MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Leonor Cabeza de Vergara • Jaime Castrillón Cifuentes

CUARTA EDICIÓN
REVISADA Y AUMENTADA

ediciones de la U
Ediciones Uninorte

Matemáticas financieras

4ª edición revisada y aumentada

Matemáticas financieras

4ª edición revisada y aumentada

Leonor Cabeza de Vergara
Jaime Castrillón Cifuentes

Barranquilla, 2010

650. 01513 Castrillón Cifuentes, Jaime
C355 Matemáticas financieras / Leonor Cabeza de Vergara, Jaime Castrillón Cifuentes. -- Barranquilla : Ediciones Uninorte, reimpr., 2010.
264, x p.

ISBN: 978-958-8252-65-0

1. Matemáticas Financieras
I. Cabeza de Vergara, Leonor
II. Tít.

www.uninorte.edu.co
Km 5 vía a Puerto Colombia, A.A. 1569,
Barranquilla (Colombia)

http://edicionesdelau.com/
Calle 24A n.° 43-22
Bogotá (Colombia)

Primera edición, 1999
Segunda edición corregida y aumentada, 2002
Tercera edición corregida y aumentada, 2005
Primera reimpresión de la tercera edición corregida y aumentada, mayo de 2007
Segunda reimpresión de la tercera edición corregida y aumentada, julio de 2007
Cuarta edición revisada y aumentada, febrero de 2008
Primera reimpresión de la cuarta edición revisada y aumentada, noviembre de 2009
Segunda reimpresión de la cuarta edición revisada y aumentada, junio de 2010
Tercera reimpresión de la cuarta edición revisada y aumentada, noviembre de 2010

Coordinadora editoral
Zoila Sotomayor O.

Diseño y diagramación
Munir Kharfan De los Reyes

Corrección de textos
Mercedes Castilla M.

Diseño de portada
Joaquín Camargo Valle

Impreso y hecho en Colombia
Javegraf
Bogotá
Printed and made in Colombia

LEONOR CABEZA DE VERGARA

Es matemático de la Universidad de Antioquia, magíster en Administración de Empresas y especialista en Administración Financiera de la Universidad del Norte. Tiene 32 años de experiencia docente. Ha orientado las asignaturas de Contabilidad Financiera y Matemáticas Financiera en cursos de pregrado y posgrado en la Universidad del Norte. Así mismo, ha dictado Estadística Descriptiva e Inferencial y Cálculo diferencial e integral en el Universidad del Norte y en otras instituciones de educaicón superior de Colombia. Miembro del Grupo de Investigaciones Innovar del Caribe, de la Divisdión de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte.

JAIME CASTRILLÓN CIFUENTES

Es magíster en Administración de Empresas de EAFIT, Medellín. Licenciado en Educación de la Universidad de San Buenaventura y tecnólogo en Sistemas Electrónicos del Instituto Pascual Bravo de Medellín. Tiene 27 años de experiencia docente en la cátedra contable financiera de la Universidad del Norte. Ha realizado cursos y pasantías sobre costos y presupuestos para el sector salud en la Universidad de Missouri, en el campus de Columbia, USA. Ha sido profesor de ESAN, de Lima (Perú) y de la Universidad ESPOL, de Guayaquil (Ecuador). Miembro del Grupo de Investigaciones Innovar del Caribe, de la División de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte. Es coautor del libro *Costos para gerenciar empresas manufactureras, comerciales y de servicios,* 2a. ed. (Ediciones Uninorte, 2008) y autor de *Costos para gerenciar servicios de salud* (Ediciones Uninorte, 2004).

Contenido

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO I
Matemáticas financieras 3
Objetivo, 3. Matemáticas financieras, 3. Representación gráfica, 5.

CAPÍTULO II
Interés simple 7
Objetivos, 7. Interés simple, 7. Valor presente, 9. Número de períodos, 10. Tasa de interés, 11. Anualidades (cuotas uniformes), 12. Cuestionario de repaso, 23. Ejercicios resueltos, 27. Ejercicios propuestos, 40. Diseño de fórmulas Interés Simple, 47.

CAPÍTULO III
Interés compuesto 49
Objetivo, 49. Interés compuesto, 49. Valor presente, 52. Número de períodos, 53. Tasa de interés, 54. Anualidades, 55. Cuestionario de repaso, 72. Ejercicios resueltos, 75. Ejercicios propuestos, 85. Manejo de la calculadora financiera, 94.

CAPÍTULO IV
Clases de interés 97
Objetivo, 97. Clases de interés, 97. Interés nominal, 97. Interés efectivo, 98. Interés continuo, 105. Interés efectivo sobre base de interés anticipado, 108. El interés y los impuestos, 112. Los intereses deducibles de los impuestos, 114. La inflación y las tasas de interés, 115. La devaluación y las tasas de interés, 115. Tasa real de interés, 115. Rendimiento en moneda extranjera, 120. Rentabilidad o costo del sistema UVR, 122. Cuestionario de repaso, 130. Ejercicios resueltos, 133. Ejercicios propuestos, 145.

