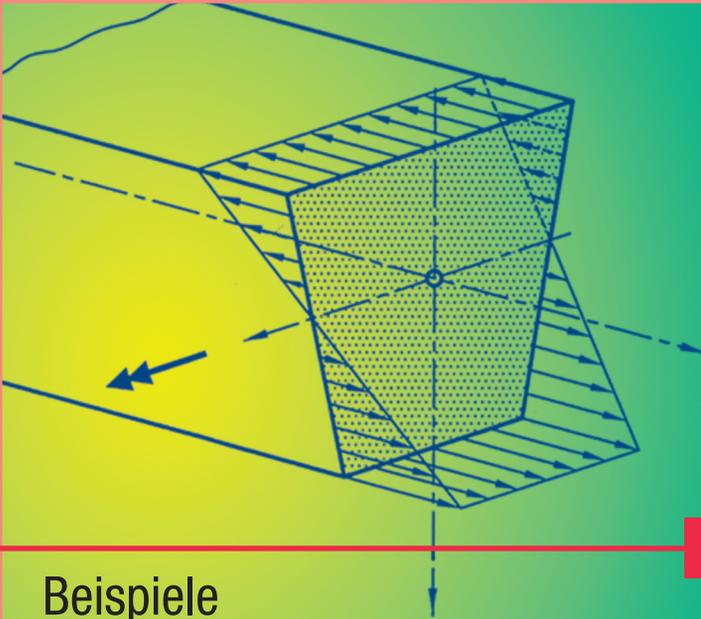


Martin Mayr

Mechanik- Training



Beispiele
und Prüfungsaufgaben

4., überarbeitete Auflage

HANSER



bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Martin Mayr

Mechanik-Training

Beispiele und Prüfungsaufgaben

Statik

Kinematik – Kinetik – Schwingungen

Festigkeitslehre

4., überarbeitete Auflage,
mit 351 Abbildungen

HANSER

Der Autor:

Professor Dr. Martin Mayr, Hochschule Augsburg, Fakultät Maschinenbau und Verfahrenstechnik



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44571-0

E-Book-ISBN 978-3-446-44617-5

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Alle in diesem Buch enthaltenen Verfahren bzw. Daten wurden nach bestem Wissen dargestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen.

Aus diesem Grund sind die in diesem Buch enthaltenen Darstellungen und Daten mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Darstellungen oder Daten oder Teilen davon entsteht.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2015 Carl Hanser Verlag München Wien

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: Der Buchmacher, Arthur Lenner, München

Coverconcept: Marc Müller-Bremer, Rebranding, München, Germany

Titelillustration: Atelier Frank Wohlgemuth, Hamburg

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Bindung: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza

Printed in Germany

Vorwort

Dieses Buch widme ich meiner Frau Lydia.

*Prof. Ernst Schatz und Prof. Ulrich Thallofer gilt
mein besonderer Dank für ihre wertvolle Mitarbeit.*

Das vorliegende Übungsbuch enthält insgesamt 155 Aufgaben, 103 Beispiele, die nach Mechanik-Themen geordnet sind, und 52 „Prüfungsaufgaben“ von vier Schwierigkeitsgraden. Bei den Prüfungsaufgaben muss der Leser selbst das Einordnen vornehmen; viele dieser Aufgaben sind zudem themenübergreifend.

Die Themenauswahl ist auf das Studium an den Fachhochschulen abgestimmt, trotzdem werden Studierende der Universitäten und Technikerschulen ebenfalls geeignete Aufgaben vorfinden. Die für die Lösung benötigten Formeln und Zahlenwerte sind meinem Lehrbuch „Technische Mechanik“ entnommen. Gelegentlich wird direkt auf den Anhang dieses Buches verwiesen (z.B. verweist die Angabe A7.1 auf die Flächenmomente 2. Grades sowie die Biegesteifigkeiten). Selbstverständlich eignen sich auch andere Lehr- und Handbücher zum Nachschlagen. Alle Bilder sind in Millimeter bemaßt, sofern nichts anderes vereinbart ist. Graphische Lösungen wurden z.T. mit Hilfe von CAD erstellt; diese sind dann so genau wie analytische Lösungen. Endergebnisse und Zwischenwerte werden meist auf eine praktisch sinnvolle Stellenzahl gerundet wiedergegeben.

Die Aufgabenstellungen stammen aus einem breiten Bereich von Technik und Freizeit (siehe Sachthemen-Verzeichnis). Sie sind zumeist noch nicht auf das zugehörige Mechanikmodell abstrahiert. Somit hat der Leser die Möglichkeit, zusätzlich die Abstraktion, diesen ersten und oft schwierigsten Schritt einer Problemlösung, zu erlernen. Darüber hinaus sollen die praxisnahen Aufgabenstellungen, in Verbindung mit anschaulichen Bildern, zum Üben anregen. Die ausführlichen Lösungen zu allen Aufgaben ermöglichen ein autodidaktisches Lernen. Allerdings sollte der Leser eine Aufgabe zunächst so weit wie möglich selbständig bearbeiten und die angegebene Lösung nur zur Kontrolle verwenden.

Bei meiner Arbeit zu diesem Buch fand ich große Unterstützung: Prof. Ulrich Thallofer erstellte das druckreife Layout. Prof. Ernst Schatz gab zahlreiche Anregungen und half beim Korrekturlesen. Korrektur lasen auch Prof. Dr. Joachim Voßiek, Dipl.-Ing. Kathrin Fischer und meine Tochter Andrea.

Die Bilder fertigten an Dipl.-Ing. Robert Grimbacher, Dipl.-Ing. Daniel Dierig, Dipl.-Ing. Jürgen Möller, Dipl.-Ing. Uschi Burger, Dipl.-Ing. Sabine Schmidt, Dipl.-Ing. Christoph Hunglinger, Dipl.-Ing. Marco Vasciarelli, Dipl.-Ing. Eugen Weber und Dipl.-Ing. Stefan Wolf.

Anregungen erhielt ich von Dipl.-Ing. Wilhelm Bezler, Dipl.-Ing. Hubert Breyer, Dipl.-Ing. Alexander Egger, Dipl.-Ing. Axel Gebhardt, Prof. Dr. Johann Fuchs, Prof. Dr.

Frank Gießner, Dipl.-Ing. Martin Grußler, Dipl.-Ing. Gottfried Hofmann, Prof. Dr. Wolfgang Käser, Dipl.-Ing. Hubert Keim, Prof. Dr. Franz Obinger, Prof. Dr. Willi Rößner, Prof. Dr. Eberhard Roos, Prof. Wilhelm Ruckdeschel, Dipl.-Ing. Gerhard Sauer, Dipl.-Ing. Ralf Schuler, Dipl.-Ing. Klaus Theilacker, Dipl.-Ing. Anton Werner, Dr. Helmut Wilplinger, Prof. Dr. Hans Wintrich, Dipl.-Ing. Hans-Jürgen Wüst.

Die folgenden Firmen halfen mit Informationen: AUDI, BÊCHÉ, Ballonbau Wörner, FENDT, GEDA, Greifzug, Kaiser & Kühne, KONE, Leitner, MAN Roland, Nagel, O&K, Pfaff-silberblau, Pfister, von Roll, Siemens, TÜV Bayern Sachsen

Allen Genannten danke ich ganz herzlich.

Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Carl Hanser Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Augsburg, Januar 2015

Martin Mayr

Inhaltsverzeichnis

Teil 1: Statik

1	Zentrales ebenes Kräftesystem <i>S 1.1 bis S 1.4</i>	7
2	Allgemeines ebenes Kräftesystem <i>S 2.1 bis S 2.6</i>	12
3	Räumliches Kräftesystem <i>S 3.1 bis S 3.6</i>	26
4	Schwerpunkt, GULDINsche Regeln <i>S 4.1</i>	38
5	Innere Kräfte und Momente <i>S 5.1 bis S 5.7</i>	40
6	Ebene, statisch bestimmte Fachwerke <i>S 6.1</i>	55
7	Reibung <i>S 7.1, S 7.2</i>	57

Prüfungsaufgaben

Schwierigkeitsgrad 1	<i>SP 1.1 bis SP 1.5</i>	60
Schwierigkeitsgrad 2	<i>SP 2.1 bis SP 2.6</i>	65
Schwierigkeitsgrad 3	<i>SP 3.1 bis SP 3.5</i>	74
Schwierigkeitsgrad 4	<i>SP 4.1 bis SP 4.5</i>	85

Teil 2: Kinematik, Kinetik, Schwingungen

1	Kinematik der Punktbewegung <i>D 1.1 bis D 1.6</i>	97
2	Kinematik der ebenen Bewegung des starren Körpers <i>D 2.1, D 2.2</i>	104
3	Kinematik der Relativbewegung <i>D 3.1 bis D 3.3</i>	110
4	Arbeit und Leistung <i>D 4.1</i>	115
5	Kinetik der Punktbewegung <i>D 5.1 bis D 5.4</i>	116
6	Kinetik der ebenen Bewegung des starren Körpers <i>D 6.1 bis D 6.7</i>	121
7	Kinetik der Relativbewegung <i>D 7.1, D 7.2</i>	132
8	Stoßvorgänge <i>D 8.1 bis D 8.3</i>	135
9	Schwingungen <i>D 9.1 bis D 9.11</i>	138

Prüfungsaufgaben

Schwierigkeitsgrad 1	<i>DP 1.1 bis DP 1.4</i>	150
Schwierigkeitsgrad 2	<i>DP 2.1 bis DP 2.4</i>	154
Schwierigkeitsgrad 3	<i>DP 3.1 bis DP 3.4</i>	159
Schwierigkeitsgrad 4	<i>DP 4.1 bis DP 4.3</i>	166

Teil 3: Festigkeitslehre

1	Ebener Spannungszustand <i>F 1.1</i>	175
2	Anwendung der einachsigen Stoffgesetze auf Zug/Druck-Stäbe <i>F 2.1 bis F 2.5</i>	176
3	Einfache Fälle der Kraft- und Momentenübertragung <i>F 3.1, F 3.2</i>	185
4	Ringe und Behälter <i>F 4.1, F 4.2</i>	187
5	Flächenmomente <i>F 5.1</i>	189
6	Biegung <i>F 6.1 bis F 6.6</i>	191
7	Torsion <i>F 7.1 bis F 7.3</i>	199
8	Schub bei Querkraftbiegung <i>F 8.1, F 8.2</i>	202
9	Knickung <i>F 9.1, F 9.2</i>	205

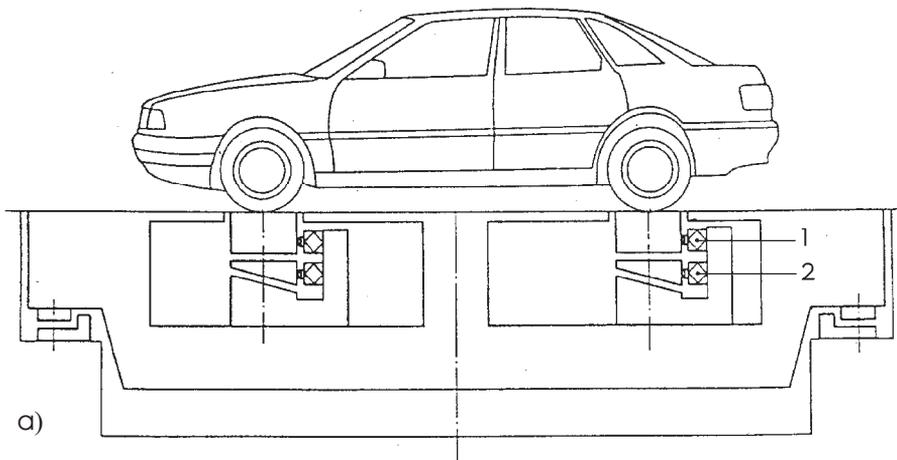
10	Zusammengesetzte Beanspruchung von Stäben	<i>F 10.1 bis F 10.9</i>	206
11	Bauteilfestigkeit	<i>F 11.1</i>	220
12	Dehnungsmessstreifen-Methode	<i>F 12.1, F12.2</i>	221
13	Satz von CASTIGLIANO	<i>F13.1</i>	225
Prüfungsaufgaben			
Schwierigkeitsgrad 1	<i>FP 1.1 bis FP 1.4</i>		228
Schwierigkeitsgrad 2	<i>FP 2.1 bis FP 2.6</i>		231
Schwierigkeitsgrad 3	<i>FP 3.1 bis FP 3.4</i>		239
Schwierigkeitsgrad 4	<i>FP 4.1, FP 4.2</i>		247
Anhang:	Sachthemen-Verzeichnis		253

Teil 1: Statik

S 1.1 Bild a zeigt das Prinzip einer einfachen Windkanalwaage. Unter jedem der vier Räder befindet sich die gleiche Messanordnung. Die Kraftmesszelle Nr. 1 misst die horizontale Widerstandskraft, Nr. 2 die vertikale Aufstandskraft.

Die Kraftübertragung vom Rad auf die Messzellen erfolgt über einen zylindrischen Kolben sowie einen Keil mit dem Neigungsverhältnis 1:10. Die Übertragungsglieder sind hydrostatisch gelagert, d.h. zwischen den Berührflächen befindet sich ein Ölfilm, sodass sie sich reibungsfrei gegeneinander verschieben können.

Welche Aufstandskraft F_A wirkt an einem Rad, wenn an der Kraftmessdose Nr. 2 die Kraft $F_2 = 40 \text{ N}$ angezeigt wird?



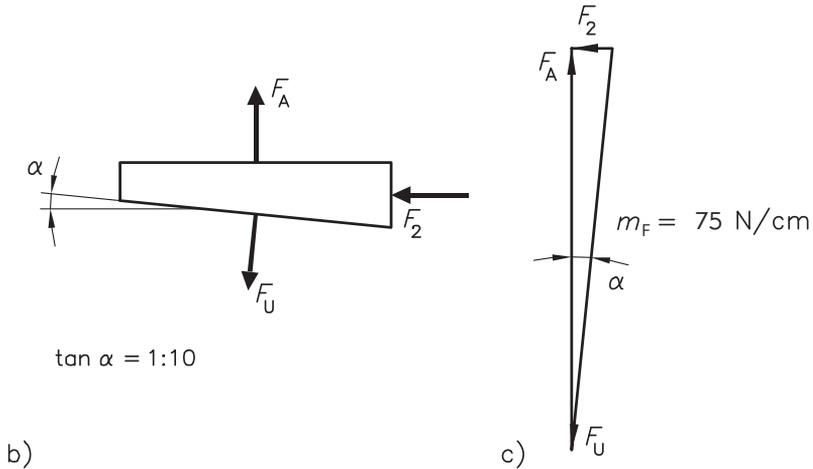
Lösung

Auf den Keil in Bild b wirkt die horizontale Messkraft F_2 . Diese wird in die vertikale Aufstandskraft F_A und in die schräge Kraft F_U auf die Unterlage zerlegt. Im Kräfteplan von Bild c ist das Kräfteck dieser Zerlegung gezeichnet.

Es ergibt sich $F_A = 400 \text{ N}$.

