Klassische Texte der Wissenschaft

Bernhard Riemann

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

historisch und mathematisch kommentiert von Jürgen Jost

Springer Spektrum

Klassische Texte der Wissenschaft

Herausgeber
Prof. Dr. Dr. Olaf Breidbach
Prof. Dr. Jürgen Jost

Die Reihe bietet zentrale Publikationen der Wissenschaftsentwicklung der Mathematik und Naturwissenschaften in sorgfältig editierten, detailliert kommentierten und kompetent interpretierten Neuausgaben. In informativer und leicht lesbarer Form erschließen die von renommierten WissenschaftlerInnen stammenden Kommentare den historischen und wissenschaftlichen Hintergrund der Werke und schaffen so eine verlässliche Grundlage für Seminare an Universitäten und Schulen wie auch zu einer ersten Orientierung für am Thema Interessierte.

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“

historisch und mathematisch kommentiert von Jürgen Jost

Springer Spektrum

Bernhard Riemann (1826–1866)

ISBN 978-3-642-35120-4 ISBN 978-3-642-35121-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-35121-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2012): 51-03, 5303, 53B20, 53Z05, 00A30, 01A55, 83-03

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

So könnte der Plot eines Romans aussehen: Ein schüchterner, kränklicher, in ärmlichen Verhältnissen lebender junger Mathematiker, dem es nicht gelingt, in näheren Kontakt zu der großen mathematischen Koryphäe seiner Zeit zu treten, muss für sein Habilitationskolloquium drei Themen zur Auswahl angeben. Die ersten beiden knüpfen an seine bedeutenden Fachbeiträge an, die er schon geleistet hat. Aus Verlegenheit, und weil er davon ausgeht, dass, wie üblich, sowieso das erste Thema gewählt wird, nennt er als drittes schließlich ein eher vages naturphilosophisches Thema. Zu seiner Überraschung wird gerade dieses gewählt. Statt sich nun aber mit dem Wissensstand der Fachdisziplin vertraut zu machen und die wirklich bedeutende Vorentdeckung, die das gesamte Gebiet erschüttert hat, zu rezipieren, vertieft er sich lieber in einen obskuren Philosophen. Sein Vortrag aber dringt dann so tief wie noch niemals zuvor in ein Gebiet ein, das die größten Denker der Menschheit seit der Antike beschäftigt hat, und ahnt sogar noch die größte Entdeckung der Physik des nachfolgenden Jahrhunderts voraus. Selbst der Beitrag des Großstars der deutschen Wissenschaft, der sich von einem anderen Gesichtspunkt und unabhängig dem gleichen Thema genähert hatte, verblasst vor der Tiefe der Einsicht unseres jungen Mathematikers. Andere, ansonsten in der Wissenschaft bedeutende Männer treten unrühmlich mit grotesken Fehlurteilen über den angeschnittenen Sachverhalt hervor, nachdem der Vortrag erst posthum nach dem frühen Tode unseres Protagonisten von einem Freund veröffentlicht worden ist. Generationen nachfolgender Mathematiker arbeiten die in dem kurzen Vortrag skizzierten Ideen aus und bestätigen deren vollständige Gültigkeit und Tragfähigkeit und außerordentliche Reichweite.

Dies ist aber kein Roman, denn so ähnlich hat es sich tatsächlich zugetragen. Geneigte Leserinnen und Leser werden mir hoffentlich gewisse Übertreibungen nachsehen, und selbstverständlich wird in den nachfolgenden Ausführungen alles richtiggestellt werden. Der junge Mathematiker war Bernhard Riemann, und der Vortrag hieß „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Die mathematische Koryphäe war Carl Friedrich Gauß, der Wissenschaftsstar Hermann von Helmholtz, die mathematische Entdeckung diejenige der nichteuklidischen Geometrie, der Philosoph der heute vergessene Johann Friedrich Herbart, die physikalische Entdeckung die allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins. Zu den Leuten, die zu unrühmlichen Fehlurteilen gelangten, gehörten

u. a. der Psychologe Wilhelm Wundt und der Philosoph Bertrand Russell. Der Freund, der sich um die Veröffentlichung kümmerte, war der Mathematiker Richard Dedekind. Zu den Generationen nachfolgender Mathematiker, für deren Forschung die Ideen Riemanns eine wesentliche Inspiration waren, gehört auch der Herausgeber.

