



Pierre Basieux

Spektrum  
AKADEMISCHER VERLAG

Sachbuch

5., überarbeitete Auflage

# Abenteuer Mathematik

**Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion**

## Abenteuer Mathematik

Pierre Basieux

# Abenteuer Mathematik

Brücken zwischen Wirklichkeit  
und Fiktion

5., überarbeitete Auflage

**Spektrum**  
AKADEMISCHER VERLAG

---

**Autor**

Dr. Pierre Basicux

E-Mail: dr.basicux@aon.at

Die bisherigen Auflagen sind bei Rowohlt in der Taschenbuchreihe rororo science erschienen.

**Wichtiger Hinweis für den Benutzer**

Der Verlag und der Autor haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media  
[springer.de](http://springer.de)

5. Auflage 2011

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2011

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15      5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Anja Groth

Herstellung und Satz: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India

Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg

Titelfotografie: matreshka@kosoff

Die Abbildungen auf den Seiten 197 und 198 stammen aus dem Buch „Sternstunden der Mathematik“ von K. Devlin, Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1994.

ISBN 978-3-8274-2884-4

# Inhalt

<b>Prolog</b> .....	VII
<b>0 Menschenverstand, Logik und Beweis</b> .....	1
Ein paar Zutaten: Aussagen .....	2
Spezifikationen namens Quantoren .....	9
Ein paar Rezepte: Beweise .....	13
Sätze als Implikationen: Beweisspielarten .....	16
Wie man sich hoffnungslos verbeißt .....	21
Endlicher Beweis unendlich vieler Aussagen .....	25
<b>1 Die Faszination, prim zu sein</b> .....	33
Damit begann die Bescherung .....	33
Primzahlen: die erste unendliche Geschichte .....	35
Das Vermächtnis des professionellen Amateurs .....	43
Fermatisten, Goldbachvermuter, Primzwillingsforscher ..	50
Großjagd auf Monster .....	52
Faktorisieren: beliebig viele, beliebig harte Nüsse .....	56
Die Kryptologie und ihre Falltüren .....	57
<b>2 Brücken ins Unendliche</b> .....	63
Die einfachste, natürliche Unendlichkeit .....	65
Das Unendliche zwischen Genie und Wahn .....	71
Kritiker und Bewunderer .....	74
Die Beweise .....	75
Die Kontinuumhypothese .....	87

	Ist logische Stimmigkeit alles? . . . . .	89
	Gibt es verschiedene Kategorien von Mathematik? . . .	91
	Unendlichkeit im Kleinen . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Das Matrjoschka-Prinzip . . . . .</b>	<b>99</b>
	Der letzte Akt . . . . .	99
	Die Anfänge des spielerischen Erforschens . . . . .	103
	Widrige Wechselfälle oder <i>Mister Murphy was here</i> . . .	106
	Das Vermächtnis des Duellanten . . . . .	113
	Die Gestalt der Lösungsmenge einer Gleichung . . . . .	119
	Galois' Rezept – das Matrjoschka-Prinzip . . . . .	122
	Blick durch das aufgestoßene Tor . . . . .	125
	Wie die Geometrien unter einen Hut kamen . . . . .	126
	Der Marathonbeweis und das Monster . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Zufall, Glück und Chaos . . . . .</b>	<b>139</b>
	Die Entstehungsphase der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	140
	Frühe Anwendungen in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften . . . . .	144
	Die Axiomatisierung: Beginn der modernen Wahrscheinlichkeit . . . . .	146
	Die Gewissheit des Zufalls oder Das Gedächtnis der Roulettekugel . . . . .	151
	Fehlender Ausgleich, Unempfindlichkeit, Impotenz . . .	153
	Fortuna kontra Nemesis oder Die fundamentale Un- gerechtigkeit der Natur . . . . .	154
	Determinismus, Berechenbarkeit, Vorhersagbarkeit, Komplexität . . . . .	158
	Der Zufall im Roulette und seine – <i>partielle</i> – Zähmung . . . . .	166
	Wahrscheinlich, glaubwürdig, plausibel: Kategorien der Ungewissheit . . . . .	170
	Außerirdische Intelligenzen? . . . . .	178
	Grade der Zufälligkeit: feiner als Wahrscheinlichkeiten . . . . .	184

<b>5</b>	<b>Basar des Bizarren</b> .....	189
	Die Seele des Gebildes .....	190
	Eine kleine Vorgeschichte .....	199
	Mannigfaltigkeiten und die Poincaré-Vermutung .....	204
	Das Vierfarbenproblem .....	214
<b>6</b>	<b>Ja, mach nur einen Plan</b> ... ..	227
	Beispielbetrachtungen .....	229
	Weitere Beispiele – ganzzahlige Optimierung .....	253
	Komplexität – algorithmisch gesehen .....	259
	Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung .....	263
<b>7</b>	<b>Das Gefangenendilemma</b> .....	267
	Bei-Spiele .....	269
	Gleichgewicht – der rote Faden .....	276
	Evolutionäre Spieltheorie und Kooperation .....	294
	Angewandte Spieltheorie: illusorischer Nutzen? .....	311
	<b>Epilog</b> .....	317
	<b>Anmerkungen</b> .....	339
	<b>Literatur</b> .....	363
	<b>Index</b> .....	373

# Prolog

## Sciencefiction und Verstehen

Ohne Vorkenntnisse vorauszusetzen, möchte ich ein paar zum Teil ungewohnte Thesen aufstellen:

- Erkenntnis ist nicht begrenzt – und dennoch hat sie Schranken.
- Mathematik ist ein *Sciencefiction*-Spiel mit virtuellen Realitäten.
- Unsinniges, Paradoxes und Unmögliches zu denken ist alltäglich.
- Verstehen ist ein Wunschtraum – oder nichts weiter als Gewöhnung.

In diesem Buch werde ich versuchen, diese (zum Teil streitbaren) Aussagen unter einen Hut zu bringen.

Wir sind erkennende Wesen: eines der größten Wunder des Universums und unseres Daseins. Diese Erkenntnis vermag uns in Staunen zu versetzen.

Alle fünf Jahre verdoppelt sich das Volumen unseres Wissens. Es gleicht einem riesigen Bergwerk mit immer tiefer, feiner und medusenähnlich sich ausbreitenden Schächten. Einerseits haben Erkenntnisse und Gesetzmäßigkeiten nur innerhalb bestimmter Rahmenbedingungen Gültigkeit, andererseits stellen die Schachtwände selbst Begrenzungen dar. Die meisten Wände sind provisorischer Natur, die irgendwann durch neue Erkennt-



nisse eingerissen werden. Andere dagegen sind tragende Mauern und gleichermaßen grundlegende Schranken, die dem Erkenntnisgebäude erst einen festen Halt geben oder welche, außerhalb derer die bekannten Gesetzmäßigkeiten ungültig sind. Auf diese grundlegenden Begrenzungen werden wir unser Augenmerk ebenfalls richten.