Aus dem Kräfteck lässt sich auch die analytische Beziehung ablesen, nämlich

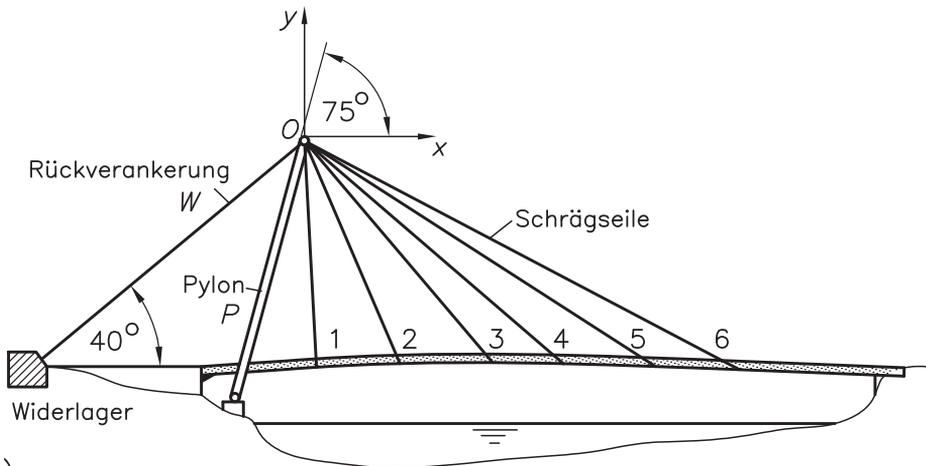
$$F_A = \frac{F_2}{\tan \alpha} = \frac{F_2}{0,1} = 10 \cdot F_2 = 400 \text{ N}.$$



S 1.2 Bild a zeigt eine rückverankerte Schrägseil-Fußgängerbrücke. Sechs Schrägseilpaare helfen den Brückenträger zu tragen. Sie sind am Pylon befestigt, ebenso das Seilpaar der Rückverankerung. Die Seillinien schneiden sich nahezu in einem Punkt (Punkt O).

Mit welcher Kraft F_W muss die Rückverankerung gespannt sein, wenn der Pylon nur druckbeansprucht sein soll? Wie groß ist die Kraft F_P im Pylon? Graphische Lösung.

Hinweis: Die beiden Seile der Seilpaare laufen nahezu parallel, sodass wir von einem ebenen Kräftesystem ausgehen können. Die Kräfte in der x,y -Ebene sind die resultierenden Kräfte der Seilpaare.



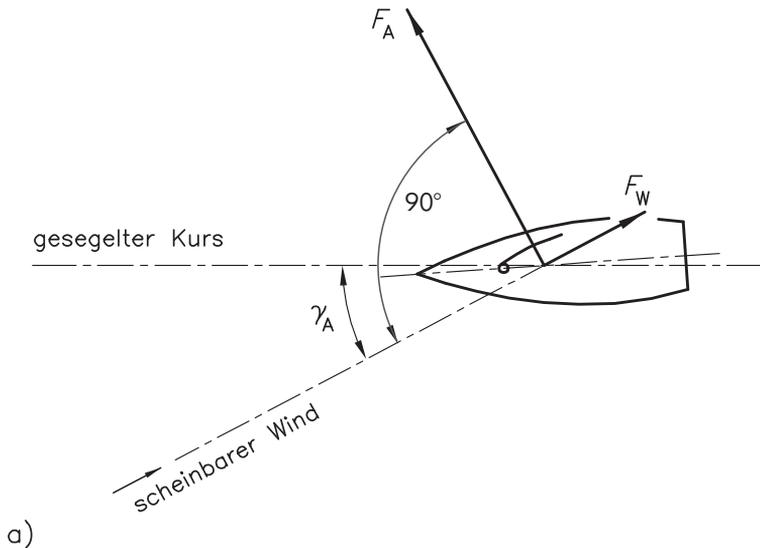
a)

Gegeben sind Seilkräfte und Winkel aller Seilpaare in der x,y -Ebene.

Der Winkel zwischen dem „scheinbaren Wind“ (vom Schiff aus beobachtete Windrichtung) und dem gesegelten Kurs beträgt $\gamma_A = 28^\circ$.

Analytisch sind zu bestimmen:

- aerodynamische Gesamtkraft F_T (bestehend aus Auftriebs- und Widerstandskraft)
- Vortriebskraft F_V (in Richtung des gesegelten Kurses)
- Krängungskraft F_K (quer zur Richtung des gesegelten Kurses)



Lösung

Hierzu Bild b.

$$F_T = \sqrt{F_A^2 + F_W^2} = \sqrt{240^2 + 80^2} \text{ N} \approx 253 \text{ N}$$

Für die Kräftezerlegung benötigen wir den Winkel ε_H . Dieser folgt aus

$$\varepsilon_H = \gamma_A - \varepsilon_A \approx 28^\circ - 18,43^\circ \approx 9,57^\circ$$

$$\text{mit } \varepsilon_A = \arctan \frac{F_W}{F_A} = \arctan \frac{80 \text{ N}}{240 \text{ N}} \approx 18,43^\circ .$$

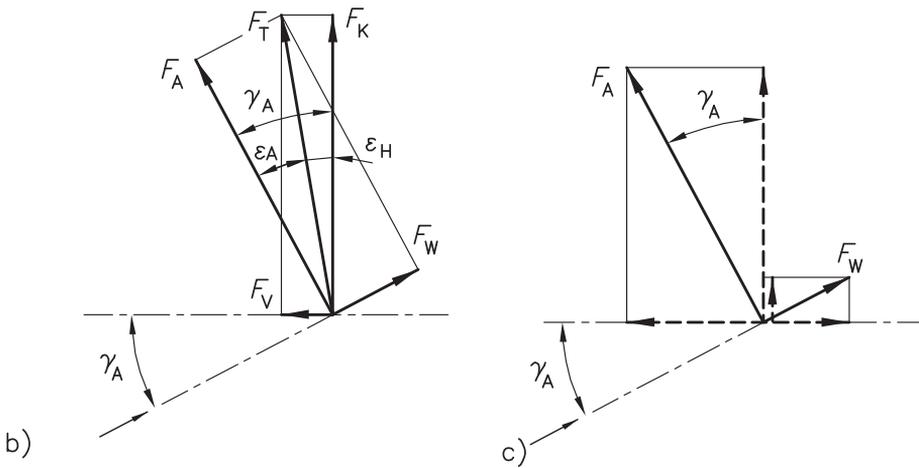
$$F_V = F_T \cdot \sin \varepsilon_H \approx 253 \text{ N} \cdot \sin 9,57^\circ \approx 42 \text{ N}$$

$$F_K = F_T \cdot \cos \varepsilon_H \approx 253 \text{ N} \cdot \cos 9,57^\circ \approx 249 \text{ N}$$

Die Kräftezerlegung lässt sich auch unmittelbar mit den gegebenen Größen durchführen, Bild c:

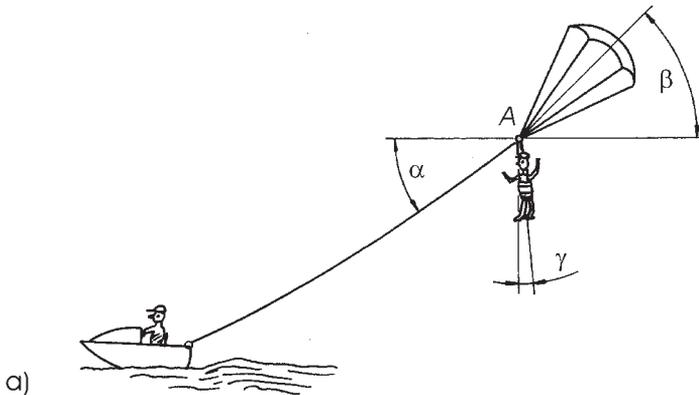
$$F_V = F_A \cdot \sin \gamma_A - F_W \cdot \cos \gamma_A = 240 \text{ N} \cdot \sin 28^\circ - 80 \text{ N} \cdot \cos 28^\circ \approx 42 \text{ N}$$

$$F_K = F_A \cdot \cos \gamma_A + F_W \cdot \sin \gamma_A = 240 \text{ N} \cdot \cos 28^\circ + 80 \text{ N} \cdot \sin 28^\circ \approx 249 \text{ N}$$



S 1.4 Ein Boot zieht gemäß Bild a an einem Seil einen Gleitschirm nebst Person hinter sich her. Die Person übt auf den Punkt A die Kraft $F_P = 750 \text{ N}$ aus. Die Wirkungslinien der Kräfte von Seil, Schirm und Person haben die Winkel $\alpha = 35^\circ$ und $\beta = 45^\circ$ zur horizontalen Achse sowie $\gamma = 5^\circ$ zur vertikalen Achse.