Wissenschaftler lesen einen wissenschaftlichen Text üblicherweise vom jetzigen Stand der Wissenschaft her, interpretieren ihn im Hinblick auf nachfolgende Entwicklungen, suchen allenfalls noch nach unausgelotetem Potential für aktuelle wissenschaftliche Probleme. Historiker dagegen sind gehalten, die Position eines Textes innerhalb des Diskurses seiner Zeit zu bestimmen oder seine Entstehung zu rekonstruieren und seine Rezeptionsgeschichte zu analysieren. Auch wenn in der gegenwärtigen Diskussion über die Rolle der Geisteswissenschaften die Bedeutung der geschichtlichen Wissenschaften für das Verständnis der Gegenwart in den Vordergrund gestellt wird, suchen Mathematiker nach dem zeitlosen Gehalt und nicht nach den geschichtlichen Bedingtheiten wissenschaftlicher Texte. Für den Wissenschaftler sind Irrwege uninteressant oder ärgerliche Hindernisse auf einem Wege, der geradliniger hätte verlaufen sollen, für den Historiker können sie wichtige Einsichten in ideengeschichtliche Abläufe und die Dynamik von Diskursen liefern. Für den Wissenschaftler sind daher Texte, deren Wirkung verblasst ist, ohne Interesse. Für den Historiker ist dieser Interesseverlust Teil der Rezeptionsgeschichte.

Dies ist der Spannungsrahmen, in der sich diese Edition von Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ bewegt. Der Herausgeber ist Fachwissenschaftler, kein Wissenschaftshistoriker. Daher wird die Geschichte auch hier manchmal rückwärts gelesen. Insbesondere sind bei dieser Edition eingehendere philologische Studien unterblieben.

Gemäß dem Charakter der Reihe konnte auch keine eigentlich mathematische Darlegung der wesentlichen Sachverhalte vorgenommen werden, weil dies einen aufwändigeren Formalismus benötigt hätte. (Allerdings wird der mathematische Stellenkommentar von Hermann Weyl in der Fassung von 1923 im Anschluss an Riemanns Text wiedergegeben.) Ich habe stattdessen versucht, die grundlegenden Konzepte und tragenden Gedanken in Worten zu erklären, auch wenn dadurch die Darstellung unvermeidlich an Präzision eingebüßt hat.

Wie schon erwähnt, bin ich kein Mathematikhistoriker. Umso mehr bin ich daher einigen fachkundigen Mathematikhistorikern, und zwar Erhard Scholz und Rüdiger Thiele, für ihre sehr hilfreichen Kommentare, Korrekturvorschläge und Literaturhinweise dankbar, wobei selbstverständlich die Verantwortung für alle Unzulänglichkeiten der nachfolgenden Ausführungen alleine bei mir liegt. Dem Helmholtzexperten Jochen Brüning bin ich ebenfalls für seine einsichtsvollen Kommentare verpflichtet. Für einige Korrekturen kurz vor Drucklegung bin ich Klaus Volkert dankbar.

Ich danke Ingo Brüggemann, dem Bibliothekar des Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, und seinen Mitarbeiterinnen für wertvolle und effiziente Hilfe bei der Literaturbeschaffung.

Ganz besonders danke ich natürlich meinem Freunde Olaf Breidbach für seine Initiative zur Begründung der wissenschaftsgeschichtlichen Reihe, in welcher diese kommentierte Ausgabe von Riemanns grundlegender Schrift nun erscheinen kann.

Leipzig, im August 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine mathematische Arbeit ohne Formeln, eine geometrische Abhandlung ohne Abbildungen oder Illustrationen, ein eher zufällig zustande gekommenes Vortragsmanuskript von nur 16 Seiten, und doch eine Schrift, die die Mathematik ähnlich geprägt hat wie nur wenige andere, sämtlich deutlich längere und wesentlich detaillierter durchgearbeitete Werke. Zu nennen wären hier beispielsweise die „Methodus inveniendi …" von Leonhard Euler, die die Variationsrechnung begründete, Carl Friedrich Gauß' „Disquisitiones arithmeticae", die die Mathematik endgültig als eigenständige Fachdisziplin etablierte,[1] Georg Cantors Mengenlehre, die die moderne Auffassung des Unendlichen in der Mathematik einführte, die Theorie der Transformationsgruppen von Sophus Lie, also die systematische Untersuchung von Symmetrien, die eine wichtige mathematische Grundlage für die Quantenmechanik bildet, die programmatischen Schriften von David Hilbert zur axiomatischen Begründung verschiedener mathematischer Teildisziplinen oder in neuerer Zeit das Werk von Alexander Grothendieck zur systematischen Vereinigung von algebraischer Geometrie und Arithmetik. Die Rede ist hier von Bernhard Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", und diese kurze Schrift, 1854 verfasst, aber erst 1868 nach Riemanns Tod veröffentlicht, geht sogar in der Breite ihrer Wirkung über die genannten Werke hinaus, insofern als sie sich im Schnittpunkt von Mathematik, Physik und Philosophie bewegt, also nicht nur eine zentrale mathematische Disziplin begründet, sondern gleichzeitig den Weg für die Physik des 20. Jahrhunderts bereitet und eine zeitlos gültige Widerlegung bestimmter philosophischer Raumvorstellungen liefert.

