Martín Díaz Rodríguez
Virgilio Obeso Fernández
Manuel Nacarro Gutiérrez
Jorge Velásquez Zapateiro

ÁLGEBRA LINEAL
aplicada a las ciencias económicas
2ª edición

UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Álgebra Lineal

aplicada a las Ciencias Económicas

2ª edición

Álgebra Lineal
aplicada a las Ciencias Económicas

2ª edición

Martín Díaz Rodríguez
Virgilio Obeso Fernández
Manuel Navarro Gutiérrez
Jorge Velásquez Zapateiro

Barranquilla
Colombia, 2014

UNIVERSIDAD DEL NORTE
Editorial

Díaz Rodríguez, Martín.

Álgebra lineal aplicada a las ciencias económicas / Martín Díaz Rodríguez, Virgilio Obeso Fernández, Manuel Navarro Gutiérrez, Jorge Velásquez Zapateiro. 2ª edición. -- Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

185 p. ; 28 cm.
Incluye referencias bibliográficas (p. 184)
ISBN 978-958-741-454-7 (PDF)

1. Álgebra lineal. I. Obeso Fernández, Virgilio. II. Navarro Gutiérrez, Manuel. III. Velásquez Zapateiro, Jorge. IV.Tít.

(512.5 D542– Ed.22) (CO-BrUNB)

www.uninorte.edu.co
Km 5 vía a Puerto Colombia, A.A. 1569,
Barranquilla (Colombia)

© Editorial Universidad del Norte, 2014
© Martín Díaz Rodríguez, Virgilio Obeso Fernández,
Manuel Navarro Gutiérrez y Jorge Velásquez Zapateiro, 2014

Primera edición, diciembre, 2009
Primera reimpresión, mayo de 2011
Segunda reimpresión, mayo de 2012
Tercera reimpresión, mayo de 2013
Segunda edición, julio de 2014

Edición
Martín Díaz Rodríguez

Coordinación editoral
Zoila Sotomayor O.

Corrección de textos
Henry Stein

Diseño de portada
Munir Kharfan de los Reyes
Joaquín Camargo Valle

Hecho en Colombia

Made in Colombia

© Reservados todos los derechos. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio reprográfico, fónico o informático así como su transmisión por cualquier medio mecánico o electrónico, fotocopias, microfilm, *offset*, mimeográfico u otros sin autorización previa y escrita de los titulares del copyright. La violación de dichos derechos puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

A mis queridos nietos, Anthony José y Emily María Díaz.

A mi querida esposa, Candelaria Mora Pérez
y a mis queridos hijos,
Leslie Johanna, Martín Emilio y Paulo César Díaz Mora.

A mi querida esposa Rosaura Márquez
y a mis queridos hijos, Jonatan y Giselle Obeso.

Para mi querida esposa, Mónica de la Hoz.

A mis queridos hijos, que son el palacio de mi vida.

Índice general

Prólogo **1**

1 Matrices **3**
- 1.1 Introducción . . . 3
- 1.2 Matrices . . . 3
  - 1.2.1 Operaciones con matrices . . . 6
- 1.3 Matrices especiales . . . 19
  - 1.3.1 Propiedades de la matriz transpuesta . . . 21
  - 1.3.2 Propiedades de la matriz inversa . . . 23
  - 1.3.3 Matrices elementales . . . 23
- 1.4 Ejercicios y problemas . . . 33
- 1.5 Actividades . . . 37

2 Determinantes **59**
- 2.1 Introducción . . . 59
- 2.2 Determinante de una matriz cuadrada . . . 59
  - 2.2.1 Propiedades de los determinantes . . . 63
- 2.3 Desarrollo del determinante por cofactores . . . 71
- 2.4 Ejercicios . . . 75
  - 2.4.1 Autoevaluación 1 . . . 76
  - 2.4.2 Autoevaluación 2 . . . 77
- 2.5 Actividades . . . 79

3 Sistemas de ecuaciones lineales **85**
- 3.1 Introducción . . . 85
- 3.2 Ecuación lineal . . . 85
- 3.3 Sistemas de ecuaciones lineales . . . 87
  - 3.3.1 Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales . . . 88
  - 3.3.2 Matrices asociadas a un sistema de ecuaciones lineales . . . 90
  - 3.3.3 Método de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan . . . 95
- 3.4 Regla de Cramer . . . 98