CAPÍTULO V
Gradientes 155
Objetivo, 155. Gradientes, 155. Gradiente aritmético, 155. Gradiente geométrico, 168. Planes de amortización de un préstamo individual al UVR, 184. Gradientes a perpetuidad, 188. Cuestionario de repaso, 194. Ejercicios resueltos, 197. Ejercicios propuestos, 208. Diseño de fórmulas Gradientes, 218.

Capítulo VI
Inversiones 223
Objetivo, 223. Inversiones, 223. Tasa de descuento, 224. Métodos para analizar la factibilidad del proyecto, 224. Cuestionario de repaso, 240. Ejercicios resueltos, 243. Ejercicios propuestos, 254.

Bibliografía 261

Advertencia

En esta edición se seguirá la norma establecida por la Real Academia de la Lengua Española en lo que respecta a la ortografía de los números escritos con cifras, así:

"Para escribir correctamente los números expresados en cifras, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

a) Al escribir números de más de cuatro cifras, se agruparán éstas de tres en tres, empezando por la derecha, y separando los grupos por espacios en blanco: *8 327 451* (y no por puntos o comas, como, dependiendo de las zonas, se hacía hasta ahora: ⊗*8.327.451*; ⊗*8,327,451*). Los números de cuatro cifras se escriben sin espacios de separación: *2458* (no ⊗*2 458*). En ningún caso deben repartirse en líneas diferentes las cifras que componen un número: ⊗8 327/451.
b) Nunca se escriben con puntos, comas ni blancos de separación los números referidos a años, páginas, versos, portales de vías urbanas, códigos postales, apartados de correos, números de artículos legales, decretos o leyes: *año 2001, página 3142, código postal 28357*.
c) Para separar la parte entera de la decimal debe usarse la coma, según establece la normativa intrenacional: *El valor de* π *es 3,1416*. No obstante, también se admite el uso anglosajón del punto, extendido en algunos países americanos: *El valor de* π *es 3.1416*".

INTRODUCCIÓN

Esta cuarta edición complementa la obra en diferentes aspectos, como la incorporación de temas nuevos, la modificación de algunos otros que atienden a las sugerencias de los usuarios; asimismo incluimos el fortalecimiento de componentes pedagógicos, con el aumento de los ejemplos explicativos; y todo al mismo tiempo que revitalizamos el propósito del texto de entregar nuevas herramientas para los cursos de Finanzas de corto, mediano y largo plazo, y también para la Formulación y Evaluación de proyectos.

Esperamos que el contenido sea claro y fácil de entender para los estudiantes de estos cursos y a los similares de otras carreras. Los conceptos son explicados bajo la visión de las finanzas y demostrados con las herramientas elementales de álgebra, como solución de ecuaciones, exponenciación y logaritmos, además de algunos conceptos de cálculo, como derivada e integral definida.

Para nosotros es muy importante que el estudiante comprenda e identifique de dónde provienen cada una de las fórmulas, ya que en los casos de la vida diaria deberá estar en condiciones de relacionarlas y aplicarlas en la solución de una inquietud o variable, como también para el desarrollo de su capacidad de análisis y asociación con las demostraciones de las diferentes expresiones.

En cada capítulo explicamos y demostramos los conceptos con ejemplos que muestran la forma de aplicarlos. Al final de los capítulos entregamos un cuestionario de repaso, unos problemas resueltos y unos ejercicios para que el estudiante practique. En esta edición aumentamos los ejercicios con el propósito de cubrir los nuevos temas e intensificar la puesta de práctica de los temas antiguos, y a los problemas pares les dimos respuesta para facilitar el proceso de aprendizaje.

No anexamos las tablas tradicionales de Matemáticas Financieras, pues con el desarrollo de las calculadoras financieras estos factores se pueden conseguir de una forma rápida y ágil.

En algunos capítulos de esta edición adicionamos una guía para el diseño de las fórmulas en la calculadora financiera tales como las de interés simple y gradientes, esto le permite al estudiante familiarizarse con las herramientas tecnológicas que puede encontrar en el medio y le facilita la solución de ciertos problemas con mayor agilidad.

Agradecemos a la Universidad del Norte, y en especial a la División de Ciencias Administrativas, el estímulo brindado, con el cual pudimos llegar al feliz término del trabajo.

Un gran reconocimiento merecen nuestros estudiantes de pregrado y de postgrado quienes con sus observaciones y sugerencias contribuyeron notoramiente al desarrollo de esta obra. También ayudaron con sus retroalimentaciones, los profesores usuarios del texto en diferentes universidades.