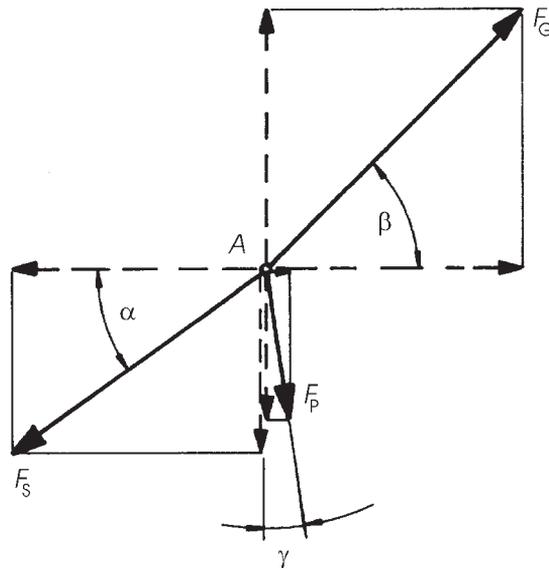
Mit welcher Seilkraft F_S muss am Punkt A gezogen werden? Wie groß ist die Kraft F_G , mit welcher der Gleitschirm am Punkt A zieht? (analytische Lösung)



Lösung

Es handelt sich um ein zentrales ebenes Kräftesystem mit den drei Kräften F_S , F_G und F_P am Punkt A , Bild b.

Wir zerlegen die drei Kräfte in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten (gestrichelt) und schreiben nacheinander die Kräftegleichgewichtsbedingung in den beiden Richtungen an:



b)

$$\rightarrow -F_S \cdot \cos \alpha + F_G \cdot \cos \beta + F_P \cdot \sin \gamma = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow -F_S \cdot \sin \alpha + F_G \cdot \sin \beta - F_P \cdot \cos \gamma = 0 \quad (2)$$

Dieses Gleichungssystem kann z.B. folgendermaßen aufgelöst werden:

(1) · sin β – (2) · cos β liefert:

$$-F_S \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + F_S \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + F_P \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta + F_P \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta = 0$$

$$F_S = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \beta + \cos \gamma \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta} \cdot F_P \approx 4,411 \cdot F_P \approx 3309 \text{ N}$$

(1) · sin α – (2) · cos α liefert:

$$F_G \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - F_G \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha + F_P \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha + F_P \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha = 0$$

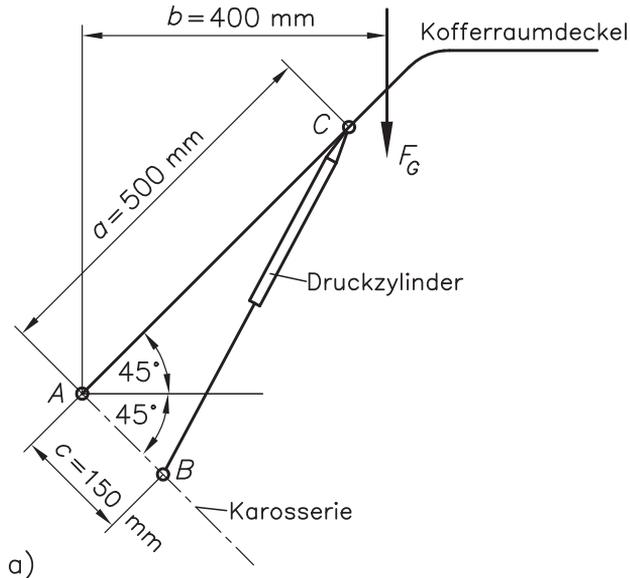
$$F_G = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha}{\sin \beta \cdot \cos \alpha - \cos \beta \cdot \sin \alpha} \cdot F_P \approx 4,987 \cdot F_P \approx 3740 \text{ N}$$

F_G folgt mit dem nunmehr bekannten F_S auch direkt aus (1) oder (2).

S 2.1 Bild a zeigt den Kofferraumdeckel eines Pkws in geöffnetem Zustand. Zwei seitliche Druckzylinder erleichtern das Öffnen. Sie befinden sich zwischen den Gelenkpunkten B (Karosserie) und C (Kofferraumdeckel). Der Kofferraumdeckel hat insgesamt die Gewichtskraft $F_G = 200 \text{ N}$.

Welche Druckkraft \vec{F}_Z muss jeder Zylinder mindestens ausüben, damit der Deckel im geöffneten Zustand gehalten wird? Welche Kraft \vec{F}_A (Größe und Richtung) wirkt hierbei von jedem der beiden Scharniere A auf den Deckel?

Lösungsweg sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch.



Rechnerische Lösung

Bild b zeigt den Deckel mit der bekannten Gewichtskraft $\vec{F}_G/2$, den unbekannt Komponenten F_{Ax} und F_{Ay} der Kraft \vec{F}_A sowie der nur der Größe nach unbekannt Kraft \vec{F}_Z . Zum einfacheren Rechnen zerlegen wir \vec{F}_Z ebenfalls in zwei Komponenten, nämlich in $F_Z \cdot \cos\beta$ und $F_Z \cdot \sin\beta$.

Der Winkel β ergibt sich mit Hilfe von Bild a zu

$$\beta = \arctan \frac{c}{a} = \arctan \frac{150 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} \approx 16,7^\circ.$$

Das Momentengleichgewicht um A führt auf:

$$\curvearrowleft A) \quad F_Z \cdot \sin\beta \cdot a - \frac{F_G}{2} \cdot b = 0$$

$$F_Z = \frac{F_G \cdot b}{2 \cdot \sin\beta \cdot a} \approx \frac{200 \text{ N} \cdot 400 \text{ mm}}{2 \cdot \sin 16,7^\circ \cdot 500 \text{ mm}} \approx 278 \text{ N}$$

Die Kräftegleichgewichte in x - und y -Richtung liefern:

$$\rightarrow \quad F_{Ax} + F_Z \cdot \cos(45^\circ + \beta) = 0$$

$$F_{Ax} = -F_Z \cdot \cos(45^\circ + \beta) \approx -278 \text{ N} \cdot \cos(45^\circ + 16,7^\circ) \approx -132 \text{ N}$$

$$\uparrow \quad F_{Ay} + F_Z \cdot \sin(45^\circ + \beta) - \frac{F_G}{2} = 0$$

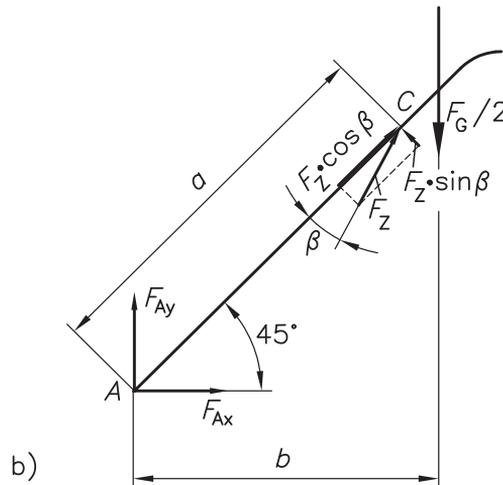
$$F_{Ay} = -F_Z \cdot \sin(45^\circ + \beta) + \frac{F_G}{2} \approx -278 \text{ N} \cdot \sin(45^\circ + 16,7^\circ) + 100 \text{ N} \approx -145 \text{ N}$$

Die Kraftkomponenten haben beide negatives Vorzeichen, wirken damit entgegen den eingezeichneten Richtungen.