3.5 Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales . . . 100
3.6 Ejercicios y problemas . . . 106
3.7 Actividades . . . 111

4 Vectores en $\mathbb{R}^n$ 117
4.1 Introducción . . . 117
4.2 Espacio $\mathbb{R}^n$ . . . 117
4.3 Vectores . . . 119
4.3.1 Traslación de un vector con punto inicial en el origen . . . 120
4.3.2 Operaciones entre vectores . . . 124
4.4 Ángulo entre dos vectores . . . 125
4.4.1 Combinación e independencia lineal . . . 127
4.4.2 Autovalores y autovectores . . . 131
4.4.3 Teoremas sobre valores propios o matrices simétricas . . . 137
4.5 Ejercicios . . . 153
4.6 Actividades . . . 157

5 Sistema de desigualdades lineales 159
5.1 Introducción . . . 159
5.2 Desigualdad lineal . . . 159
5.2.1 Conjunto solución de una desigualdad lineal . . . 160
5.2.2 Método gráfico para hallar el conjunto solución de una desigualdad lineal en dos variables . . . 161
5.3 Sistemas de desigualdades lineales . . . 162
5.3.1 Conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales . . . 163
5.3.2 Punto de esquina . . . 163
5.3.3 Problema estándar de programación lineal . . . 169
5.4 Ejercicios y problemas . . . 171
5.5 Actividades . . . 175

Apéndice 179

Bibliografía 184

Prólogo

Uno de los problemas con los que se enfrenta generalmente el estudiante de Ciencias Económicas es la falta de libros que cubran plenamente o casi todos los temas estudiados durante el curso de álgebra lineal con ejemplos y ejercicios propios de dichas ciencias. Lamentablemente, la mayoría de los autores no tienen en cuenta el perfil de los estudiantes de Ciencias Económicas ni ejemplifican con problemas pertinentes a dicha carrera.

Este trabajo pretende suplir estas necesidades de los estudiantes en la medida en que les brinda un material de lectura en consonancia con los asuntos y objetivos de su interés; de esta manera pueden interrelacionarlo con materias como Investigación de Operaciones, a la vez que les sirve de fundamento para el estudio de otras materias muy importantes para la construcción de sus conocimientos y su perfil.

En este texto, los ejemplos y tareas se presentan con el lenguaje propio del estudiante de Ciencias Económicas.

Se trata, entonces, de un curso introductorio de álgebra lineal, que incluye tanto los ejemplos y ejercicios tradicionales como aquellos propios del campo de las Ciencias Económicas, que le facilitan al estudiante apropiarse de los conocimientos y construir las bases para el estudio de otras teorías en general.

Los teoremas cuyas demostraciones no se desarrollan en el capítulo correspondiente al tema en mención pueden encontrarse en el apéndice, o en los textos relacionados en la bibliografía.

En este texto, el conjunto subyacente para el desarrollo de los conceptos es siempre el conjunto de los números reales; en el contexto de las matrices y los vectores, nos referimos a los números reales como escalares.

Además, promovemos lo concerniente a la elaboración de trabajos individuales y en grupos.

Los autores

Capítulo 1

Matrices

1.1 Introducción

El concepto de *matriz* es básico en muchos cursos de matemática, sea aplicada o no; uno de sus usos está relacionado con la representación matricial de los sistemas de ecuaciones lineales y su empleo en el lenguaje de programación, debido a que facilita la automatización de métodos para resolver estos sistemas y obtener una solución rápida (si existe) de un problema determinado.

En el campo económico, una matriz puede representar, por ejemplo, la producción de determinados artículos fabricados por un determinado número de máquinas o el costo de producir cierta cantidad de artículos en un número determinado de máquinas; por mencionar solo dos ejemplos. Por estas y otras razones, que serán evidentes más adelante, en este texto son de especial interés el concepto de matriz y algunas de sus propiedades.

