bereiche umfassen sollte und ihre Ausstrahlung bis in die Theologie zeitigte. Die nach Bohr umfassende Komplementaritätsidee wurde von den zeitgenössischen Wissenschaftsphilosophen mit mäßiger Begeisterung aufgenommen, weil sie zu unscharf und zu anpassungsfähig erschien. Nach und nach wagten sich aber dann auch philosophische Autoren auf das Glatteis der Interpretation der QM, nicht ohne gelegentlich auszurutschen, wie Karl Popper erfahren musste, der mit einem Gedankenexperiment die Heisenbergschen Streurelationen widerlegen wollte, aber von Carl Friedrich von

Weizsäcker auf seinen Fehler aufmerksam gemacht wurde. Johann von Neumanns Darstellung der mathematischen Grundlagen der QM legte den Standard fest, an dem die Philosophen prüfen konnten, ob sie es wagen sollten, in der Diskussion mitzumischen. Von Neumanns Analyse des Messprozesses war philosophisch sparsam, aber der verschiebbare „Schnitt“ zwischen Quantenobjekt, Messgerät und Beobachter enthielt philosophischen Sprengstoff. Fritz London und Edmond Bauer gingen anschließend in der Deutung des Schnittes entschieden weiter im philosophischen Engagement, indem sie die dualistische Leib-Seele-Konzeption Erich Bechers in die Reduktion des Zustandsvektors einbauten. Eugene Paul Wigner knüpfte hier an und überantwortete die Deutung der QM voll und ganz einem subjektiven Idealismus, der sich nur in der Terminologie von der aufklärerischen Position eines Bischof (George) Berkeley unterschied. Damit war die rote Linie überschritten und die Philosophen fühlen sich berechtigt, in die Diskussion einzugreifen. Epistemologischer und ontologischer Idealismus, das war ihr Feld, da konnten sie, selbst wenn ihnen die Geschichte mit dem Verschwinden der Phasenrelationen beim Kollaps der Wellenfunktion nicht so ganz geheuer war, mitreden. Nun verflochten sich die Gespräche beider Gruppen um die realistische oder subjektivistische Deutung der QM. Vollends legitimiert fühlten sich die Philosophen, ihren Beitrag zu leisten, als Hugh Everett III seine Vielweltendeutung der QM vorschlug; das klang nach Demokrit, Epikur und Giordano Bruno, da war man zu Hause.

Das Recht, in Sachen Begrifflichkeit der Physik mitzureden, resultierte also daraus, dass die Theoretiker selber die Diskussion in die Domäne der Philosophie hineingetragen hatten. Ohne äußeren Druck, rein aufgrund innerer systemischer Zwänge hatten die Physiker die erkenntnistheoretischen Grundfragen in ihren Theorien wiedergefunden und in leicht abgewandelter Terminologie weitergeführt. Die gesamte Palette philosophischer Positionen kam in den Deutungsdiskussionen über die QM wieder zum Vorschein und wurde wie vordem mit vergleichbarer Heftigkeit geführt. Auch Emotionen blieben nicht völlig außen vor, wenn man die Äußerungen von Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger über die jeweils andere Fassung der QM, die Matrizenmechanik und die Wellenmechanik, vergleicht oder Schrödingers Entrüstung über Bohrs „Quantenspringerei“ hört. Die Autoritäten der Philosophiegeschichte wurden nun wieder ernst genommen und argumentativ zur Stützung des eigenen Standpunktes ins Feld geführt. Aristoteles' Akt- und Potenzlehre war nun auf einmal wieder brauchbar für überlagerte Zustände quantenmechanischer Systeme, und Platon musste für die besondere Rolle von Symmetrien in den Theorien der Elementarteilchen herhalten. Jedenfalls waren das Objektivitätsproblem und die Realismusfrage, Kern jeder klassischen Erkenntnistheorie, mitten in der Physik angelangt und wurden mit hohem Ernst in den Fachdiskussionen abgehandelt.