Als Modell für ein beliebiges Wissensfeld eignen sich einfache mathematische Gedankenbeispiele ausgezeichnet. (Sind Sie humorvoll und meinen, Mathematik sei trocken und humorlos? Dann versuchen Sie sich vorzustellen, jede mathematische Aussage sei ein Witz und ihr Beweis die Pointe!) Das sollte jedoch kein Hinderungsgrund sein, gelegentlich auch einen Blick über den mathematischen Zaun zu riskieren.

Die Wissenschaft äußert ständig Vermutungen, die sich im Nachhinein nicht selten als falsch herausstellen. Unmögliches zu denken ist alltäglich. Nehmen Sie den einfachen Satz: »Der jetzige König von Bayern spielt hervorragend Saxophon.« Aus der Tatsache, dass dieser Satz Sinn hat, folgt nicht, dass es ein Wesen gibt, für das er gilt.

Ein kniffligeres Beispiel: ein Barbier, der all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren – sofern sie keinen Bart haben. Dies ist ja gerade die Aufgabe eines Barbiers. Dann muss es wohl eine Antwort geben auf die einfache Frage: Rasiert sich der Barbier selbst? Falls die Antwort ja lautet (er rasiert sich selbst), ist nur die Schlussfolgerung möglich, dass er sich nicht rasiert (denn er rasiert ja nur die, die sich nicht selbst rasieren). Und falls wir die Frage verneinen (er rasiert sich nicht selbst), folgt zwingend, dass er sich rasiert (da er ja all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren). Eine Unmöglichkeit in der Gestalt einer Paradoxie, die den Namen »Russell'sche Antinomie« trägt.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Bertrand Russell (1872 bis 1970), britischer Logiker und Philosoph. Hier handelt es sich um eine Illustration der Russellschen Antinomie aus der (naiven) *Mengenlehre*, wenn die »Menge aller Mengen« gebildet wird. Auf die Frage, ob diese »Menge aller Mengen« sich selbst enthält oder nicht, gelangt man unab-

Die Vorstellung, es gebe einen allmächtigen Gott, ist weit verbreitet. Im Rahmen der Alltagslogik kann dieser Gott jedoch nicht allmächtig sein: Er ist zum Beispiel nicht imstande, einen Stein zu erschaffen, den er nicht zu heben vermag. (Das einzige »Wesen«, das bei angenommener Gültigkeit der Logik zwei sich widersprechende Eigenschaften besitzen kann, ist, mathematisch gesprochen, die so genannte *leere Menge* – die Menge, die kein Element enthält; deren Existenz ist gesichert und eindeutig; zudem hat die leere Menge eine wahrhaft göttliche Eigenschaft: sie ist nämlich Teilmenge einer *jeden* Menge.)

Es sei dahingestellt, ob die Vorstellung eines omnipotenten Gottes paradox ist – oder die Anwendung unserer Logik auf eine solche Vorstellung absurd. Verschiedene Erkenntnisweisen, wissenschaftliche und religiöse zum Beispiel, setzen verschiedene Regeln voraus, die dann zu verschiedenen, oft einander widersprechenden »Wahrheiten« führen. Niemand vermag jedoch schlüssig zu sagen, welche Regeln *allgemeingültiger* sind – und in welchem Sinne. Zweifellos ist dies auch eine soziokulturelle Frage.

Paradoxes mischt sich auch unter Nutzen und Sinn im täglichen Leben. So lautet das klassische »Paradoxon von Marschak« in seiner Kurzform: »Leben ist schön, sterben ist nicht schön, aber das riskante Bergsteigen ist schöner als bloß leben.« Wie dem auch sei: Paradoxien und Absurditäten sind untrennbar mit dem menschlichen Geist verbunden – auch innerhalb einer bestimmten Erkenntnisweise mit ihren ganz spezifischen Regeln.

Vermeiden wir die Paradoxien, und lassen wir die letzten Rätsel letzte Rätsel sein. Schon viel bescheidenere Betrachtungen haben ihre Tücken. Bei unseren Ausflügen und Spielpartien werden wir

---

hängig von der Antwort zu einem Widerspruch. Um solche Formulierungen und die aus ihnen ableitbaren Widersprüche zu vermeiden, hat man die zugrunde liegenden Begriffe und Operationen in einem System strenger Definitionen (»Axiomensystem«) präzisiert.

es mit verschiedenen Arten von Unmöglichem und Unvorstellbarem zu tun haben.

Da ist zum Beispiel die Behauptung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt – obwohl wir nur endlich viele kennen (können), weil es keinen einfachen, reinen »Primzahlgenerator« gibt. Worin besteht eigentlich die Faszination der verschiedenen Vermutungen aus der elementaren Zahlentheorie? Welche Horizonterweiterung bedeutet für uns der Beweis des »Letzten Fermat'schen Satzes«? Was ist der *tiefer* Grund dafür, dass sich manche Gleichungen auflösen lassen, andere nicht? Oder dass bestimmte Prozesse, wie das Tropfen eines Wasserhahns oder das Torkeln eines Himmelstrabanten, prinzipiell nicht berechenbar sind?

Wenn sich Mathematiker mit Zufall, Chaos und Glück befassen und die Frage nach der Vorhersagbarkeit stellen, dürfen wir uns auf ungewohnte Antworten gefasst machen. Das gilt in noch stärkerem Maße für Modebegriffe wie »künstliche Intelligenz« und »künstliches Leben«: Wie kommt es, dass die Erkenntnisse des berühmten John von Neumann über selbst reproduzierende Automaten an relevante Eigenschaften des Lebens erinnern?

Zahllose Dinge und Beziehungen, die unvorstellbar sind und dennoch existieren, bevölkern unseren Geist. Wie zeigen Mathematiker, dass es nicht mehr Brüche insgesamt (das heißt auf der unendlichen Zahlengeraden) gibt als in dem kleinen Intervall zwischen 0 und 1? Daran kann man sich notfalls noch gewöhnen – wie auch an den »*n*-dimensionalen reellen Zahlenraum«. Gänzlich unvorstellbar sind aber *unendlich viele verschiedene Stufen des Unendlichen*. Was für ein Ideenhimmel! Spätestens hier würden Asterix und Obelix sagen: Die spinnen, die Mathematiker.

Für die *reine* Mathematik scheint die überspitzte Charakterisierung von Bertrand Russell zuzutreffen: »Mathematik ist die Wissenschaft, bei der man nicht weiß, wovon man redet, noch ob das, was man sagt, den Tatsachen entspricht.« Mathematik, eine kafkaeske Welt?