Im vorliegenden Band wird dieser Schlüsseltext der Mathematik herausgegeben, in der kontroversen Diskussion seiner Zeit verortet und in seiner Wirkung auf die Entwicklung der Mathematik skizziert und mit derjenigen seiner Kontrahenten verglichen. Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" hat auf eine ganz andere Weise als beispielsweise Euklids Elemente, die Schriften von Leibniz und Newton zur

[1] in dem Sinne, dass sie sich selbst ihre Probleme völlig autonom stellt, statt diese beispielsweise aus der Physik zu beziehen

B. Riemann, *Bernhard Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*, Klassische Texte der Wissenschaft, DOI 10.1007/978-3-642-35121-1_1,

Begründung der Infinitesimalrechnung oder die vorstehend genannten Werke, aber nicht weniger fundamental als diese, die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft geprägt. Darüberhinaus ist diese Schrift grundlegend für die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins geworden und liefert neuerdings das mathematische Gerüst für die Quantenfeldtheorie und ihre Weiterentwicklungen in der theoretischen Elementarteilchenphysik (Superstringtheorie, Quantengravitation u. ä.).

Die Wirkungsgeschichte ist jedoch nicht geradlinig. Riemanns Programmschrift „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" rief den seinerzeit führenden deutschen Physiker, Hermann Helmholtz (später geadelt, also von Helmholtz), auf den Plan, dessen Gegenschrift „Über die Thatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen" in ihrer Überschrift den gegensätzlichen Standpunkt und Ansatz pointierte (wenn auch im Text die Gemeinsamkeiten mit Riemann eher in den Vordergrund gestellt werden,[2] und sich die Schrift eigentlich nicht gegen Riemann, sondern gegen die von den Kantianern vertretenen Raumvorstellungen richtet).[3] Es wäre allerdings falsch, hierin nur den letztendlich von der Entwicklung der Wissenschaft überholten Widerspruch der etablierten Autorität gegen das junge Genie, des Vertreters der Vergangenheit gegen den Protagonisten der wissenschaftlichen Zukunft zu sehen. Riemann war von wohl eher etwas vagen naturphilosophischen Spekulationen motiviert – und sein Werk hat dann umgekehrt wesentliche Implikationen für die Naturphilosophie gehabt –, während Helmholtz erstens seinen Ansatzpunkt in der Sinnesphysiologie hatte – und seine Überlegungen bleiben hier von Relevanz – und zweitens einen Einfluss auf eine ebenfalls sehr wichtige mathematische Richtung, nämlich die Theorie der Symmetriegruppen von Sophus Lie, ausübte. Auch wenn Lie die mathematischen Aspekte der Schrift von Helmholtz einer scharfen Kritik unterzog, so griff er doch dessen konzeptionellen Ansatz auf. Die Liesche Theorie der Symmetriegruppen ist eine der wesentlichen Grundlagen der Quantenmechanik geworden, und die Konzepte der Symmetrie und Invarianz verbinden die physikalische Intuition der modernen Physik mit dem mathematischen Rahmen der Geometrie im Sinne Riemanns und Einsteins. In diesem Sinne hat auch Helmholtz' Schrift, wenn auch im Unterschied zu Riemann nicht direkt, sondern erst über Lie vermittelt und wohl auch

[2] Helmholtz legt dar, dass er die wesentlichen Teile seiner Überlegung schon vor Kenntnis der (mit vierzehnjähriger Verspätung veröffentlichten) Schrift Riemanns angestellt habe, allerdings sicherlich später als Riemann, der seine Schrift 1854 verfasst hatte.