Eine ähnliche Wendung vollzog sich im Rahmen der relativistischen Physik, aber ohne besondere Fokussierung auf das Realitätsproblem. Hatte Immanuel Kant noch dafür argumentiert, die Struktur des physikalischen Raumes notwendigerweise und vor aller Erfahrung als von euklidischer Struktur anzusehen, machte Carl Friedrich Gauß um 1800 den ersten Ansatz einer empirischen Bestimmung der metrischen Struktur des Raumes. Durch den Nachweis der widerspruchsfreien Existenz von Geometrien mit nicht euklidischen Maßbestimmungen entstand ein neues erkenntnistheoretisches Problem, bei dem die Philosophen anfänglich keine rühmliche Rolle spielten, weil sie sich lange Zeit auf den kantischen Standpunkt einer ausgezeichneten Stellung der euklidischen Geometrie versteiften. Dann aber kam es zu einer innerwissenschaftlichen Kontroverse um den apriorischen, empirischen oder konventionalistischen Standpunkt bezüglich der Geometrie des physikalischen Raumes. Albert Einstein und Henri Poincaré führten die Diskussion an, und aufgrund der Uneinigkeit dieser beiden Koryphäen fühlten sich analytische Philosophen wie Hans Reichenbach und später Adolf Grünbaum herausgefordert, etwas zur Klärung der Situation beizutragen. Aus der einzelwissenschaftlichen Uneinigkeit ergab sich die Aufforderung an die informierten Philosophen, sich in die Konventionalismusdebatte der Geometrie einzumischen.[2] Auch in den Relativitätstheorien, der speziellen, der allgemeinen und der kosmologischen, brachten erst die inneren Kontroversen die Philosophen dazu, sich in die begrifflichen Probleme einzubringen. Man kann also nicht von einer unangemessenen Aufdringlichkeit der Denker sprechen, ebenso wenig von Besserwisserei, zumal die metaphysische Epoche der Philosophie als erste Wissenschaft längst vergangen war.

Wenn man die Entwicklung der Philosophie der Mathematik in den Blick nimmt, zeigt sich eine nicht unähnliche Abfolge. In der philosophischen Tradition der griechisch-römischen Antike waren es klarerweise die beiden

[2] B. Kanitscheider: Geochronometrie und Geometrodynamik. *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie* IV,2 (1972), S. 261–302

Großmeister der Philosophie, Platon und Aristoteles, die den Ton in der Wissenschaftsphilosophie angaben. Und ihre Auffassungen von der Natur der Zahlen als autonome ideale Objekte oder immanente Strukturen der Realität haben bis in die Gegenwart überlebt. Vermehrt unter den Denkern der Renaissance fanden sich immer wieder Überlegungen zur Natur von Raum und Zahl und deren Verhältnis zur Materie. Bernardino Telesio argumentiert für die eigenständige Existenz des Raumes, der mehr ist als der Ort der Körper und der auch noch existiert, wenn man die Gegenstände aus ihm entfernt – eine Auffassung, die in die Zukunft weist. Sein Zeitgenosse Gerolamo Cardano, der durch seine Entdeckung der algorithmischen Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax = b$ bekannt wurde und der erste Überlegungen zum Imaginären anstellte, konnte die mathematische und philosophische Sicht noch verbinden. Mit der Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz wird die Sachverständigkeit der Philosophen in Sachen der Logik, Mathematik und Physik zusehends geringer. So lässt sich Kant gar nicht mehr auf eine Analyse des unendlich Kleinen ein, obwohl das Infinitesimale die sich unmittelbar aufdrängende mathematische Neuerung seiner Zeit war und die Grundgesetze der Physik damals schon Differenzialgleichungen waren. Kants Rückständigkeit in Bezug auf die Formalwissenschaften erkennt man auch daran, dass er sich in der Logik bei seiner Einteilung der analytischen und synthetischen Urteile ausschließlich auf Sätze der Form „S ist P“ einlässt. Als analytische Sätze bezeichnet er solche, bei denen das Prädikat im Subjektbegriff enthalten ist, und als synthetische Sätze jene, bei denen dies nicht der Fall ist. Da es ihm um eine Grundlegung der Arithmetik und der Geometrie ging sowie um die Frage, ob sie aus analytischen oder synthetischen Sätzen besteht, hätte ihm auffallen können, dass sich schlichte Theoreme der Arithmetik wie $\forall$ n, m: $(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$ gar nicht auf die einfache Form „Alle S sind P" bringen lassen, worauf später Gottlob Frege[3] hingewiesen hat. In der Folge mehrten sich die Aversionen der Einzelwissenschaftler gegen die Einmischung der schlecht informierten Philosophen und speziell die Analysen der idealistischen Vertreter einer spekulativen Physik forderten den Spott der Mathematiker wie Gauß heraus. „Sehen Sie sich doch nur bei den heutigen Philosophen um, Schelling, Hegel, Nees, von Esenbeck und Konsorten, stehen Ihnen nicht die Haare zu Berge bei ihren Definitionen? Diese Frage scheint mir wichtig zu sein, weil hier die Wurzel für die tiefe und unheilvolle Entfremdung zwischen Mathematik und Philosophie liegt."[4] Diese Entfremdung wuchs in dem Maße, in dem die Mathematik abstrakter, unanschaulicher und schwerer fasslich wurde, insbesondere als Georg Cantor die Tiefendimension des Unendlichen aufzeigte – ein Bereich, bei dem sich die Metaphysiker plötzlich vor die Tür gesetzt fühlten. Einmal war es der rationalistische Einbruch in die geheimnisvolle Welt des Grenzenlosen, zum anderen die blasphemische Nähe zu den Etiketten des Numinosen, die die traditionellen Philosophen fürchteten. Im Gegenzug wurde eine ganze Riege an philosophischen