Für viele Zeitgenossen ist die Mathematik ohnehin ein Irrenhaus, und in die Abteilung für unheilbare Fälle würden sie sicher die »Topologen« einweisen. Dabei ist die Topologie eine höchst vergnügliche *Gummigeometrie* – und hat mit der Gummizelle gar nichts zu tun; sie ist nur etwas ungewohnt. Warum ist ein beliebig deformierbares Gummibärchen einer Kugel gleich? Knoten, Ringsysteme, Oktopusse, Sphären mit Henkeln, Tori mit Löchern, Klumpen vom Geschlecht 17, Mannigfaltigkeiten, das berühmte Möbius'sche Band, das Einfärben von Landkarten und der Scheitel einer Igelfrisur sind einige Studienobjekte der Topologie. Als Studenten ersannen wir ein paar witzige Definitionen für diesen exotisch anmutenden Zweig der Mathematik, zum Beispiel: Die Topologie ist die Wissenschaft, in der eine Kaffeetasse und eine Kloschüssel äquivalent sind.

Zum Unvorstellbaren gehört auch das a priori Unerklärliche. Nehmen wir das Schachspiel: Wie können Mathematiker argumentieren, dass es eine optimale Strategie gibt, obwohl sie diese mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit niemals finden werden? Wie können sie andererseits ausgerechnet die *optimale* Lösung eines kombinatorischen Problems konkret auffinden, obwohl es völlig ausgeschlossen ist, die astronomisch hohe Anzahl *zulässiger* Lösungen jemals durchmustern zu können? Von kombinatorischen Planungs- und Zuordnungsaufgaben wie dem Rundreiseproblem ist hier die Rede, das sich kaum vom Problem der Gestaltung eines optimalen Liniennetzes für eine Flugesellschaft unterscheidet – oder eines Telefonnetzes, das täglich Millionen von Anrufen bewerkstelligen muss.

Auch zwischenmenschliche Beziehungen sind der Mathematik nicht fremd. Das berühmte Gefangenendilemma ist der Ausgangspunkt eines wichtigen Teils der Spieltheorie und des Begriffs der Kooperation – das Komplement zum Wettbewerb in Gestalt des egoistischen Einzelkämpfertums.

Daneben gibt es auch Wahrheiten, die mathematisch weder bewiesen noch widerlegt werden können – auch in aller Zukunft

nicht (Gödels Unvollständigkeitssatz). Und prinzipielle logische Beschränkungen, die unseren demokratischen Handlungsintentionen einen Riegel vorschieben (Arrows Unmöglichkeitssatz).

Wie können wir zwischen Möglichem und Unmöglichem, zwischen Sein und Nichtsein von Fiktionen unterscheiden? Wie vor allem können wir das Existente, aber Unvorstellbare in unsere Erkenntnis integrieren? Und, last but not least, welche Folgen ergeben sich daraus für unsere philosophische Selbstreflexion?

## Das Spiel und seine Elemente

Nehmen wir mal an, wir spielten ein Spiel, Scrabble zum Beispiel, bei dem es darauf ankommt, gewürfelte Anfangsbuchstaben zu Wörtern mit Bedeutung zu ergänzen. Dieses Spiel wandeln wir nun etwas ab: Statt Anfangsbuchstaben nehmen wir gedachte, durch minimale Eigenschaften festgelegte – wir sagen auch: »wohldefinierte« – Objekte und versuchen mit Hilfe von Gedankenexperimenten, Beziehungen zwischen diesen Objekten zu erraten – und zu beweisen. Diesen Beziehungen oder Relationen sollen – wie den Wörtern beim Scrabble – bestimmte Bedeutungen zukommen. Sinn und Zweck dieses Spiels bestehen darin, mehr über die gedachten Objekte zu erfahren: über ihre *Beschaffenheit*, ihre innere *Struktur*, ihre *Beziehungen* zu anderen Objekten, ja zuerst sogar über ihre *Existenz*.

Unser modifiziertes Scrabble-Spiel stellt bereits ein Modell dar, wie Mathematik betrieben wird. Es gibt offenbar unendlich viele Objekte, die denkbar sind – eine Vorstellung, die an sich schon unmöglich erscheint. Sie können sich eine noch so große Anzahl gedachter, wohldefinierter Objekte vorstellen – es gibt immer noch eine größere. Allein die Anzahl möglicher Zugfolgen im Schachspiel ist viele Milliarden Milliarden milliardenmal größer als die Anzahl der Elementarteilchen im Universum. Mathematik gleicht einem unendlichen Spiel.

Mathematisches Denken wurzelt zweifellos in der konkreten Wirklichkeit, wenn auch die Genealogie manchmal schwer zu erkennen ist. John von Neumann, von dem noch ausführlich die Rede sein wird, drückt dies so aus<sup>2</sup>:

»Ich halte es für eine relativ gute Annäherung an die Wahrheit – die viel zu kompliziert ist, um etwas anderes als Näherungen zu erlauben –, dass die mathematischen Ideen ihren Ursprung in der Empirie haben ... Hat man sie aber einmal gewonnen, beginnt die Sache ein eigenes Leben zu führen und wird eher als kreativ betrachtet, ganz von ästhetischen Motivationen beherrscht, als ... mit einer empirischen Wissenschaft verglichen.«

Mathematik beschäftigt sich mit nach gewissen Regeln erdachten Objekten, mit Fiktionen also, und sie ist damit wohl die älteste *Sciencefiction* der Menschheit, das älteste Spiel mit vorwiegend virtuellen, in unseren Köpfen existierenden Realitäten.<sup>3</sup> James Maxwell, der Schöpfer der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes, meinte, »wir können die tiefsten Lehren der Wissenschaft in Spielen versinnbildlicht finden«. Und der bekannte Essay »Homo Ludens« des niederländischen Kulturhistorikers Johan Huizinga führt aus, wie tief die menschliche Kultur ganz allgemein im Spiel verwurzelt ist.

Woraus bestehen nun die Elemente eines Spiels? Im Wesentlichen sind es seine *Spielregeln*, dann der *Spielraum*, der mit Handlungen und Strategien der Akteure belebt wird. Und zu jedem Spiel gehören auch ein *Einsatz* und eine *Auszahlung*.

Zunächst zu den Spielregeln. In unserem Spiel sind sie logischer, deduktiver Natur. Wie wir noch sehen werden, sind die

---

<sup>2</sup> John von Neumann, »The Mathematician«, Collected Works I, Oxford 1961.

<sup>3</sup> Was in unserer heutigen Computerkultur als *virtuelle Realität* bezeichnet wird, kann in mancherlei Hinsicht als eine Erweiterung des traditionellen Spiels mit Fiktionen aufgefasst werden.