Resultierende \vec{F}_A :

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx \sqrt{132^2 + 145^2} \text{ N} \approx 196 \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} \approx \arctan \frac{-145 \text{ N}}{-132 \text{ N}} \approx 47,7^\circ$$



Kontrolle mit Hilfe eines Momentengleichgewichts um C:

$$\curvearrowright F_{Ax} \cdot a \cdot \sin 45^\circ - F_{Ay} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - \frac{F_G}{2} (b - a \cdot \cos 45^\circ) = 0 \quad ?$$

$$-132 \text{ N} \cdot 500 \text{ mm} \cdot \sin 45^\circ - (-145 \text{ N}) \cdot 500 \text{ mm} \cdot \cos 45^\circ$$

$$-100 \text{ N}(400 \text{ mm} - 500 \text{ mm} \cdot \cos 45^\circ) = 0$$

Das Momentengleichgewicht ist erfüllt, somit stimmen die Kraftkomponenten F_{Ax} und F_{Ay} sowie die Druckkraft F_Z .

Zeichnerische Lösung:

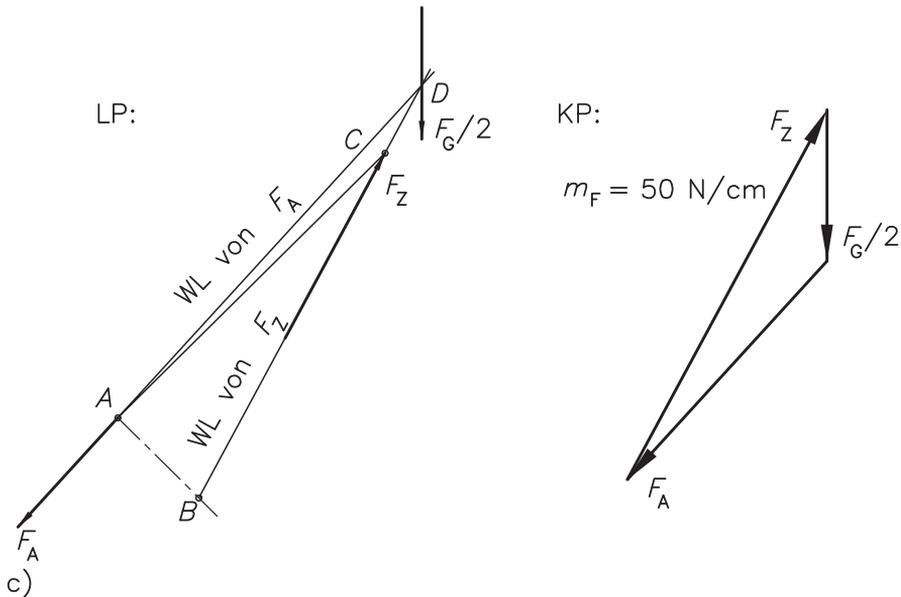
Bild c zeigt links den Lageplan. Von vornherein bekannt sind die Wirkungslinien von $\vec{F}_G/2$ und \vec{F}_Z . Am Kofferraumdeckel wirken insgesamt 3 Kräfte. 3 Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien sich in **einem** Punkt schneiden. $\vec{F}_G/2$ und \vec{F}_Z schneiden sich in D; durch diesen Punkt muss somit auch die Wirkungslinie von

\vec{F}_A gehen.

Das Kräfteck im Kräfteplan beginnen wir mit der bekannten Kraft $\vec{F}_G/2$ ($F_G/2 \hat{=} 2 \text{ cm}$). Parallelen zu den Wirkungslinien von \vec{F}_A und \vec{F}_Z aus dem Lageplan liefern das geschlossene Kräfteck.

$$F_Z \hat{=} 5,6 \text{ cm} \rightarrow F_Z \approx 280 \text{ N}$$

$$F_A \hat{=} 3,9 \text{ cm} \rightarrow F_A \approx 195 \text{ N}$$



Die Pfeilspitzen müssen im Kräfteck einen einheitlichen Umlaufungssinn ergeben, im vorliegenden Fall den Uhrzeigersinn. Diese Richtungssinne können in den Lageplan übertragen werden. Das Lager A zieht demnach am Deckel, während der Druckzylinder, wie bereits angenommen, eine Druckkraft ausübt.

*

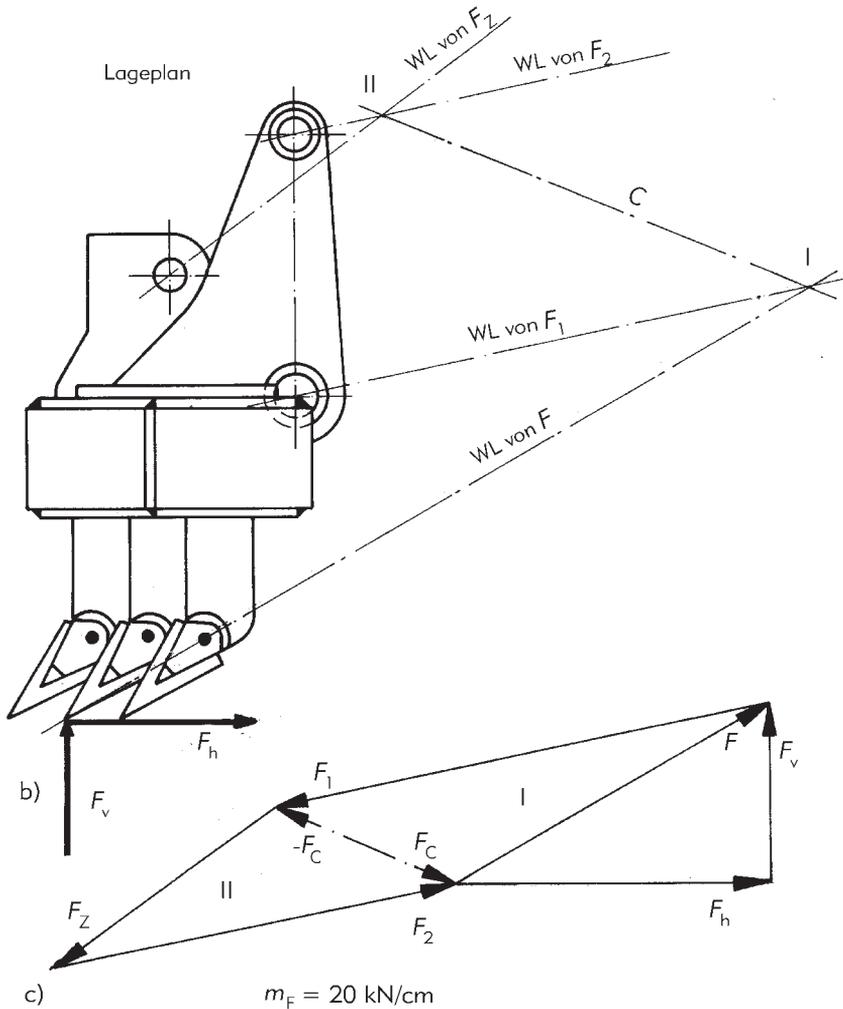
Fazit: Bei 3 Kräften lässt sich die zeichnerische Lösung meist einfacher und schneller durchführen als die rechnerische. Die Genauigkeit einer Handzeichnung zur Bestimmung der Kräfte reicht für die Praxis fast immer aus. Mit Hilfe von CAD werden zeichnerische und rechnerische Lösung gleich genau.