[3] Es erschiene naheliegend, diese Arbeit hier der Riemannschen Schrift gegenüberzustellen. Der Herausgeber hat nach reiflicher Überlegung davon abgesehen, weil diese Arbeit von Helmholtz nicht die Tiefe und Eleganz derjenigen von Riemann erreicht und auch unter den verschiedenen Schriften von Helmholtz zur Erkenntnistheorie sicherlich nicht die beste und klarste darstellt und man also durch die Auswahl gerade dieser Arbeit dem bedeutenden Physiologen und Physiker unrecht getan hätte. Wenn man also überhaupt die Helmholtzsche Theorie durch eine seiner Schriften an dieser Stelle hätte repräsentieren wollen, so hätte man eine andere seiner Schriften auswählen müssen, und zwar „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" oder die Bonner Rektoratsrede „Die Tatsachen in der Wahrnehmung", aber dann wäre der enge Bezug zu Riemanns Habilitationsschrift nicht mehr gegeben gewesen.

deutlich anders, als Helmholtz selber sich dies vorgestellt hat, etwas Zukunftsweisendes für die moderne Physik.

Bemerkenswert ist, dass Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" als einer der Schlüsseltexte der Mathematik praktisch ganz ohne mathematische Formeln auskommt (im ganzen Text findet sich nur eine einzige Formel, die zudem nur von marginaler Bedeutung ist). Diese Ausnahmestellung des Riemannschen Textes wird besonders deutlich beispielsweise im Vergleich mit der ausgefeilten und tief durchdachten Symbolik eines Leibniz oder der Formalisierung des Unendlichen bei Cantor. Auch von seinem wichtigen Vorläufer, Gauß' „Disquisitiones generales circa superficies curvas", die die moderne Differentialgeometrie begründeten, die Vorstufe der Riemannschen Geometrie, unterscheidet sich Riemanns Text in dieser Hinsicht. Zumindest in diesem Falle kann also die Geschichte der Mathematik nicht einfach als eine der fortschreitenden Formalisierung gelesen werden, sondern es zeigt sich, dass sich mathematische Abstraktion durchaus auch über Formeln erheben kann.[4]

Bernhard Riemann hat wie sonst allenfalls nur noch Carl Friedrich Gauß die Mathematik geprägt. Er hat nicht nur mit seiner hier herausgegebenen Schrift die moderne Geometrie begründet, die daher Riemannschen Geometrie heißt, sondern er hat eine ganze Reihe grundlegender Theorien und Konzepte eingeführt und viele andere Gebiete der Mathematik nachhaltig beeinflusst. Sein Konzept der Riemannschen Fläche fasste in genialer Weise die komplexe Analysis und die Theorie der elliptischen Integrale zusammen und war gleichzeitig der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Topologie, also der gerade von metrischen Konzepten wie in der Riemannschen Geometrie unabhängigen Untersuchung von Formen und Gestalten, und der modernen algebraischen Geometrie und führte zudem noch neuartige analytische Werkzeuge in die Funktionentheorie ein. Letztere wiesen, auch wenn zunächst noch wesentliche, von Weierstraß aufgedeckte analytische Lücken geschlossen werden mussten, über Hilbert in die moderne Variationsrechnung und Existenztheorie für Lösungen partieller Differentialgleichungen, die wiederum, über die numerische Analysis vermittelt, ein grundlegendes Werkzeug des heutigen Ingenieurs bilden. Ein neuartiger und entscheidender Gedanke war, dass Riemann eine analytische Funktion im Komplexen nicht mehr durch einen analytischen Ausdruck zu erschließen versuchte, sondern als durch ihre Singularitäten (Unendlichkeitsstellen oder Verzweigungspunkte) bestimmt betrachtete. Hierdurch konnte er einer solchen Funktion eine sog. Riemann-

[4] Natürlich ist auch der Anlass von Riemanns Schrift zu berücksichtigen, dass es sich nämlich um ein Kolloquium vor der Philosophischen Fakultät handelte und Riemann sicherlich Rücksicht auf die fehlenden mathematischen Fachkenntnisse der meisten seiner Zuhörer nehmen wollte, unter denen neben Gauß, der übrigens nicht Professor für Mathematik, sondern für Astronomie und Direktor der Sternwarte war, die Mathematik nur noch durch die beiden Professoren Ulrich (1798–1879) und Stern (1807–1894) vertreten war. Allerdings zeigen andere derartige Vorträge und Schriften, wie Kleins Erlanger Programm, mit dem er sich der Fakultät in Erlangen vorstellte, durchaus einen wesentlich stärker formelgeprägten Charakter, und wenn die Fakultät eines der anderen von Riemann vorgeschlagenen Themen gewählt hätte, wäre die Darstellung vermutlich auch in mathematischen Formeln entwickelt worden.