Regeln nicht das eigentlich Wichtige. Sie bilden die Hygiene des Spiels Mathematik, wie Grammatik und Syntax für die Hygiene der Sprache sorgen. Zu jedem Spiel gehört die Freiheit, sich dafür oder dagegen zu entscheiden. Wollen wir ein paar Partien spielen, dann müssen wir uns allerdings seinen Regeln fügen. (Es sind die Regeln des Menschenverstandes, der Logik und des Beweizens, um die es im nächsten Kapitel gehen wird.)

## Spielräume und Strategien

Die Regeln legen den Spielablauf nicht restlos fest, sondern lassen gewisse Möglichkeiten offen. Diese Unbestimmtheit ist der Spielraum, der zum Wesen des Spiels gehört und es vor Erstarrung bewahrt. In unserem Spiel mit Fiktionen kommt kreativen Gedanken eine große Bedeutung zu: Sie bewirken die Handlungen und beleben den Spielraum. Nicht die Regeln sind das eigentlich Wichtige, sondern die Spielräume. Das gilt für jedes Spiel: beim Scrabble, in der Mathematik, in der Medizin, in Wirtschaft und Politik, im Leben. Definitionen und Gesetze sind zwar notwendig, stecken aber nur die formalen Raumgrenzen ab, in dem sich jeder frei bewegen darf, und diese Freiheit ist allein beschränkt durch die Kreativität der Akteure. Wirtschaft und Politik bieten ungeheure Spielräume für Visionen, Konzepte, Innovationen, Problemlösungen ... und deren Realisierung. Nur bornierte Bürokraten reduzieren den Spielraum auf die Regeln.

Gefragt nach dem Verbleib eines seiner Mitarbeiter, soll der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß geantwortet haben: »Der ist unter die Dichter gegangen, für die Mathematik hatte er wohl nicht genug Phantasie.«

Die Aktionen zur Belebung eines Spielraums führen zum zentralen Begriff der *Strategie*. Eine Strategie ist ein Plan oder Programm für den Spieler – eine Abfolge spezieller Aktionen und Entscheidungen –, mit dem Ziel, einen Gegner zu überlisten, der das gleiche mit ihm versucht. Nach Austeilen der ersten beiden

Karten (und der ersten Karte für die Bank) muss der Spieler beim »Black Jack« (der Spielbankversion von »17 und 4«; ich komme später darauf zurück) entscheiden, ob er noch eine weitere Karte haben möchte (um möglichst nahe an die Punktezahl 21 zu kommen – er darf sie aber nicht überschreiten), ob er seinen Einsatz verdoppelt (falls die ersten beiden Karten eine Punktezahl zwischen 9 und 11 ergeben) oder ob er seine beiden Karten, falls sie die gleiche Punktezahl haben, splitten will – wobei er dann noch einen gleich hohen Einsatz auf das geteilte Blatt zu leisten hat. Das Pokerspiel erfordert noch viel differenziertere Strategien, die letztlich die Absichten der Gegner durchkreuzen sollen.

Die Strategien im unerschöpflichen Spiel mit mathematischen Fiktionen werden aus kreativen Gedanken geboren. Dabei übersteigen bereits die Eröffnungsmöglichkeiten für so manchen Beweis diejenigen einer Schachpartie beträchtlich. Bevor allerdings die Gedanken ihre Kreativität wirksam entfalten können, ist viel Übung erforderlich.

## **Einsatz und Auszahlung**

Einsatz und Auszahlung sind weitere wichtige Spielelemente. Sie müssen nicht ausbarer Münze bestehen. Beim Kampf um eine ersehnte Stellung im »Spielfeld«, das wir Arbeitsmarkt nennen, wird der Einsatz in Form von Wissen, von Fertigkeiten und Arbeitskraft geleistet. Und der Preis, den jeder Spieler am Ende einer Partie erhält oder zahlt, kann, außer Geldgewinn oder -verlust, auch Prestige, der begehrte Pokal, ein Kuss, die Beeinträchtigung der Gesundheit oder gar der Verlust des Lebens sein, wovon extreme Sportspiele zeugen.

Unser Spiel mit Fiktionen ist nicht so gefährlich: In aller Regel leisten wir einen Einsatz in Form von etwas Lernbereitschaft und Zeitaufwand, während der Gewinn irgendwo im Bereich zwischen Frust und tiefer intellektueller Befriedigung liegt (was nicht bedeutet, dass die Beschäftigung mit Problemen, die noch



nicht gelöst werden konnten, zwangsläufig Frust erzeugt). Mit etwas Glück gibt es für besonders talentierte »Spieler« auch äußerst begehrte Auszahlungen: Ansehen in der *scientific community*, einen Lehrstuhl an einer erstklassigen Universität, einen internationalen Preis oder sogar die Fields-Medaille, dem Nobelpreis<sup>4</sup> vergleichbar.

## Mathematik, Kunst und Wirklichkeit

Der Unterschied zwischen Wirklichkeit und Mathematik ähnelt dem zwischen Leben und Gesellschaftsspiel, ein Umstand, den Albert Einstein mit folgenden Worten konstatiert hat:

»Soweit sich die Gesetze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht gewiss, und soweit sie gewiss sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.«

Pablo Picasso hat den analogen Zusammenhang zwischen Kunst und Realität auf den Punkt gebracht: »Kunst ist eine Lüge, in der wir die Wahrheit erkennen.« Und Paul Klee schrieb: »Kunst gibt nicht das Sichtbare wieder, sondern macht sichtbar.« Ist die Mathematik nicht auch eine Art Kunst der Idealisierung, die uns Wahrheiten enthüllt?

Buchstaben- und Wortfolgen sind noch keine Literatur, Kleckse auf einer Leinwand noch kein Gemälde und Aneinanderrei-

---

<sup>4</sup> Der berühmte schwedische Mathematiker Gösta Mittag-Leffler hatte eine Affäre mit der Frau von Alfred Nobel, weshalb dieser die Mathematik in seinem Testament aus der Preisverleihung ausschloss – so eine anekdotische Begründung, weshalb es keinen Nobelpreis für Mathematik gibt. Der tiefere Grund dürfte darin liegen, dass zu dieser Zeit noch gar nicht absehbar war, dass die abstrakte mathematische Grundlagenforschung erst im zwanzigsten Jahrhundert großartige Anwendungen haben würde.

hungen von Musiknoten noch keine Sinfonie, und sie müssen auch dann noch keine Kunstwerke sein, wenn Grammatik und Syntax, Farben- und Harmonielehre stimmen. Mathematisch aussehende Formeln sind an sich auch noch keine Mathematik.