S 2.2

Bild a zeigt den Frontaufreißer eines Graders. Der Grader entwickelt eine maximale horizontale Schubkraft $F_h = 84 \text{ kN}$. Beim Einstechen stützt sich der Grader mit den Reißzähnen am Boden ab, sodass im Extremfall die Vorderachse vollkommen entlastet ist. Hierbei tritt an den Reißzähnen die vertikale Kraft $F_v = 48 \text{ kN}$ auf. Die eingezeichneten Kräfte F_h und F_v sind die Reaktionskräfte vom Boden auf die Reißzähne

Die Reißzähne werden über eine symmetrisch angeordnete Parallelführung (Stangen-

Wirkungslinien (WL) von \vec{F}_1 , \vec{F}_2 und \vec{F}_Z eingezeichnet (Zweigelenstäbe). Die Wirkungslinie der äußeren Kraft \vec{F} ergibt sich im Kräfteplan, Bild c. \vec{F} ist hierbei die Resultierende aus \vec{F}_h und \vec{F}_v .



Wir bringen die Wirkungslinien von \vec{F} und \vec{F}_1 sowie von \vec{F}_Z und \vec{F}_2 zum Schnitt. Zwischen den Schnittpunkten I und II liegt die CULMANNsche Gerade C.

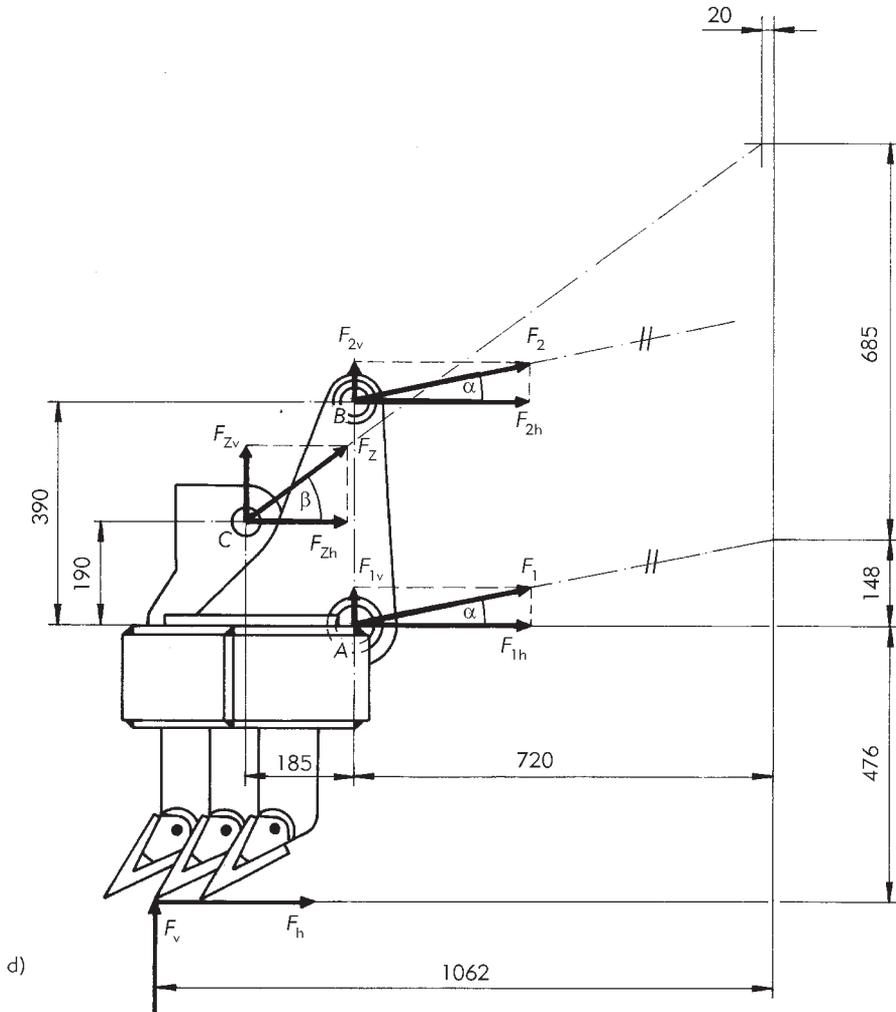
Für den Schnittpunkt I lässt sich im Kräfteplan das Krafteck aus den Kräften \vec{F} , \vec{F}_1 und \vec{F}_C zeichnen. Daran schließen wir das Krafteck für den Punkt II an. Dieses besteht aus den Kräften $-\vec{F}_C$, \vec{F}_Z und \vec{F}_2 .

Die Pfeile müssen einen einheitlichen Umlaufsinn ergeben (hier den Gegenuhrzeigersinn), damit liegt auch der Richtungssinn der Kräfte fest.

Wir entnehmen dem Kräfteplan:

$F_1 \approx 137 \text{ kN}$ (Druckkraft); $F_2 \approx 112 \text{ kN}$ (Zugkraft); $F_Z \approx 73 \text{ kN}$ (Druckkraft)

2. Im Bild d sind am freigeschnittenen Aufreißerteil die gesuchten Kräfte F_1 , F_2 und F_Z als Zugkräfte eingezeichnet. Die tatsächlichen Vorzeichen ergeben sich aus der Rechnung.



Winkel α und β :

$$\alpha = \arctan \frac{148 \text{ mm}}{720 \text{ mm}} \approx 11,6^\circ; \quad \beta = \arctan \frac{(148 + 685 - 190) \text{ mm}}{(185 + 720 - 20) \text{ mm}} \approx 36,0^\circ$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\curvearrowleft A) \quad [-F_{2h} \cdot 390 - F_{Zh} \cdot 190 - F_{Zv} \cdot 185 + F_h \cdot 476 - F_v \cdot (1062 - 720)] \text{ mm} = 0$$

$$-F_2 \cdot \cos \alpha \cdot 390 - F_Z \cdot (\cos \beta \cdot 190 + \sin \beta \cdot 185) + F_h \cdot 476 - F_v \cdot 342 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright B) \quad & [F_{1h} \cdot 390 + F_{Zh} (390 - 190) - F_{Zv} \cdot 185 + F_h \cdot (476 + 390) - \\ & - F_v (1062 - 720)] \text{ mm} = 0 \end{aligned}$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha \cdot 390 + F_Z \cdot (\cos \beta \cdot 200 - \sin \beta \cdot 185) + F_h \cdot 866 - F_v \cdot 342 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright C) \quad & [F_{1h} \cdot 190 + F_{1v} \cdot 185 - F_{2h} (390 - 190) + F_{2v} \cdot 185 + F_h (476 + 190) - \\ & - F_v (1062 - 720 - 185)] \text{ mm} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F_1 \cdot (\cos \alpha \cdot 190 + \sin \alpha \cdot 185) - F_2 \cdot (\cos \alpha \cdot 200 - \sin \alpha \cdot 185) + \\ & + F_h \cdot 666 - F_v \cdot 157 = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems mit den 3 Unbekannten F_1 , F_2 und F_Z von Hand ist bereits etwas aufwendig. Hier ist es von großem Vorteil, wenn auf dem Taschenrechner oder PC ein Gleichungslöser zur Verfügung steht.

Ergebnis:

$$F_1 \approx -137 \text{ kN}; \quad F_2 \approx 112 \text{ kN}; \quad F_Z \approx -73 \text{ kN}$$

Die zeichnerische Lösung lässt sich im vorliegenden Fall wesentlich schneller durchführen als die rechnerische.