[3] G. Frege: *Grundlagen der Arithmetik*, § 88

[4] C. F. Gauß: Brief an Schumacher vom 1.11.1844 (Gauß' Werke. Hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1863–1933, Bd. IV, S. 337)

Kronzeugen aufgeboten, die bestätigen sollten, dass ein *infinitum in actu* begrifflich nicht möglich sei, geschweige denn real existieren könne. Waren es zuerst metaphysische Bedenken, dass man mit dem aktual Unendlichen dem höchsten Wesen zu nahe treten würde, so formierten sich später die empiristischen Vorurteile, die bei Ludwig Wittgenstein kulminierten, der sich gegen eine transfinite Mengenlehre wandte, weil sie jede mögliche Erfahrung überschreiten würde. Das Hinauszählen über das Unendliche, indem man einfach nach $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ weitermacht, also $\omega + 1$, $\omega + 2$, … erschien den Erfahrungsdogmatikern als begriffliches Blendwerk ohne Sinn und Bedeutung. So war also auch im Verhältnis von Mathematik und Philosophie eine denkbar große Spannung vorhanden. Während die Gilde der Berufsmathematiker selbst, allen voran David Hilbert, Cantors „Paradies" nicht mehr missen wollte und etwa das Kontinuumproblem an die erste Stelle der ungelösten mathematischen Fragen stellte, blieben die Philosophen des Logischen Empirismus skeptisch,[5] während sich die kritischen Rationalisten toleranter zeigten hinsichtlich des Unendlichen.[6] Erst die jüngere Generation von Mathematikphilosophen, wie etwa Akihiro Kanamori, Solomon Feferman, Stewart Shapiro und Penelope Maddy, begann

[5] Charakteristisch für die Haltung der Empiristen war das Werk *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* von Felix Kaufmann (Wien 1930), in dem der Autor nichts weniger als den vollständigen Verzicht auf das Unendliche in der Mathematik propagierte und nur endliche wohlgeordnete Mengen zulassen wollte.

[6] Im Zusammenhang mit der Existenzweise von vergangenen Zeitpunkten in kosmologischen Modellen hat Karl Popper darauf hingewiesen, dass man diese nicht nur als unendliche Folgen, sondern auch als unendliche Mengen auffassen kann (K. R. Popper: On the Possibility of an Infinite Past. *British Journal of the Philosophy of Science 29* (1978), S. 47–48).

nach begrifflichen Rahmenkonzeptionen zu suchen, um die Mengenlehre als Fundamentaltheorie aller Mathematik zu begreifen. Unter diesen analytischen Denkern hat sich dann das traditionelle Kompetenzgerangel zwischen Fachwissenschaft und Metatheorie aufgelöst.

Außerhalb des Hauptstromes, aber noch innerhalb der mathematischen Zunft hatte sich als konkurrierende Reaktion auf die Krise der Mengenlehre eine philosophische Bewegung in Gang gesetzt, die bis heute ihre Ausläufer besitzt: der mathematische Intuitionismus. Von Luitzen E. J. Brouwer ausgehend etablierte sich eine Schule, die für eine rigorose Beschränkung der Beweismittel eintrat, wenn es sich um Aussagen über das Unendliche handelte. Insbesondere war es das Auswahlaxiom der Mengenlehre, mit dessen Hilfe Ernst Zermelo 1904 den Wohlordnungssatz bewiesen hatte, der die allgemeinen Vergleichbarkeiten von Mengen konstituiert und durch seinen nichtkonstruktiven Charakter das Missfallen der Intuitionisten erregte.[7] Brouwer war der Wissenschaftsphilosophie nicht besonders wohlgesonnen und hielt ihren Nutzen für begrenzt. Dessen ungeachtet begann er ab 1907 selber einen metatheoretischen Diskurs, der zu einschneidenden Vorschlägen in den Beweisverfahren führte und dazu angetan war, wesentliche Teile der klassischen Mathematik zu eliminieren. Hätte die Mathematikergemeinde die Empfehlungen angenommen, wäre es zu einem beträchtlichen Kahlschlag unter