sche Fläche zuordnen und dann die qualitativen Eigenschaften der Funktion durch die Topologie dieser Riemannschen Fläche bestimmen. Dies strahlte in fast alle Bereiche der modernen Mathematik aus, beispielsweise bis hin in die Zahlentheorie, deren analytische Ausdrücke durch den Riemannschen Ansatz nun ebenfalls durch geometrische Methoden interpretierbar und behandelbar wurden. Wegweisend bei den Riemannschen Flächen war auch, dass Riemann nicht mehr nur das einzelne mathematische Objekt betrachtete, sondern eine Klasse von Objekten über die Variabilität von Parametern konzeptionalisierte. Dies führte auf die für die algebraische Geometrie grundlegende Theorie der Modulräume, und deswegen bilden Riemannsche Flächen auch die fundamentalen Objekte der derzeit für die Vereinheitlichung der bekannten physikalischen Kräfte vielleicht aussichtsreichsten Theorie, der Stringtheorie. Der sogenannte Satz von Riemann-Roch (Gustav Roch (1839–1866) war ein früh verstorbener Schüler von Riemann, der Riemanns diesbezügliche Überlegungen vervollständigte) war eines der Leitbilder der Mathematik der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts und führte in den Arbeiten von Hirzebruch, Atiyah-Singer und Grothendieck zu zentralen Resultaten der heutigen Mathematik. Die Riemannsche Vermutung in der Zahlentheorie gilt auch fast 150 Jahre nach ihrer Formulierung als das schwierigste und tiefste offene Problem der gesamten Mathematik.

Zur Biographie Riemanns Bernhard Riemann lebte von 1826 bis 1866. Er stammte aus einem niedersächsischen protestantischen Pfarrhaus, und er hing sehr an seiner Familie, die allerdings durch viele frühe Todesfälle und deswegen ungesicherte finanzielle Verhältnisse in eine schwierige Lage kam. Er zeigte, wie die meisten Großen der Mathematikgeschichte, schon als Schüler eine außerordentliche mathematische Begabung. Nach einigem Schwanken folgte er dann dieser Begabung und studierte Mathematik statt der vom Vater gewünschten Theologie, und zwar in den damaligen wissenschaftlichen Zentren Göttingen und Berlin. Seine wichtigsten akademischen Lehrer oder Vorbilder waren Carl Friedrich Gauß (1777–1855)[5], bei dem er 1851 promovierte, und Peter Gustav Lejeune Dirichlet

[5] Gauß wurde in Braunschweig in einfachen Verhältnissen geboren. Da seine herausragende mathematische Begabung aber schon früh erkannt wurde, wurde er durch den Braunschweiger Herzog großzügig gefördert. Schon in jungen Jahren gelangen ihm bedeutende mathematische Entdeckungen, beispielsweise zur Frage der Konstruierbarkeit regulärer Polygone. Seine 1801 erschienenen, aber schon einige Jahre vorher verfassten *Disquisitiones Arithmeticae* gelten als dasjenige Werk, das die moderne Mathematik als autonome Wissenschaft begründete. Ein seinerzeit spektakulärer Erfolg der von ihm entwickelten mathematischen Methoden der Fehlerrechnung war die Wiederentdeckung des Kleinplaneten Ceres im gleichen Jahr. Dieser Kleinplanet war von Astronomen entdeckt, aber dann wieder aus den Augen verloren worden, bis die Gaußschen Methoden der Bahnberechnung es erlaubten, seine Position mit so hoher Präzision vorherzusagen, dass die Astronomen wussten, auf welche Stelle im Himmel sie ihre Fernrohre zu richten hatten, um ihn wiederzufinden. Gauß war seit 1807 Professor in Göttingen und Direktor der Sternwarte. Gauß gilt als der größte Mathematiker aller Zeiten, und er hat fast alle Gebiete der modernen Mathematik entscheidend geprägt und viele von ihnen überhaupt erst begründet. Zusammen mit dem Physiker Wilhelm Weber (1804–1891) konstruierte er den ersten Telegrafen. Die von ihm entwickelten mathematischen Methoden sind auch für die Astronomie und die Geodäsie fundamental. Gauß war insbesondere im