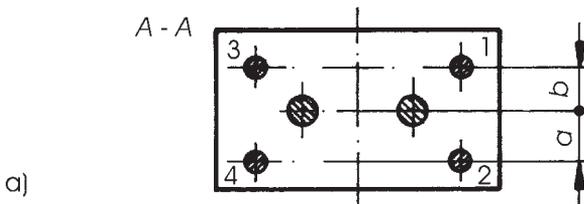
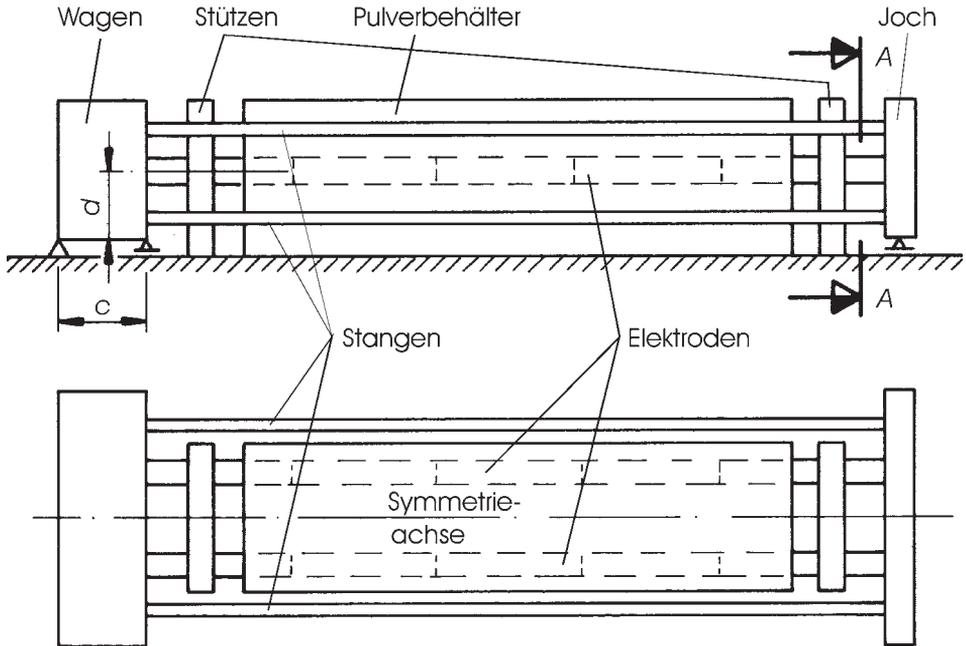
S 2.3

Bild a zeigt das Schema einer Graphitieranlage in Vorderansicht und Draufsicht sowie im Schnitt. Auf dem Wagen sind sechs Hydraulikzylinder montiert. Zwei Zylinder üben auf jede der beiden Graphitelektroden eine Druckkraft von $F = 1000 \text{ kN}$ aus. Die übrigen vier Zylinder wirken über vier Stangen auf ein Joch. In der Erwärmungsphase werden über das Joch die Graphitelektroden, die in Wirklichkeit aus mehreren hintereinander gelegten Kreiszyklindern bestehen, etwas nach links bewegt. Die Elektroden sind in Pulver eingebettet, welches bei dieser Bewegung auf die Elektroden eine nach rechts gerichtete Reibungskraft $F_R = 100 \text{ kN}$ ausübt. Jede der Elektroden drückt damit auf das Joch mit $F^* = F + F_R = 1100 \text{ kN}$. Der Wagen und der Pulverbehälter sind am Boden fixiert, das Joch ist reibungsfrei verschiebbar.

Sämtliche Führungen sind reibungsfrei anzunehmen. Elektroden und Stangen werden nur auf Druck bzw. Zug beansprucht, d.h. die Verbindungen mit den Zylindern und dem Joch sind gelenkig. Alle Gewichtskräfte bleiben unberücksichtigt.

Zahlenwerte: $a = 550 \text{ mm}$; $b = 450 \text{ mm}$; $c = 2500 \text{ mm}$; $d = 2000 \text{ mm}$

1. Berechnen Sie die Kräfte in den Stangen.
2. Welche resultierenden horizontalen und vertikalen Kräfte müssen von den Lagern auf den Wagen wirken, um den Zylinderkräften das Gleichgewicht zu halten?
3. Wie groß wären die Lagerreaktionen aus Frage 2, wenn der Pulverbehälter auf reibungsfreien Rollen stünde und in horizontaler Richtung mit dem Wagen verbunden wäre (mit Begründung)?



Lösung

1. Auf das Joch wirken in horizontaler Richtung die beiden Druckkräfte $F^* = F + F_R = 1100 \text{ kN}$ und die Stangenkräfte F_1 bis F_4 . Wegen der vertikalen Symmetrieachse gilt jedoch $F_3 = F_1$ und $F_4 = F_2$. Die Kräfte auf das Joch können deshalb wie beim ebenen Kräftesystem behandelt werden, Bild b.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\curvearrowright \quad 2 \cdot F_1 \cdot b - 2 \cdot F_2 \cdot a = 0 \quad (1)$$

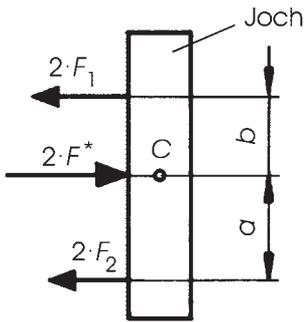
$$\rightarrow \quad -2 \cdot F_1 - 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F^* = 0 \quad (2)$$

(1) - (2) · a liefert:

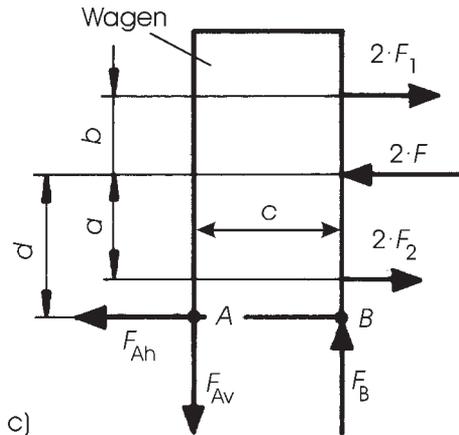
$$2 \cdot F_1 \cdot b + 2 \cdot F_1 \cdot a - 2 \cdot F^* \cdot a = 0$$

$$F_1 = \frac{a}{a+b} \cdot F^* = \frac{1}{1+b/a} \cdot F^* = 605 \text{ kN}; \quad F_2 = F^* - F_1 = 495 \text{ kN}$$

Die Kräfte hätten sich auch kürzer über das Hebelgesetz bestimmen lassen.



b)



c)

2. Auch am Wagen wirken die Kräfte symmetrisch zur vertikalen Symmetrieachse, sodass wir wieder mit einem ebenen Kräftesystem arbeiten können, Bild c.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\curvearrowleft \quad F_B \cdot c - 2 \cdot F_2 \cdot (d - a) + 2 \cdot F \cdot d - 2 \cdot F_1 \cdot (d + b) = 0$$

$$F_B = \frac{2}{c} \cdot [F_2 \cdot (d - a) - F \cdot d + F_1 \cdot (d + b)] = 160 \text{ kN}$$

$$\uparrow \quad -F_{Av} + F_B = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Av} = F_B = 160 \text{ kN}$$

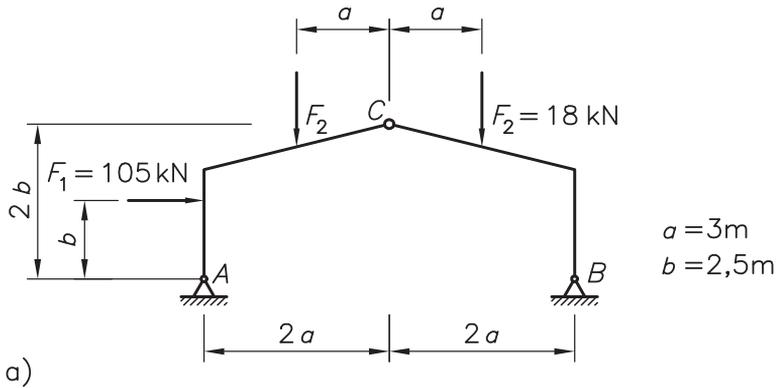
$$\rightarrow \quad -F_{Ah} + 2 \cdot F_2 - 2 \cdot F + 2 \cdot F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Ah} = 2 \cdot (F_2 - F + F_1) = 200 \text{ kN}$$

F_{Ah} entspricht der Reibungskraft, die vom Pulverbehälter auf das Fundament, auf dem er montiert ist, übertragen wird.