1.2 Matrices

Definición 1.2.1. *Una* matriz *es un arreglo rectangular de elementos distribuidos por filas y columnas. Sus elementos pertenecen a un conjunto con alguna estructura algebraica.*

En este texto, los elementos son siempre números reales; al conjunto de los números reales lo denotamos $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.1

Estos son algunos ejemplos de matrices:

a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \textit{columna}\ 1 & \textit{columna}\ 2 & \textit{columna}\ 3 & \textit{columna}\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{fila}\ 1 \\ \textit{fila}\ 2 \\ \textit{fila}\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -2 & 10 \end{array}\right), \end{array}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 78 & -35 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 41 \\ 30 \\ 23 \end{pmatrix}$

Representamos las matrices con letras mayúsculas, y sus elementos, cuando no estén dados en forma explícita, con minúsculas.

Definición 1.2.2. *Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que es de orden (o tamaño) $m \times n$. Si $m = n$, se dice que la matriz es cuadrada de orden $m \times m$ (o $n \times n$) o, simplemente, de orden m (o n).*

Ejemplo 1.2.2

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces A es una matriz de orden 2×3, ya que tiene dos filas y tres columnas.
Si una matriz tiene una sola fila, la llamamos *matriz fila*; en forma análoga, si tiene una sola columna, la llamamos *matriz columna*.

En forma general, una matriz que tenga m filas y n columnas podemos escribirla explícitamente así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Si una matriz de orden $m \times n$ tiene todos sus elementos iguales a cero, se le llama"matriz cero de orden $m \times n$"; por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es la matriz cero de orden } 2 \times 3$$

Para describir la posición de los elementos en una matriz es usual codificar cada elemento con una nomenclatura coherente; así, por ejemplo, en la matriz indicada en (1.1), el primer subíndice de las aes señala la fila, y el segundo subíndice, la columna a la cual pertenece ese elemento. Por ejemplo, a_{12} es el elemento de la matriz A ubicado en la fila 1, columna 2, y en general, a_{ij} es elemento de la matriz A ubicado en la fila i, columna j.

La matriz (1.1) podemos escribirla en forma abreviada como $A = \left(\ a_{ij} \ \right) \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$; $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, o también, $A = \left(\ a_{ij} \ \right)_{m \times n}$, donde m es el número de filas y n el número de columnas.

En el momento en que se introduce un nuevo objeto en matemáticas debemos precisar cuándo dos de tales objetos son iguales; por ejemplo, en el conjunto de los números reales, $\frac{16}{8}$ y 2 son "iguales" aunque no estén representados de la misma manera.

En el caso de la igualdad de matrices, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Que sean del mismo tamaño.

2. Que los elementos que ocupan la misma posición (elementos correspondientes) en las dos matrices sean iguales; por ejemplo, que el elemento que ocupa la posición (1,1) en la matriz A sea igual al elemento que ocupa la posición (1,1) en la matriz B, y así sucesivamente; es decir, que el elemento que ocupa la posición (i, j) en la matriz A sea igual al elemento que ocupa la posición (i, j) en la matriz B para todo $i = 1, ..., m$ y para todo $j = 1, ..., n$.

Definición 1.2.3. ***Igualdad de matrices***
Sean $A = \left(\ a_{ij} \ \right)_{m \times n}$ *y* $B = \left(\ b_{ij} \ \right)_{m \times n}$ *matrices de orden* $m \times n$*; se dice que las matrices A y B son iguales si y solo si sus elementos correspondientes son iguales.*

En notación: $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, m$ y para todo $j = 1, 2, \cdots, n$.

Ejemplo 1.2.3

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 9 \\ 8 & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

si A = B, entonces $b_{11} = 1, \ a_{12} = 9, \ a_{21} = 8, \ b_{22} = 5, \ b_{31} = 0$ *y* $b_{32} = 7$.
A continuación definiremos varias operaciones cuyos resultados serán nuevas matrices obtenidas a partir de matrices dadas, y posteriormente presentaremos una serie de ejemplos de aplicación en problemas concretos.