(1805–1859)[6], bei dem er in Berlin viele Vorlesungen hörte. Dirichlet wurde dann 1855 der Nachfolger von Gauß in Göttingen, und Riemann wurde dann wiederum 1859 dessen Nachfolger als Göttinger ordentlicher Professor, nachdem er im Jahre 1857 zum außerordentlichen Professor ernannt worden war. Er war schüchtern und kränklich, beeindruckte aber die wissenschaftliche Welt durch den Reichtum seiner mathematischen Erkenntnisse und die Kühnheit und Neuartigkeit seiner mathematischen Theorien. Engere persönliche Kontakte außerhalb seiner Familie entwickelte er nur zu dem jüngeren Mathematiker Richard Dedekind (1831–1916)[7]. Er durchlief einen seinerzeit üblichen Karriereweg über die Privatdozentur zur Professur in Göttingen. Das mit dieser Professur verbundene Gehalt erleichterte dann wesentlich seine finanzielle Situation, insbesondere weil er nach dem

---

Alter, sicher auch bedingt durch ein wenig glückliches Familienleben, abweisend und verschlossen, und der schüchterne Riemann konnte kaum in direkten persönlichen Kontakt mit ihm gelangen. Riemann eignete sich daher die mathematischen Theorien und Entdeckungen von Gauß im Wesentlichen durch das Studium von dessen Schriften an. – Eine neuere Biographie von Gauß ist Walter Kaufmann Bühler, *Gauß. A biographical study*, Berlin etc., Springer, 1981.

[6] Dirichlet wurde in Düren im Rheinland als Sohn des dortigen Posthalters geboren. Dessen Vater war aus dem wallonischen Gebiet im heutigen Belgien eingewandert, woher der romanische Name kommt. Während eines Aufenthaltes in Paris von 1822–1827, wo er zwar als Ausländer nicht an den Kursen des seinerzeit führenden französischen Mathematikers Augustin Louis Cauchy (1789–1857) an der Ecole Polytechnique teilnehmen durfte, gelang ihm die Aufnahme in die Kreise von Jean-Baptiste Louis Fourier (1768–1830), der von physikalischen Problemen der Thermodynamik ausgehend die berühmten Reihendarstellungen für periodische Funktionen eingeführt hatte. Dirichlet beweist einen grundlegenden Satz über diese Reihendarstellungen. Alexander von Humboldt (1769–1859), der sich nach seinen berühmten Forschungsreisen zunächst in Paris aufhielt und dann in Berlin einflussreiche Positionen bekleidete, ist von ihm beeindruckt, unterstützt und fördert ihn und holt ihn als Professor nach Preußen, zunächst nach Breslau und 1829 nach Berlin. Dirichlet und sein Freund und Kollege Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) machen die 1810 von Wilhelm von Humboldt (1767–1835) im Zuge der durch die napoleonische Aggression motivierten Reformen Preußens gegründete Berliner Universität zu einen Zentrum der mathematischen Forschung. Dirichlets Ehefrau Rebecca war eine Enkelin des Philosophen Moses Mendelssohn (1729–1786), eine Nichte der Schriftstellerin Dorothea (von) Schlegel (1764–1839), der Gattin des Literaten und Theoretikers der Romantik Friedrich (von) Schlegel (1772–1829), und eine Schwester des Komponisten Felix Mendelssohn Bartholdy (1809–1847), der als Leiter des Leipziger Gewandhausorchesters auch die Wiederentdeckung und Renaissance der Musik von Bach und Händel initiierte. Auf diese Weise war das Leben Dirichlets mit denjenigen vieler anderer bedeutender Persönlichkeiten verwoben. Dirichlet war Riemann gegenüber freundlich und aufgeschlossen, und Riemann konnte viel von ihm lernen. Dirichlet leistete insbesondere Bedeutendes in der Zahlentheorie, und er begründete dabei die analytische Richtung der Zahlentheorie. Eine historisch orientierte Einführung findet sich in W. Scharlau, H. Opolka, *Von Fermat bis Minkowski.* Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung, Berlin, Heidelberg, Springer, 1980. Die von Dirichlet in der Variationsrechnung angewandten Prinzipien spielten später eine zentrale Rolle in Riemanns Untersuchungen zur Funktionentheorie und der nach ihm benannten Riemannschen Flächen.