Jede Kunst unterliegt elementaren Regeln: Grammatik und Syntax, Chromatik und Harmonik sind Aspekte der äußeren Form von Literatur, Malerei und Musik. Sie sind notwendig und sorgen für innere Hygiene. Logik ist die Hygiene des Fachs Mathematik – nicht ihr Gegenstand. Für Ludwig Wittgenstein war die Mathematik insgesamt »eine Methode der Logik« – eine übertrieben formalistische Ansicht, die so nicht Bestand hat. Denn Mathematik ist mehr als ein starres Konstrukt aus Grundannahmen und logischen Regeln; sie hat ihren eigenen, lebendigen Geist.

Das Wesentliche in der Mathematik sind die Erfindungen und Entdeckungen, deren Zweckmäßigkeit und Schönheit wir oft erst im Rückblick beurteilen können. Die Ästhetik des Abstrakten, die Poesie der Fiktionen lassen die Mathematik wahrhaftig als die Lyrik der Wissenschaften erscheinen – sie ist zugleich kristallklar und phantasievoll wie kaum eine andere intellektuelle Tätigkeit. Neue Ergebnisse, ebenso Beweise, werden im Allgemeinen zuerst durch Intuition entdeckt, und erst dann einem logischen Muster unterworfen.

Mathematik ist, wie jede andere Kulturform auch, eine natürliche, lebendige, kreative Erweiterung der menschlichen Sprache. Und sie ist international. Während die Schönheit der Dichtung unter Übersetzungen verblasst, *bleibt die Schönheit der Mathematik in allen Sprachen erhalten* (dies würden die Mathematiker als »Invarianz unter linguistischen Transformationen« bezeichnen).

Einige Kunstformen scheinen universeller, objektiver oder zumindest intersubjektiver zu sein als andere. Vielleicht sind sich in diesem Punkt Musik und Mathematik am nächsten? »Ohne Musik wäre das Leben ein Irrtum«, meinte Friedrich Nietzsche. So etwas Schmeichelhaftes ist meines Wissens noch keinem Dichter

oder Philosophen über die Mathematik eingefallen. Dennoch besteht zwischen Musik und Mathematik eine besonders innige Beziehung, denn ich meine: Musik ist Mathematik der Seele; Mathematik ist Musik des Geistes.

## Abstraktion ist Vereinfachung ... bis zur Karikatur

Rechentechniken sind noch keine Mathematik, und Formeln, stenographierte Zusammenfassungen, haben nicht mehr Wahrheitsgehalt als die Gedanken, die sie lediglich symbolisieren. Komplizierte Formalismen werden paradoxerweise oft mit dem Adjektiv »abstrakt« belegt. Dabei ist Abstraktion in Wirklichkeit nur ein Vereinfachungsprozess, bei dem das Unwesentliche weitgehend eliminiert, *abstrahiert* werden soll (lateinisch *abstrahere*, wegziehen). Abstraktion ist Gedankenexperiment, Idealisierung, Konzentration auf das Wesentliche, Vereinfachung, manchmal bis zur Karikatur. Sie ist wohl die fruchtbarste Methode, Wissenschaft zu betreiben. Denn was auch immer an Konkretem gebastelt wird: Es muss erst irgendwie gedacht werden – oft in vereinfachter Form. (Das lässt an ein Ergebnis der Hirnforschung denken: Wissenschaftler haben entdeckt, dass unser Gehirn jede motorische Aktivität, auch jede Satzbildung, unmittelbar vor der Ausführung simuliert.)

An sich kann Abstraktion weder gut noch schlecht sein, sondern nur mehr oder weniger *zweckmäßig* – und sie sollte nicht mit Rechenkunststücken verwechselt werden. Die Wirklichkeit ist meistens so kompliziert, dass wir sie ohne Vereinfachung nicht in den Griff bekommen können. Wir machen uns dann auch ein *Modell* von ihr. Dieses kann sich mehr und mehr von der Wirklichkeit entfernen, ja sogar ganz den Bezug zu ihr verlieren. Man neigt dazu, solche Modelle mit Eigenleben als *reine* Mathematik

zu bezeichnen – im Gegensatz zur *angewandten* Mathematik, die vornehmlich konkrete, wirklichkeitsnahe Probleme untersucht.

Rein oder angewandt, abstrakt oder konkret, einfach oder komplex: Wohl mag es gelingen, einem speziellen Problem oder mathematischen Gegenstand das eine oder andere Adjektiv anzuhängen, doch kenne ich niemanden, der klare Grenzen ziehen und schlüssig begründen könnte. Vielmehr bezeichnen diese Adjektive überlappende Merkmale. Ein konkretes Problem der angewandten Mathematik kann sehr komplex sein und Aspekte enthalten, die auf die reine Mathematik zurückgreifen, und reine, höhere Mathematik kann sehr einfach sein. (Es gibt komplexere – wenn auch konkretere – Wissensfelder als die Mathematik; man denke nur an die Rätselknackerzunft der Molekularbiologen oder an die Konstruktion von Roboterhänden, die so komplex ist, dass sie bis auf Weiteres Grundlagenforschung bleibt. Prinzipiell ist sogar jede Wissenschaft, die einen Teil der konkreten Wirklichkeit untersucht, komplexer als die Mathematik.)

## **Abstraktion und Idealisierung: Krise der Wissenschaft?**

Vornehmlich durch ihre historische Brille sehen manche Philosophen in »Abstraktion und Idealisierung« die »Ursache für die Krise der Naturwissenschaften und der Mathematik«. Im gleichen Atemzug werden neue Wissensgebiete wie Chaos, Fraktale und zelluläre Automaten als Beispiele einer »neuen Mathematik des Konkreten« (Peter Eisenhardt) gepriesen: Eine widersprüchliche Bezeichnung, denn was als »konkret« hoch gelobt wird, verdankt seine Existenz einer starken Vereinfachung und Idealisierung – also einer extremen Abstraktion. Solche Begriffe mögen zum Teil als plastisch empfunden werden; konkret sind sie nicht. Was an diesen neuen Wissensgebieten tatsächlich als konkret gelten kann, ist nur die *Visualisierung* einiger ihrer Aspekte – und die kann durchaus einen starken ästhetischen Reiz haben.

Hier verwechseln die Kritiker neuartige, mathematisierte Gegenstände mit ihren modischen Darstellungen – und Abstraktion mit Formalismen und Kalkültechniken. (Schwierige, auf Anhieb unverständliche Formeln können sehr konkrete Sachverhalte widerspiegeln, während äußerst abstrakte Darstellungen oft als einfache, konkrete mathematische Beispiele empfunden werden.)