[7] Mengen, die ungeordnet oder nur geordnet, aber nicht wohlgeordnet sind, lassen sich nicht einfach in Bezug auf ihre Größe vergleichen. Wenn man also neue Zahlen einführen will, muss sich eine Rangordnung zwischen ihnen etablieren. Nur bei wohlgeordneten Mengen kann deren Kardinalzahl stets verglichen werden. (Vgl. Adolf Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin 1928, S. 195)

den Theorien gekommen. Die Vertreter der klassischen Richtung, allen voran David Hilbert, waren jedoch nicht gewillt, diese Verstümmelung der Mathematik zuzulassen, und reagierten mit einer neuen, strengeren Fundierung, die eine Bewahrung des Theorienbestandes erlaubte. Damit war nun inmitten der strengsten Wissenschaft unter den Fachleuten selbst ein Methodenstreit ausgebrochen, der tief in philosophische Bereiche hineinführte. Brouwers philosophische Basis war ein expliziter erkenntnistheoretischer Idealismus, der in manchen Formulierungen solipsistische Anklänge besaß. Seine Skepsis gegenüber der etablierten Philosophie harmonierte schlecht mit seiner deutlich an Kant angelehnten Urintuition der Zeit, die – als Voraussetzung der Zweiheit – die Basis für den Begriff der Zahl liefern sollte. Auch Brouwers Gegenspieler Hilbert musste in seiner alternativen, metamathematischen Grundlegung des sog. Formalismus zu begrifflichen Annahmen Zuflucht nehmen. Danach ist mathematisches Denken ein schematisches Operieren mit sinnfreien Zeichen, eine Vorgabe, die wiederum in der Mathematikergemeinde auf Widerstand stieß, weil man auf diese Weise die Anwendungen in den empirischen Wissenschaften nicht mehr verstehen konnte.[8] Auch hier begegnen wir innermathematischen philosophischen Gegensätzlichkeiten, die nicht von fachfremden, sachunkundigen Interpreten induziert worden sind.

In ähnlicher Weise verhielt es sich mit der erkenntnistheoretischen Konsequenz der gödelschen Unvollständigkeitstheoreme für das hilbertsche Non-Ignorabimus-Programm. Die Fachphilosophen hielten sich mit Einschätzun-

[8] A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin 1928, S. 383

gen der Gödeltheoreme anfangs zurück. Auch hier entstand aus inneren systematischen Zusammenhängen eine zweifellos philosophische Problematik, denn was sollte zu diesem Bereich gehören, wenn nicht die Frage nach der Reichweite der Vernunft? Im Übrigen hat Kurt Gödel zu so vielen philosophischen Fragen seines Fachgebietes Stellung bezogen, dass er nachdrücklich als Mathematiker-Philosoph geführt werden kann. Auch zur Existenzweise abstrakter Objekte, ebenso zur Wahrheitsfrage der Kontinuum-Hypothese hat sich Gödel geäußert, letztlich Probleme, die tief in den philosophischen Bereich hineinragen. Bemerkenswert an diesen Beispielen erscheint der innere Sachzwang, der die Mathematiker zu diesen Reflexionen getrieben hat. Philosophie der Mathematik ergab sich nicht als eine luxuriöse Überhöhung des Faches mit rein ornamentaler Funktion, sondern die konzeptionelle Klärung des unendlich Großen und unendlich Kleinen sowie der zulässigen Beweismittel in diesem Bereich war von konstitutiver fachwissenschaftlicher Bedeutung, die den Fortgang der Untersuchungen im Kern betraf.