1.2.1 Operaciones con matrices

Definición 1.2.4. ***Suma de matrices***

$$\textit{Sean} \quad A = \left(\ a_{ij} \ \right)_{m\times n} \quad y \quad B = \left(\ b_{ij} \ \right)_{m\times n} \quad \textit{matrices de orden} \quad m \times n,$$

se define la matriz suma de A y B (denotada A + B) así:

$$A + B = \left(\ a_{ij} + b_{ij} \ \right)_{m\times n} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

La definición anterior dice que para hallar la suma de las matrices A y B ambas deben ser del mismo orden (en este caso son de orden $m \times n$) y que la matriz suma es una nueva matriz que tiene como elementos la suma de los elementos correspondientes de A y B; esta matriz suma es una matriz que tiene el mismo tamaño de las matrices sumandos, es decir, es una matriz de orden $m \times n$.

Ejemplo 1.2.4

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 9 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Las siguientes matrices no pueden ser sumadas. ¿Por qué?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 45 \\ 3 & 2 & 35 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 7 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Definición 1.2.5. ***Multiplicación de un escalar por una matriz***
Sean $A = \left(\ a_{ij} \ \right)_{m\times n}$ *y* $k \in \mathbb{R}$*, se define la multiplicación del escalar k por la matriz A (denotada kA) así:*

$$kA = \left(\ ka_{ij} \ \right)_{m\times n} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

En la definición anterior mostramos que al multiplicar un escalar k por una matriz A se forma una nueva matriz del mismo tamaño que A y que sus elementos se obtienen multiplicando cada uno de ellos por k.

Ejemplo 1.2.5

$$Si \quad k = 3 \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \text{ entonces}$$

$$kA = 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3(1) & 3(4) & 3(3) \\ 3(5) & 3(2) & 3(8) \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 \\ 15 & 6 & 24 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Presentaremos a continuación algunas propiedades de la adición de matrices.

Propiedades de la adición

Teorema 1.2.1. *Sean A, B y C matrices de orden m×n y k un número real, entonces:*

i) $A+0_{m\times n}=A$, *donde* $0_{m\times n}$ *es la matriz cero de orden* $m\times n$

ii) $0A=0_{m\times n}$

iii) $A+B=B+A$

iv) $A+(B+C)=(A+B)+C$

v) $k(A+B)=kA+kB$

vi) $\exists$ *D tal que* $B+D=A$, *donde D es una matriz de orden* $m\times n$.

Observación 1.2.1

La parte i) del teorema muestra que la suma de cualquier matriz A con la matriz 0 del mismo orden de A da como resultado nuevamente la matriz A. Quiere decir esto que la matriz cero es el módulo para la adición de matrices.

La parte ii) muestra que al multiplicar el número real 0 con cualquier matriz A, el resultado es la matriz cero de orden igual al de la matriz A.

La parte iii) muestra que la adición de matrices es conmutativa.

La parte iv) muestra que la adición de matrices es asociativa.

La parte v) muestra la propiedad distributiva de un escalar respecto de la suma de matrices.

La parte vi) enuncia la sustracción entre matrices del mismo orden, y se denota, en vez de D, por A-B.

Ejemplo 1.2.6

Si

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 9\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

determinemos los elementos de la matriz C, de modo que 3A+5C=4B.

Solución

Debemos hallar una matriz $C = (c_{ij})_{3\times 2}$ tal que

$$3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

deducimos que

$$\begin{pmatrix} 9+5c_{11} & 6+5c_{12} \\ 15+5c_{21} & 12+5c_{22} \\ 6+5c_{31} & 3+5c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 16 \\ 24 & 36 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} 9+5c_{11} &= 28 \\ 6+5c_{12} &= 16 \\ 15+5c_{21} &= 24 \\ 12+5c_{22} &= 36 \\ 6+5c_{31} &= 0 \\ 3+5c_{32} &= \text{-12} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} c_{11} &= 19/5 \\ c_{12} &= 2 \\ c_{21} &= 9/5 \\ c_{22} &= 24/5 \\ c_{31} &= \text{-6/5} \\ c_{32} &= \text{-3} \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas

Ejercicio. Usando matrices no cuadradas verifique cada una de las propiedades del teorema 1.2.1.

Problema de aplicación 1.2.1

Hoy, antes de comenzar las actividades académicas en la Universidad del Norte, se han recargado las cuatro máquinas surtidoras de gaseosa en lata; la máquina 1 tiene una recarga de 100, 50, 60 y 72 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente; la máquina 2, de 150, 200, 300 y 75 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente; la máquina 3, de 80, 50, 45 y 95 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente, y la de la máquina 4 es de 30, 70, 95 y 15 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente.