Es ist wenig hilfreich, »die grundlegenden Insuffizienzen der allorts verwendeten Mathematik« (Eisenhardt) zu beklagen und ihr vorzuwerfen, sie könne ihren Anspruch, welchen man ihr auch immer unterstellen mag, nicht erfüllen. Wir wissen, dass komplexere Probleme oft nur in dem Maße als lösbar betrachtet werden können, in dem sie einer *Linearisierung* zugänglich sind. Doch Fortschritte finden allenthalben statt. Dass die Wirklichkeit körnig ist und nicht kontinuierlich und dass es einfache Prozesse und Vorgänge gibt, die noch nicht oder aber auch prinzipiell nicht berechenbar sind, das weiß nicht nur der gebildete Laie, sondern auch jeder Fachmann. Bereits 1957 schlug der französische Mathematiker Jean Kuntzmann in seiner Reflexionsschrift »Où vont les mathématiques?« die sonderbar anmutenden Entitäten »Fleck, Klecks« (*tache*), »Rohr, Röhre« (*tube*) und »Gitter, Gatter« (*grille*) als konkrete Analoga zu den Begriffen »Punkt«, »Funktion« und »Funktionstabelle« vor. Sicher ist die Mathematik unvollkommen, aber das gilt für jedes endliche Denksystem, auch für jedes philosophische.

Krise der Wissenschaft? Dass ihre Fundamente immer wieder in Frage gestellt werden, ist ja nur Ausdruck einer evolutionären Weiterentwicklung ihrer Methoden – mit ungeheurem Emergenzpotenzial, das ständig Neues entstehen lässt. Auch die Abstraktion wird Änderungen erfahren und sich weiterentwickeln. Philosophen wie Peter Eisenhardt, die insbesondere die Methodologie der Mathematik kritisieren, scheinen zu unterstellen, die Wissenschaft als solche glaube, das Neue sei auf das Alte reduzierbar. Dabei ist es gerade die Wissenschaft, die ständig Neues entdeckt und auch ganz selbstverständlich davon ausgeht, dass

sich dies nicht immer auf Altes zurückführen lässt. Sie selbst verfügt über einen eingebauten Mechanismus, der dafür sorgt, dass ihre eigenen Grundlagen einer ständigen Prüfung unterzogen werden.

Wer Abstraktionen, Vereinfachungen, Beschränkungen auf das Wesentliche als störend empfindet, mag sich damit trösten, dass sie, wie ich im nächsten Abschnitt zeigen werde, nur einer gewissen Gewöhnung bedürfen. Um Mathematik zu betreiben, ist auch kein sechster Sinn nötig, wie manche Wissenschaftsautoren meinen. Obwohl noch niemand die abstrakte »Zahl 47« (nicht zu verwechseln mit ihrer symbolischen Darstellung) sinnlich erfasst hat, ist sie uns vertraut, weil wir gewohnt sind, mit ihr umzugehen. Wenn ein Mathematiker ein Gleichungssystem aufstellt und löst, ist das nicht geheimnisvoller, als wenn ein Auto-mechaniker Winterreifen aufzieht: Dies kommt uns ja auch nicht unverständlich oder mysteriös vor, obwohl viele von uns dazu nicht in der Lage sind.

## **Verstehen wir, was »verstehen« bedeutet?**

»Wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf.« Das war Arthur Schopenhauers Ansicht über die Mathematik – und vielleicht seine einzige Erfahrung mit ihr. Diese Haltung ist auch heute noch weit verbreitet. Sogar Gebildete und Kulturschaffende bekennen fast stolz: »Von Mathe hab ich keine Ahnung.« Am Gymnasium erging es mir nicht anders – weil ich ein ziemlich fauler Schüler war. Doch eines Tages packte mich der Sportsgeist, und ich wollte endlich die Hieroglyphen und Gedankengänge besser »verstehen«. Und das kann, wie ich dann feststellte, sehr spannend sein.

Eine Gegebenheit, ein Objekt oder einen Sachverhalt zu »verstehen« heißt eine nachvollziehbare Beziehung, Begründung, Erklärung aus Bekanntem herzuleiten. Bei diesem Prozess des Verstehens gelangt man irgendwann zu Grundobjekten, deren Natur nicht nur in den Geisteswissenschaften, sondern auch in den Naturwissenschaften, wo Experiment, Wiederholung und Verifizierung systematisch möglich sind, problematisch erscheint. Die Frage großer Physiker lautet im Grunde: Das Atom, was ist das eigentlich? Werner Heisenberg sinnierte: »Vielleicht werden wir eines Tages verstehen, was das Atom ist, aber dann werden wir auch verstehen, was verstehen ist.« So gesehen *versteht* natürlich kein Mensch *wirklich* etwas.

Bei dieser Erkenntnis landen wir immer dann, wenn Was-ist-Fragen gestellt werden, also spätestens wenn wir bei irgendwelchen Grundobjekten angelangt sind. Somit besteht der Prozess des Verstehens, speziell in der Mathematik, lediglich in der (logischen) Herleitung aus Grundobjekten – die einfach als gegeben und evident angesehen werden. Verstehen ist immer graduell und von der *Gewohnheit* abhängig, mit der von Bekanntem auf Unbekanntes geschlossen wird. Wiederholung zieht Gewöhnung, Verstehen und Lernen nach sich. Die Feststellung, dass eine Sprache wie Chinesisch »leicht zu verstehen« ist, leuchtet sofort ein, wenn wir uns vergegenwärtigen, dass jedes chinesische Kind sie lernt, und besonders bei »Spielen«, in denen es um Existenzsicherung geht, hängt der Erfolg einer Strategie auch davon ab, wie häufig sie angewendet wird: Leben ist Wiederholung. Jede physische, intellektuelle und geistige Fertigkeit setzt Übung voraus – ob es um eine Jagdtechnik, eine Sprache, um das Spielen eines Musikinstruments oder die Manipulation von Fiktionen geht.

Abstrakte Fiktionen dürften vorwiegend dem Menschen eigen sein. Einfache Sachverhalte, die, je nach Blickwinkel, irgendwo zwischen konkret und abstrakt angesiedelt werden können, »verstehen« sicher auch meine Katze; ich bezweifle aber, dass sie auch

abstrakterer Hirngespinnste fähig ist – was unser friedliches Zusammenleben vielleicht gefährden würde.

Auch die *Induktion* – das Schließen von (sich wiederholenden) Einzelfällen auf das Allgemeine – und das damit verwandte Prinzip der *Kausalität*, das Postulat der Verknüpfung von Ursache und Wirkung, sind durchaus nützliche Quellen der *Erfahrung* und des Verstehens – wenn auch keine Quellen sicherer Erkenntnis, wie Sir Karl Popper dargelegt hat: Alles Wissen ist nur Vermutungswissen. Eine erklärende allgemeine Theorie kann zwar durch unzählige singuläre Beobachtungen bestätigt, aber niemals als absolute Wahrheit bewiesen werden. Hingegen genügt ein einziges Gegenbeispiel, um die Theorie zu widerlegen, zu »falsifizieren«. Nur im negativen Fall, in der Widerlegung, kann es also Gewissheit geben.