Deseamos hacer una especial mención a nuestras familias que nos brindaron un gran apoyo y su paciencia durante el tiempo que les quitamos para la elaboración de este trabajo.

Los autores

Capítulo I
Matemáticas financieras

1.1 OBJETIVOS

Se espera que al terminar este capítulo, el estudiante esté en capacidad de identificar, distinguir y usar los conceptos básicos necesarios para trabajar las matemáticas financieras.

1.2 MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Las *matemáticas financieras* son una herramienta para realizar una infinidad de análisis financieros, tales como determinar el costo de una inversión financiera, fijar el mejor plan para tomar una deuda, calcular el costo de capital, y otras más.

Antes de iniciar es importante recalcar el valor que tiene el dinero en el tiempo. Se sabe que por la *inflación,* el dinero va perdiendo su valor con el paso del tiempo. Con esto deducimos que pagar hoy $100 es diferente a hacerlo dentro de un mes. Esta situación se aprecia en la vida diaria cuando se realizan las compras, y se mantiene el mismo consumo: el dinero no alcanza para cubrir las necesidades, si se mantiene fijo el ingreso.

Esto nos conduce a la necesidad de cobrar una *tasa mínima de retorno* para que la inversión realizada no pierda su valor con el paso del tiempo. Además, la inversión debe producir una utilidad que resulte atractiva para el inversionista pues, de lo contrario, es preferible mantener el dinero guardado y no arriegarlo.

Lo anterior indica que el dinero tiene capacidad de generar riqueza y cuando se toma en préstamo, se debe pagar un *costo* que se expresa con una suma a pagar por cada unidad de dinero prestado. El *interés* es el alquiler o rédito que se conviene pagar, en una unidad de tiempo previamente estipulada, bien sea por años, semestres, trimestres, bimestres o meses. Las tasas tienen una expresión porcentual según la cual por cada 100 unidades de dinero prestado se pagarán como intereses **r** unidades al final de cada período de tiempo.

El interés que cobra un inversionista también depende del riesgo que corre. Entre mayor es el riesgo, mayor interés. El inversionista espera recuperar una suma mayor que la invertida, que es la *tasa de rentabilidad*. Hay otro concepto a tomar en consideración: el de *equivalencia*, que consiste en recibir por igual \$150 dentro de seis meses o \$100 hoy, siempre que los dos valores sean equivalentes, esto es, si tienen el mismo poder adquisitivo; o sea, que dentro de seis meses con \$150 se puede adquirir lo que hoy se compra con \$100. Los dos valores no son iguales numéricamente, pero representan lo mismo con el paso del tiempo. También es importante definir por *cuánto tiempo se utiliza el dinero*. Esto indica que el cambio en el valor del dinero se puede representar como la tasa de interés, y esta debe cubrir la inflación y el rédito de la inversión. Por lo tanto, si la tasa de interés supera la inflación del período, el rendimiento real de la inversión será positivo.

Como se afirmó anteriormente, un inversionista espera que cuando comprometa su capital, se le proporcione una tasa razonable de retorno, siempre superior a la tasa que ofrecen los bancos o corporaciones o cualquier otra inversión libre de riesgo. La tasa razonable de retorno debe ser mayor que la tasa libre de riesgo, ya que la mayoría de las inversiones presentan riesgo.

Esta tasa razonable de retorno se denomina *tasa mínima requerida de retorno* (TMRR o TER), es decir, la TMRR es la tasa mínima que espera ganar el inversionista para comprometer su capital.

Es importante tener en cuenta otro concepto: el *costo de oportunidad,* que es el beneficio que obtendríamos de una inversión a la que se renunció para destinar el capital a otra inversión. Por ejemplo, si se tienen dos alternativas: la inversión A, que renta un 3% mensual por \$100, y una inversión B, que da un 4% mensual por \$100. Si se escoge esta última alternativa, podríamos afirmar que el costo de oportunidad de la inversión B es 3%, porque se renunció a \$3, para buscar \$4 en la alternativa B.

Podemos afirmar que la TMRR y el costo de oportunidad están relacionados, y que muchas veces el costo de oportunidad es la TMRR.

1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La representación gráfica o el diagrama económico es una herramienta que permite representar sobre un eje horizontal los diferentes movimientos del dinero en el tiempo. El eje horizontal se tabula en períodos de tiempo; las líneas perpendiculares al eje horizontal indican ingresos o egresos de dinero, por ejemplo:

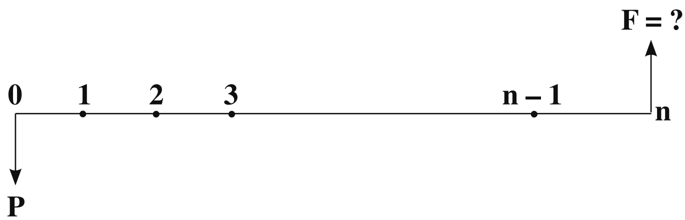


Gráfico 1

En el gráfico 1 se representa la posición de un inversionista que entrega un capital inicial \$P en el período 0. Se deja este capital **n** períodos para recuperar al final una cantidad F a un interés **i** dado.