1. Si el día anterior se agotaron todas las existencias, construya una matriz que incluya la información de recargas de las cuatro máquinas (matriz de recarga) antes de comenzar las actividades en el día de hoy.

2. Si las ventas estimadas al finalizar el día son:
   Para la máquina 1: 80, 30, 50 y 22 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente; para la máquina 2: 140, 180, 250 y 70 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente; para la máquina 3: 80, 40, 35 y 85 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente, y para la máquina 4: 30, 50, 60 y 10 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente.

   a) Construya una matriz que incluya la información de las ventas estimadas (matriz de ventas) de gaseosas en lata para las cuatro máquinas en el día de hoy.

   b) Construya una matriz que incluya la información del inventario (matriz de inventario) para el día siguiente si cada máquina se recarga con 90, 50, 40 y 20 latas de Coca-Cola, cola, naranja y uva, respectivamente.

Problema de aplicación 1.2.2
En las mismas máquinas, la cafetería de la Universidad del Norte vende bolsas de agua pequeñas, medianas y grandes, que compra a dos embotelladoras distintas. El volumen en centímetros cúbicos de las bolsas pequeñas, medianas y grandes de la embotelladora 1 es de 300, 400 y 800, respectivamente; el de la embotelladora 2 es 150, 250 y 500, respectivamente. Suponga que los precios por bolsas de agua de la embotelladora 1 son \$150, \$200 y \$400, respectivamente, y los de la embotelladora 2 son \$50, \$60 y \$100, respectivamente.

1. Construya la matriz de los productos comprados por la cafetería a las embotelladoras y la matriz de precios de compra por unidad.

2. Si la embotelladora 1 produce 4000, 5000 y 3000 bolsas de agua pequeñas, medianas y grandes, respectivamente, y la embotelladora 2 produce 4500, 6000 y 8000, respectivamente, determine la matriz de producción de las embotelladoras.

Problema de aplicación 1.2.3
Si en el problema de aplicación 1 cada máquina solo contiene un tipo de bebida gaseosa; por ejemplo, la máquina 1 tiene 300 latas de Coca-Cola; la máquina 2 tiene 250 latas de cola; la máquina 3 tiene 280 latas de naranjada y la máquina 4 tiene 100 latas de uva.

1. Construya la matriz de inventario de la cafetería. Si la Coca-Cola en lata cuesta \$600, la de cola \$500, la naranjada \$450 y la de uva \$400, construya la matiz de precio de ventas por unidad de cada producto.

2. Si el precio de venta de cada producto se incrementa en un 18 %, determine la matriz de precio de venta de la cafetería

3. Determine la matriz de ingreso total si se agota cada uno de los productos.

Multiplicación de matrices
Presentaremos inicialmente la definición de producto entre una matriz fila y una matriz columna, cada una de ellas con igual número de elementos; luego, la definición de multiplicación de matrices y algunas de sus propiedades.

Definición 1.2.6. ***Producto entre una matriz fila y una matriz columna***

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1\times n}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$ *matrices de orden* $1\times n$ *y* $n\times$ *1, respectivamente; se define el producto de la matriz fila A con la matriz columna B (denotada por AB) así:*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \tag{1.2}$$

La expresión (1.2) podemos escribirla abreviadamente así:

$$AB = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} \tag{1.3}$$

Por ejemplo, si en (1.3) $n = 1$, tenemos el primer elemento de la suma en (1.2), o sea, $a_{11}b_{11}$; si n=2, tenemos los dos primeros términos de la suma en (1.2), o sea, $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$; si $n = 3$, tenemos los tres primeros términos de la suma en (1.2), o sea, $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, y así sucesivamente, es decir, en la expresión $a_{1k}b_{k1}$, de la ecuación (1.3), reemplacemos k por 1, 2,. . ., n y luego sumamos todos esos productos.

Ejemplo 1.2.7

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\cdot 1 + 3\cdot 4 + 2\cdot 7 = 4 + 12 + 14 = 30$$

Observemos que el producto entre una matriz fila y una matriz columna es un número real.