Dennoch ist die Spirale *Wiederholung – Gewöhnung – Lernen – Verstehen – Fragen* zweifellos Teil des evolutionären Mechanismus, der, ausgehend vom (subjektiven) Empfinden und Wahrnehmen über die Stufen Reflex, Instinkt, Sprache, Intuition zu den höheren, *kognitiven* Denkprozessen wie Entdecken, Erfinden und Erkennen führt. Dank dieser evolutionären Spirale entwickelt sich aber auch unser Bild vom Universum.

## Zwei Anmerkungen

Ich werde nicht versuchen, eine allumfassende Antwort auf die Frage zu geben, *was* denn die gedachten Objekte *eigentlich sind*, und im nüchternen Zustand lasse ich mich auch nicht zu einer »allgemeingültigen« Definition, beispielsweise von *Atom* oder *Leben*, hinreißen. Manfred Eigen stellt zwar fest, »Leben ist ein dynamischer Ordnungszustand der Materie«, wirft dann jedoch als nächstes die Frage auf, ob es denn für die biologische Selbstorganisation ein Ordnungsprinzip gebe. Wir werden Was-ist-Fragen als falsch gestellte oder unbeantwortbare Fragen behandeln, und



wir tun gut daran, denn niemand kann ohne Zirkelschluss (das heißt, ohne den zu definierenden Begriff letztlich in die Definition hineinzulegen) sagen, was die Dinge wirklich sind: Materie, die Schwerkraft, der Mensch, das Bewusstsein ...

Die Frage, ob den Fiktionen und den Beziehungen zwischen ihnen eine Realität – eine *gewisse* Realität unter vielen möglichen, denkbaren –, und zwar unabhängig vom menschlichen Denken, zukommt, erscheint schon zugänglicher. Aus folgender Überlegung neige ich zu einer positiven Antwort. Das Universum ist für uns vor allem das Bild, das wir uns vom Universum machen. Es mag ein unvollständiges und verzerrtes Bild sein. Dennoch muss es im Kern einen irgendwie strukturtreuen Bezug zur Wirklichkeit haben, denn viele abstrakte, künstliche Wahrheiten der Mathematik führen zu Erkenntnissen über den Bereich der realen Welt, in dem die zugrunde gelegten Annahmen einen Sinn ergeben. Dann müssen aber die Fiktionen wohl auch Teile der Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grad widerspiegeln – so wie etwa eine Röntgenaufnahme ein Organ abbildet. Vielleicht ist es diese Entsprechung, die so manchen Naturwissenschaftler behaupten lässt, die Welt sei mathematisch. Belassen wir es vorerst dabei. Uns soll das intersubjektiv Nachvollziehbare für unsere Gedankenexperimente genügen.

# 0

## Menschenverstand, Logik und Beweis

Empfindungen, Wahrnehmungen und Aktionen prägen alles Lebendige und führen – durch Wiederholen und Lernen – zur elementaren Erfahrung.

Kommt die Sprache, das heißt Beschreiben und Argumentieren, hinzu, dann gelangen wir auf eine höhere Stufe des Erlebens und der Verarbeitung von Erlebtem. Diese Stufe konsistenter Lebenserfahrung ist das Fundament des gesunden Menschenverstandes.

Die im Gedächtnis gespeicherten Lebensereignisse können auf zweierlei Arten miteinander verknüpft werden: mit Hilfe der (bereits erwähnten) *Induktion*, dem Schließen von Einzelfällen auf das Allgemeine, und der *Deduktion*, der Ableitung des Besonderen aus dem Allgemeinen. Diese Verknüpfungen vervollständigen den gesunden Menschenverstand weiter – was wiederum Voraussetzung für vorwissenschaftliche Erkenntnis, wissenschaftliche Theorien und Planungen ist.

Während die Induktion, wie wir gesehen haben, keinerlei positive Gewissheit zur Folge haben kann, lässt die deduktive Methode sehr wohl Schlüsse mit Gewissheit zu. Die Korrektheit des Schlusses bedeutet jedoch nicht die faktische Wahrheit von Aussagen, wie ich an einigen Beispielen zeigen werde. Dennoch ist die deduktive Logik bei allem Denken, das Aussagen schafft und miteinander verknüpft, unverzichtbar.

Der Mensch ist frei und fähig, auch allen Gesetzen der Logik zuwiderzuhandeln. Selbst das Unwahrscheinliche, Unnatürliche

und Absurde kann er Wirklichkeit werden lassen. Extreme Ungleichheit kann er ebenso erzwingen wie das andere Extrem, die Gleichheit. Hinzu kommt, dass die Umgangssprache organisch gewachsen, komplex und oft mehrdeutig ist. Auch sehr einfach konstruierte sinnvolle Sätze sind nicht frei von logischen Widersprüchen; man denke etwa an die Russell'sche Antinomie (Der Barbier, der alle rasiert, die sich nicht selbst rasieren) oder noch an die Antinomie des Lügners (Wenn ich sage: »Ich lüge«, lüge ich und spreche gleichzeitig die Wahrheit). Um solche Widersprüche zu vermeiden, ist, wie der berühmte Logiker Alfred Tarski gezeigt hat, sowohl eine Einschränkung der Benutzungsregeln als auch eine Formalisierung nötig, die über den Alltagsverstand hinausgeht. Aber auch die so formalisierte Logik ist nach Karl Popper eine Erweiterung der menschlichen Sprache – und alle Wissenschaft und Philosophie aufgeklärter Alltagsverstand. Somit ist auch Mathematik, das Spiel mit Fiktionen nach den Regeln der Logik, aufgeklärter Alltagsverstand in Form einer Mischung aus formalen und natürlichen Sprachen.

Logisches Schließen ist aber auch ein nützlicher Bestandteil der Kommunikation. Logik macht die Menschen kritischer und hilft, Irreführung durch Pseudoargumente zu verhindern. Alfred Tarski: »Das Hauptproblem, dem sich die Menschheit heute gegenüber sieht, ist das der Normalisierung und Rationalisierung menschlicher Beziehungen.«

Nun folgen ein paar Aspekte der elementaren Logik, sofern sie für das Weitere von praktischer Bedeutung ist. Dabei habe ich mich bemüht, Formalismen so weit wie möglich zu vermeiden.

### Ein paar Zutaten: Aussagen

Auf tiefsinnige philosophische Betrachtungen über die Bedeutung der Wörter »wahr« und »falsch« will ich hier verzichten. Innerhalb der Logik gehören sie zu den *evidenten*, nicht weiter definierten Grundbegriffen.