[7] Zu Dedekind vgl. Winfried Schar lau (Hrsg.), *Richard Dedekind. 1831|1981*, Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg, 1981. Die dort abgedruckten Briefe enthalten auch biographisches Material zu Riemann, welches das in Dedekinds Biographie von Riemann in den gesammelten Werken dargestellte Bild ergänzen kann.

Tode seiner Eltern und seines Bruders auch die Verantwortung für drei unverheiratete Schwestern übernahm. Gesundheitliche Schwierigkeiten machten Unterbrechungen dieser Professur durch Aufenthalte in dem ihm klimatisch zuträglicheren Italien erforderlich, wo er dann aber knapp 40jährig seinem Lungenleiden erlag und seine Frau und eine kleine Tochter hinterließ.

Riemann starb also weder so jung wie Niels Hendrik Abel (1802–1829) oder Evariste Galois (1811–1832), die in ihrem kurzen Leben nur eine wichtige mathematische Theorie (diejenige der Abelschen Integrale bzw. die Gruppentheorie) begründen konnten, noch erreichte er das hohe Alter des oft mürrisch verschlossenen Gauß. Er besaß weder die beinahe unerschöpfliche Lebenskraft Leonhard Eulers (1707–1783) noch die tätige Energie von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) oder Felix Klein (1849–1925). Er konnte auch nicht auf einen Stab begabter Mitarbeiter zurückgreifen wie später David Hilbert (1862–1943), denn die hierfür erforderlichen institutionellen Voraussetzungen wurden erst später in Deutschland von Felix Klein und anderen gelegt (und dann von den Nationalsozialisten durch die Vertreibung und Ermordung jüdischer und das Exil andersdenkender Mathematiker wieder zerstört). Riemann begründete aber zusammen mit Gauß gerade den Aufschwung der Mathematik in Deutschland und speziell in Göttingen, der eine solche Institutionalisierung überhaupt erst ermöglichte.

Soweit dem Autor bekannt, gibt es von Riemann keine ausführliche für einen allgemeineren Leserkreis verfasste Biographie.[8] Ansonsten sind Biographien bedeutender Mathematiker nicht selten und in manchen Ländern durchaus auch Ausdruck des nationalen Stolzes, wie in den Biographien der norwegischen Mathematiker Niels Hendrik Abel und Sophus Lie (1842–1899) durch Arild Stubhaug. In anderen Fällen, wie in den unter Mathematikern sehr beliebten Biographien von David Hilbert und Richard Courant (1888–1972) durch Constance Reid, wird auch die Verflochtenheit der Wissenschaftler in die ungünsti-

[8] In den von Heinrich Weber und Richard Dedekind herausgegebenen Werken Riemanns findet sich ein etwa zwanzigseitiger, von seinem Freund und Kollegen Dedekind verfasster Lebenslauf Riemanns. Hans Freudenthal hat für das Dictionary of Scientific Biography eine kurze Biographie Riemanns verfasst. Neben weiteren kürzeren biographischen Skizzen gibt es Werkbiographien Riemanns von Michael Monastyrsky und Detlef Laugwitz, in der die Entwicklung und Wirkung des wissenschaftlichen Werkes im Kontext der Lebensumstände dargelegt werden. Die Werkbiographie von Laugwitz ist mir an verschiedenen Stellen von großem Nutzen gewesen, und sie enthält auch eine ausführliche und allgemeinverständliche Beschreibung von Riemanns Leben. Verschiedene weitere derartige Analysen finden sich in der von Raghavan Narasimhan durchgeführten Neuausgabe von Riemanns Werken. Die Erforschung des wissenschaftlichen Nachlasses und des vorliegenden biographischen Materials Riemanns durch Erwin Neuenschwander hat bisher zu keiner zusammenfassenden Publikation geführt; s. allerdings Erwin Neuenschwander, *Riemanns Einführung in die Funktionentheorie*. Eine quellenkritische Edition seiner Vorlesungen und einer Bibliographie zur Wirkungsgeschichte der Riemannschen Funktionentheorie. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Bd. 44, 1996. Verschiedene mathematikhistorische Studien beschäftigen sich mit der Entwicklung der Geometrie vor, durch und nach Riemann, allerdings nicht unter biographischen Gesichtspunkten. Quellenangaben finden sich in der Bibliographie am Ende dieses Buches.