3. In diesem Fall wird die Reibungskraft nicht nach außen an das Fundament weitergeleitet, sondern sie wirkt direkt auf den Wagen. Sie ist also im herausgeschnittenen System - bestehend aus Wagen, Pulverbehälter, Elektroden, Stangen und Joch - eine innere Kraft. Da auch sonst keine Kräfte nach außen übertragen werden, treten jetzt keine Lagerreaktionen bei A und B auf, d.h. der Wagen müsste nicht fixiert werden.

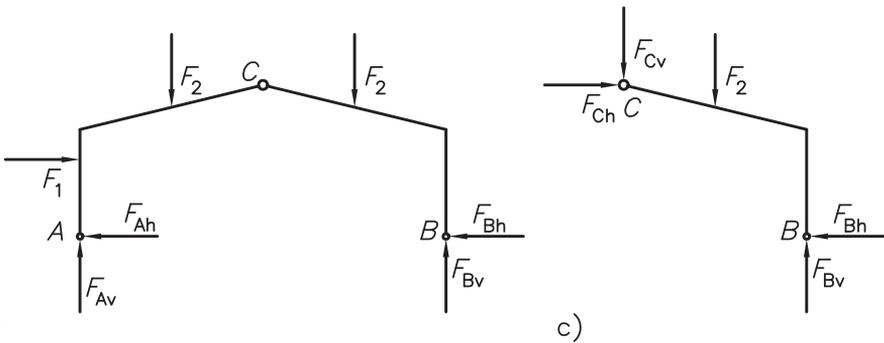
S 2.4 Bild a zeigt den tragenden Rahmen einer Halle. Er ist als Dreigelenkbogen ausgeführt mit den Fußgelenken A und B sowie dem Scheitelgelenk C. F_1 und F_2 stellen die resultierenden Kräfte aus den verteilten Wind- und Gewichtskräften dar.

Gesucht sind die Kraftkomponenten in den 3 Gelenken.



Lösung

Wir schneiden zunächst nur in den Fußgelenken frei, Bild b, tragen die Lagerreaktionen ein und setzen das Kräftesystem ins Gleichgewicht:



$$\curvearrowleft A) \quad F_{Bv} \cdot 4a - F_1 \cdot b - F_2 \cdot a - F_2 \cdot 3a = 0 \quad \rightarrow$$

$$F_{Bv} = \frac{1}{4a} (F_1 \cdot b + F_2 \cdot a + F_2 \cdot 3a) = 39,875 \text{ kN}$$

$$\uparrow \quad F_{Av} - 2 \cdot F_2 + F_{Bv} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Av} = 2 \cdot F_2 - F_{Bv} = -3,875 \text{ kN}$$

Nun schneiden wir das System zusätzlich am Scheitelgelenk C durch, Bild c, zeichnen am rechten Teil alle Kräfte ein und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\curvearrowleft C) \quad -F_{Bh} \cdot 2b + F_{Bv} \cdot 2a - F_2 \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Bh} = \frac{1}{2b} (F_{Bv} \cdot 2a - F_2 \cdot a) = 37,050 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \quad F_{Ch} - F_{Bh} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Ch} = F_{Bh} = 37,050 \text{ kN}$$

$$\uparrow \quad -F_{Cv} - F_2 + F_{Bv} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Cv} = F_{Bv} - F_2 = 21,875 \text{ kN}$$

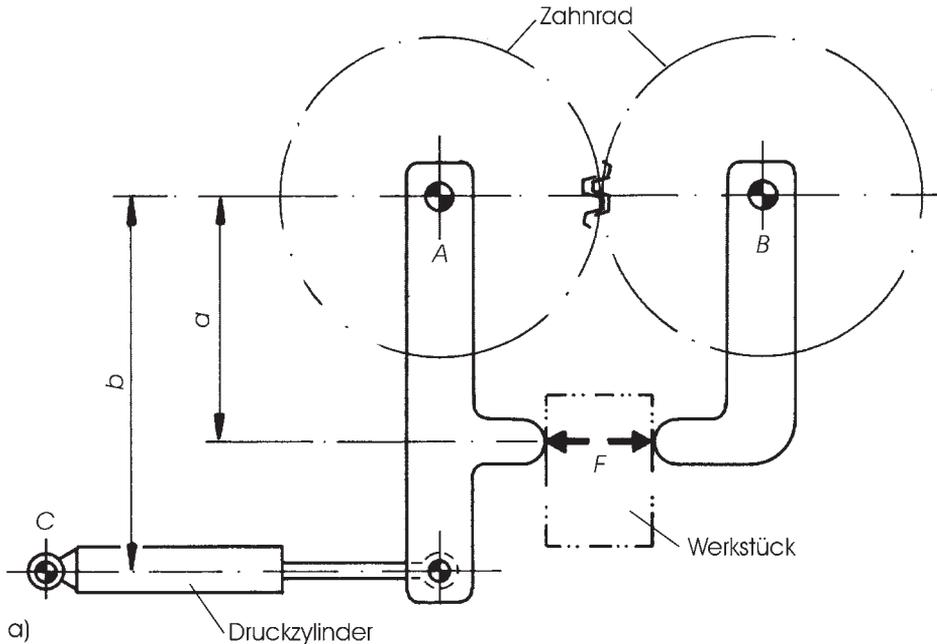
Horizontales Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem:

$$\rightarrow \quad -F_{Ah} + F_1 - F_{Bh} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Ah} = F_1 - F_{Bh} = 67,950 \text{ kN}$$

S 2.5 Die Klemmvorrichtung in Bild a besteht aus zwei Zahnrädern von gleichen Teilkreisradien, einem Druckzylinder und zwei Hebeln, die mit dem jeweiligen Zahnrad fest verbunden sind. Die Zahnräder können sich zusammen mit den Hebeln um die Punkte A und B drehen. Der Druckzylinder ist im Punkt C drehbar gelagert.

Das Werkstück soll mit der Kraft F geklemmt werden. Eigengewichts- und Reibungskräfte seien vernachlässigt.

Es ist die Kraft F_D des Druckzylinders - abhängig von F , a und b - zu bestimmen.



Lösung

In Bild b sind die Zahnräder auseinander gerückt sowie am Druckzylinder freigemacht. Dadurch entstehen zwei ebene Kräftesysteme mit den Lagerpunkten (Gelenken) A und B . An den Teilkreisradien treten zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Zahnkräfte F_Z auf. Die geneigten Wirkungslinien rühren von der Evolventenverzahnung her. c ist der lotrechte Abstand zwischen den Lagerpunkten und der Wirkungslinie.

Wir stellen nacheinander Momentengleichgewichtsbeziehungen um B und A auf:

$$\overset{\curvearrowright}{B} \quad -F_Z \cdot c + F \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad F_Z \cdot c = F \cdot a \quad (*)$$

$$\overset{\curvearrowright}{A} \quad F_D \cdot b - F \cdot a - F_Z \cdot c = 0$$

Einsetzen von (*) in die letzte Zeile und Auflösen nach F_D ergibt:

$$F_D = 2F \cdot a / b$$