Sehen wir in einem Wörterbuch nach, was das Wort »Aus-sage« bedeutet, so erfahren wir unter anderem, dass es sich um eine »sprachlich gefasste Mitteilung« handelt. In den folgenden Überlegungen steht dieser Begriff für jede Zusammenstellung von Zeichen, die einen Sinn ergeben und die Eigenschaft haben, entweder wahr oder falsch zu sein, aber nicht beides zugleich. Die Entscheidung darüber, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, muss prinzipiell möglich sein, auch wenn sie erst zu einem späteren Zeitpunkt getroffen werden kann – wie etwa bei Prognosen.

In jeder der nächsten drei Zeilen steht eine Aussage:

- (1) Der Mars besteht aus grünem Käse.
- (2)  $1 + 1 = 3$ .
- (3) Morgen ändert sich das Wetter, oder es bleibt, wie es ist.

Dagegen enthält keine der folgenden Zeilen eine Aussage:

- (4) Haltet den Dieb!
- (5)  $\underbrace{\text{H}}_{\text{M}} \text{M} \quad \blacklozenge \text{M} \bullet \blacklozenge \quad \text{O} \bullet \blacklozenge \quad \square \square \blacklozenge \bullet \text{M} \blacklozenge \blacklozenge \text{M}$
- (6) Diese Aussage ist falsch.

Die Erzeugung neuer Aussagen aus vorhandenen ist ein kreativer Prozess, der in höchstem Maße wünschenswert ist; schließlich möchte man nicht in einem abgeschlossenen, sterilen Gebäude feststehender Aussagen gefangen sein. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, vorhandene Aussagen zu neuen Aussagen zu verknüpfen.

Die einfachste Operation, die wir auf eine einzelne Aussage anwenden können, ist die *Negation* oder *Verneinung*. Nehmen wir als Beispiel die Aussage »Der Mars besteht aus grünem Käse« und kürzen sie mit  $p$  ab. Nun bilden wir aus  $p$  die neue Zeichenzusammenstellung »nicht  $p$ «. Sie wird dadurch zu einer Aussage, dass wir festsetzen: »nicht  $p$ « ist unter genau denselben Bedingungen wahr, unter denen  $p$  falsch ist – und »nicht  $p$ « ist unter genau denselben Bedingungen falsch, unter denen  $p$  wahr ist. Diese Festsetzung versteht »nicht  $p$ « mit derselben Eigenschaft

wie die vorgegebene Aussage  $p$  (nämlich entweder wahr oder falsch, aber nicht beides zugleich zu sein), und daher ist auch »nicht  $p$ « eine Aussage.

Wie wird nun »nicht  $p$ « als vollständiger Satz ausgedrückt? Nach den Regeln der Grammatik kann man einen Satz verneinen, indem man an passender Stelle das Wörtchen »nicht« einschleibt. Die Aussage »Der Mars besteht aus grünem Käse« bietet dazu zwei Möglichkeiten, die einen Sinn ergeben: (a): Nicht der Mars besteht aus grünem Käse. Und (b): Der Mars besteht nicht aus grünem Käse.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Aussage (a) nicht die Negation von  $p$  sein kann. Also muss es die Aussage (b) sein. Allerdings ist auch hier unklar, ob sich das Wörtchen »nicht« auf grün oder auf Käse bezieht – oder auf beide Bezeichnungen gemeinsam. Wir sind gut beraten, wenn wir letzteres gelten lassen.

Wir können natürlich auch andere Umschreibungen vorschicken, zum Beispiel »Es ist nicht der Fall, dass ...« oder »Es ist falsch, dass ...«. Solche Konstruktionen sind eindeutig und führen erfahrungsgemäß nicht zu Missverständnissen.

Die Vereinbarungen zu einer (nun beliebigen) Aussage  $p$  und zu ihrer Verneinung (nicht  $p$ ) lassen sich in einer übersichtlichen Tabelle darstellen; dabei werden die Buchstaben »W« und »F« als Abkürzungen für »wahr« und »falsch« benutzt. Diese Tabelle (Tab. 1) wird *Wahrheitstafel* von »nicht  $p$ « genannt, denn sie kennzeichnet die Bedingungen, unter denen »nicht  $p$ « wahr ist. (Natürlich nennt sie auch die Bedingungen, unter denen »nicht  $p$ « falsch ist.)

Die Operation der Verneinung wird an einer einzigen Aussage vorgenommen. Wir können aber auch zwei oder mehr Aussagen zu einer neuen verknüpfen. Wenn  $p$  und  $q$  zwei Aussagen

**Tab. 1** Wahrheitstafel für »nicht  $p$ «.

<b>p</b>	<b>nicht p</b>
W	F
F	W

Tab. 2 Wahrheitstafel für »p und q« und »p oder q«.

p	q	p und q	p oder q
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

sind, so können wir die beiden Zeichenzusammenstellungen »p und q« und »p oder q« bilden. Diese beiden Operationen verknüpfen jeweils zwei Aussagen zu einer einzigen. Jede von ihnen wird dadurch zu einer Aussage, dass wir die in Tabelle 2 gezeigten Festsetzungen über die Wahrheit beziehungsweise Falschheit treffen.

Die Aussagen »p und q« und »p oder q« entsprechen im Wesentlichen dem üblichen Sprachgebrauch. Auf einen Punkt ist allerdings zu achten: Das Wort »oder« wird in der Umgangssprache in zweierlei Bedeutung gebraucht. Manchmal bedeutet es, dass *genau* eine (»eine und nur eine«) von zwei Möglichkeiten zutrifft (Beispiel: Morgen Mittag werde ich in München oder in Hamburg sein), und manchmal, dass *mindestens* eine von zwei Möglichkeiten zutrifft – mitunter auch beide (Beispiel: Bei Regen oder Sturm findet das Fest im Saal statt). In der Mathematik hat man sich auf die zweite dieser beiden Deutungen geeinigt. Wir werden also »oder« stets im (nicht ausschließenden) Sinne von »mindestens eine von zwei Möglichkeiten« verwenden. Meinen wir dagegen *genau* eine von zwei Möglichkeiten, sprechen wir von »entweder ... oder«.

Eine Aussage »p oder q«, die immer wahr ist, erhalten wir, wenn wir für die Aussage q die Verneinung von p einsetzen: »p oder nicht p« ist offenbar stets wahr und wird *Tautologie* genannt: Es regnet, oder es regnet nicht.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Gewisse Teiltautologien nach dem Halb-voll-halb-leer-Muster führen zu witzigen Aussagen, etwa wenn jemand eine faule Katze sagen lässt: »Wer mittags aufsteht, verschläft nicht den ganzen Tag.« Auch streng befolgte Logik in Alltagssituationen kann zu komischen Effekten führen, wie die scharfsinnige