Ein Großteil der Philosophie der Mathematik ist somit von den Fachwissenschaftlern selbst in Gang gebracht worden, wie die Abhandlungen von Gottlob Frege in *Grundlagen der Arithmetik* und Richard Dedekinds Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* als bedeutendste Beispiele belegen. Die analytisch orientierten Philosophen haben dann die Untersuchungen weiter getrieben und die Begrifflichkeiten verfeinert. Somit stimmt Einsteins Diagnose auch für die Mathematik: „Die gegenseitige Beziehung von Erkenntnistheorie und Wissenschaft ist von merkwürdiger Art. Sie sind aufeinander angewiesen. Erkenntnistheorie ohne Kontakt mit der Wissenschaft wird zum leeren Schema. Wissenschaft ohne Erkenntnistheorie ist – soweit überhaupt denkbar – primitiv und verworren."[9] Nun könnte jemand diese Verschränkung der Mathematik mit ihrer Philosophie für den Ausdruck eines vorläufigen und unreifen Stadiums der Entwicklung halten, das nach der Überwindung kritischer Phasen wieder in den Hauptstrom fruchtbarer Forschung übergeht, bei dem die Methodenfragen eine untergeordnete Rolle spielen. Immerhin gilt die Krise der Mathematik, wie sie durch die Entdeckung der Antinomien der Mengenlehre ausgelöst wurde, durch die Axiomatisierung weitgehend als überwunden. Allein: Ein Blick auf die Analytische Philosophie der Mathematik[10] lehrt etwas anderes. Obwohl auf der Fachebene laufend Erfolge erzielt wurden, so etwa der Vierfarbensatz, die Mordellsche Vermutung oder der Große Satz von Fermat bewiesen werden konnten, zeigt sich auf der philosophischen Ebene das gesamte Spektrum von Deutungen zur Natur der mathematischen Objekte lebendig, das seit Jahrhunderten die Szene beherrscht. Auch wenn manche Strömungen an Einfluss verloren haben – so etwa der radikale Intuitionismus –, stoßen auf der Metaebene die Platoniker, Aristoteliker, Empiristen und Fiktionalisten aufeinander, ohne dass man eine Konvergenz in den Auffassungen erkennen könnte.

Auch bei der Frage, die uns im Folgenden primär interessieren wird, nämlich die nach dem Grund für die erfolgreiche Anwendung der formalen Systeme in der theoretischen

---

[9] A. Einstein: *Bemerkungen zu den in diesem Band vereinigten Arbeiten*, in: P. A. Schilpp (Hrsg.): *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*. Stuttgart 1955, S. 507

[10] A. D. Irvine (Hrsg.): *Philosophy of Mathematics*. Amsterdam 2009

Physik und in den anderen empirischen Wissenschaften, sieht man kein Zusammenlaufen aller noch so scharfsinnigen Analysen.[11] Es gibt somit keine etablierte Standard-Philosophie der Mathematik, an die sich ein interessierter Laie halten könnte. Jeder muss die Argumente der verschiedenen Positionen an sich vorüberziehen lassen, um zu einem eigenen Urteil zu kommen. Auch in der vorliegenden Untersuchung werden wir den Weg wählen, Argumente, Indizien und theoretische Stützungen zu sammeln, um jene Position zu untermauern, die nach unserer Auffassung geeignet ist, das Verhältnis von Natur und Zahl am besten zu klären. Während die Begründung einer einvernehmlichen Philosophie der Mathematik heute kaum in Sicht ist, lässt sich dennoch von einer Verteidigung eines Standpunktes sprechen, der geeignet ist, zentrale Forderungen der Erkenntnistheorie zu erfüllen.

[11] Während sich die angelsächsische Analytische Philosophie eingehend dem Anwendungsproblem gewidmet hat, wird dieses in der deutschsprachigen Literatur stiefmütterlich behandelt. Die beste Übersicht bietet G. Vollmer: *Wieso können wir die Welt erkennen?* Stuttgart 2003, S. 120 ff.

2 Das Problem und seine Ursprünge

Wie Aristoteles uns berichtet, hielten die Pythagoreer die mathematischen Prinzipien für das Grundlegende der Natur: „Da nämlich (…) die Zahlen der Natur nach das Erste sind und sie in den Zahlen viel Ähnlichkeiten zu sehen glaubten mit dem, was ist und entsteht (…), indem sie ferner die Bestimmungen und Verhältnisse der Harmonie in Zahlen fanden und ihnen somit sich alles andere seiner Natur nach als den Zahlen nachgebildet, die Zahlen aber als das Erste in der gesamten Natur zeigten, so nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seien Elemente der Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.“[1] Aus dem, was Aristoteles erzählt, bleibt kein Zweifel, dass die Pythagoreer ihre These in einem starken ontologischen Sinn gemeint hatten: „Offenbar nun sehen auch sie die Zahl als Prinzip an, sowohl als Stoff für das Seiende als auch als Bestimmtheiten und Zustände.“[2] Damit wurde zum ersten Mal das Konzept einer realistischen Verwendung formaler Gebilde in die Welt gesetzt, eine Idee, die bis in die Gegenwart

[1] Aristoteles: *Metaphysik,* A 5.
[2] Aristoteles, ibid.

B. Kanitscheider, *Natur und Zahl,*
DOI 10.1007/978-3-642-37708-2_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

nichts von ihrer Faszination verloren hat, aber auch auf heftigen Widerspruch unter den Wissenschaftsphilosophen gestoßen ist. Um diesen Gedanken richtig einordnen zu können, muss man den pythagoreischen Ansatz im Kontext der jonischen Naturphilosophie sehen.

3
Urstoffe

Der Leitbegriff der vorsokratischen Wissenschaft war die ἀρχή (*arché*), die Urmaterie und das Prinzip aller Dinge. Viele Vorschläge für den Grundstoff und die fundamentale Gesetzlichkeit der Natur wurden damals auf dem Markt der Ideen gehandelt: Wasser, Feuer, Luft. Eine kritische Diskussion hatte sich unter den ersten Naturphilosophen darüber entsponnen, welche dieser Substanzen allem Seienden zugrunde liegt. Eine von diesen ἀρχαι war auch die Zahl, obwohl deren Natur auf den ersten Blick so verschieden von aller Stofflichkeit ist, dass man sich fragen muss, wie man hier eine verbindende Assoziation zustande bringen kann. Das Bemerkenswerte an diesen frühen Entwürfen der altionischen Naturphilosophie ist, dass diese Denker eine monistische Ansicht vertreten, wonach der Urstoff bereits das Bewegungs- und Entwicklungsmoment enthält, sodass kein ordnendes, der Materie fremdes Prinzip für die Organisation der Natur eingeplant werden muss. Auch der Zahl kommt eine solche einheitsstiftende Qualität zu. Wenn Zahlen und ihre Relationen das fundamentale Bindeglied aller Dinge sind, muss die Natur hochgeordnet sein. Die Milesier Thales, Anaximander und Anaximenes hatten alle ein Nahverhältnis zur Mathematik. Thales erstaunte

B. Kanitscheider, *Natur und Zahl,*
DOI 10.1007/978-3-642-37708-2_3,

nicht nur die Zeitgenossen durch seine korrekte Vorhersage der Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585, die er nach babylonischen Tafeln errechnet hatte, sondern entdeckte auch neue geometrische Sätze. Nach ihm ist der Lehrsatz benannt, wonach ein Dreieck, das über dem Durchmesser eines Halbkreises errichtet ist und dessen Spitze den Kreis berührt, rechtwinkelig ist. Auch Sätze über die Kongruenz von Dreiecken gehen wohl auf ihn zurück. Eine Intuition drängt sich auf: Wenn man erfahren hat, dass Geometrie in der Natur, etwa in der Landvermessung, gut brauchbar ist, dann könnte es sein – philosophisch weitergedacht –, dass der Geometrie und auch der Arithmetik mehr zukommt als nur die Rolle eines praktischen Hilfsmittels.

4
Ohne Grenzen

Es war Anaximandros, der in dieser Hinsicht einen wesentlichen neuen Schritt tat, indem er einen für die Mathematik konstitutiven Begriff als Wesen der Natur vorschlug. Als ἀρχή setzt er eine Größe an, das ἄπειρον, welches ein qualitativ unbestimmtes, aber stofflich unendliches und zeitlich ewiges Agens darstellt, das die niemals endende Bewegung des Kosmos garantiert. Das ἄπειρον ist umso erstaunlicher, als die Griechen ein eher zurückhaltendes Verhältnis zu allem hatten, das keine Grenze (πέρας) besitzt, was sich dann später in Aristoteles' Ablehnung des aktual Unendlichen zeigte. Die Motivation für das Unendliche war vermutlich, dass dieses eine unbeschränkte Quelle des Werdens bilden sollte, denn für ihn wie für fast alle Griechen der Antike war der Kosmos ein zeitlich unbegrenztes Seiendes, das zwar viele Perioden des Wandels durchläuft, jedoch weder einen abrupten Anfang noch ein sprunghaftes Ende erfährt. Es gab keine theologische Motivation, der Welt einen Anfang zuzuschreiben, denn die Götter waren ein Teil des Universums und nicht dessen Urheber.[1] Das Unendliche hat sich bei Anaximander auch in seiner Lehre niederge-

[1] Heraklit, *Fragment* 30, W. Capelle, *Die Vorsokratiker*, Stuttgart 1953, S. 142.

B. Kanitscheider, *Natur und Zahl*,
DOI 10.1007/978-3-642-37708-2_4,