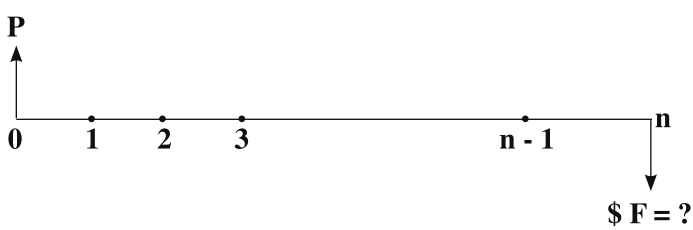


Gráfico 2

En el gráfico 2 se muestra que la persona recibe un capital \$P en el período 0, el cual trabaja por **n** períodos y, al final debe pagar una cantidad \$F, a un interés **i** dado.

CAPÍTULO II

Interés simple

2.1 OBJETIVOS

Se espera que al concluir este capítulo, el estudiante demuestre capacidad para usar el interés simple en cualquier tipo de operación financiera y medir sus efectos en las decisiones de inversiones o en las de financiación, ya sea con anualidad o con valores discretos. Por lo tanto, es una meta que al final calcule un valor futuro, un valor presente, una anualidad o los períodos necesarios haciendo uso del concepto de interés simple.

2.2 INTERÉS SIMPLE

Ya explicamos la tasa de interés, pero es importante analizar y diferenciar las dos clases de tasa de interés: simple y compuesto.

En el *interés simple,* los intereses que un capital gana en cada período no generan intereses; sólo se gana interés sobre el capital. Supongamos que se depositan $5 000 000 y se espera ganar 2% mensual, lo cual apreciamos en el cuadro siguiente, expresado en unidades de $1000.

Período	**Tasa de interés**	**Valor inicio período**	**Interés causado mes**	**Interés acumulado**	**Cantidad final**
n	i%	P	I=P . i	n . p . i	P(1+ n . i)
0	2%	0	0	0	$5000
1	2%	$5000	$100	$100	$5100
2	2%	$5100	$100	$200	$5200
3	2%	$5200	$100	$300	$5300

Con este método de interés simple, en cada mes se recibe una cantidad fija de \$100 000, que corresponde al 2% del capital. Se observa que en el período cero, cuando se depositó el dinero, los intereses ganados en ese mes son \$0; en el mes 1 se ganaron \$100 000; al final del mes, el inversionista cuenta con \$5 100 000. En el período 2 gana sólo \$100 000, esto es, el 2% de los \$5 000 000 que depositó. Como se puede observar, no recibió nada por los \$100 000 de interés que ganó en el período 1 y lo mismo se presenta período tras período: los intereses no ganan intereses.

Así lo resumimos en el siguiente cuadro:

Período	**Tasa de interés**	**Valor inicio período**	**Interés causado mes**	**Interés acumulado**	**Cantidad final**
n	i%	P	I=P · i	n · p · i	P(1+ n · i)
0	i%	0	0	0	P
1	i%	P	P · i	1.P.i	P(1+1 · i) = P+1P · i
2	i%	P(1+1 · i)	P · i	2.P.i	P(1+2 · i) = P+2P · i
3	i%	P(1+2 · i)	P · i	3.P.i	P(1+3 · i) = P+3P · i
.	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
n	i%	P(1+(n-1) · i)	P · i	n · P · i	P(1+n · i) = P+nP · i

Ahora busquemos una expresión que permita resumirlo en una fórmula matemática donde:

P = Capital o suma prestada, el valor inicial
n = Número de períodos
i = Interés o rédito (r/100) pactado por cada período
F = Cantidad final

$$\boxed{\mathbf{F = P\,(\,1{+}n \cdot i\,)}} \qquad \textbf{(1)}$$

La expresión anterior permite calcular el capital inicial o valor presente (P), tasa de interés por pagar o por ganar, número de períodos, según la información con la cual se cuente.

2.3 VALOR PRESENTE

Es la cantidad equivalente en pesos de hoy a un valor $F que se recibirá al finalizar los ***n*** *períodos, y se pacta bajo una tasa de interés simple* ***i****.*

Valor presente (P)

$$\boxed{\mathbf{P = \frac{F}{(1 + n \cdot i)}}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Con esta expresión se determina el valor presente que se debe depositar o recibir si se espera obtener un valor futuro, F, al cabo de **n** períodos, bajo un interés **i**. La fórmula (2) se obtuvo despejando el valor de P de la fórmula (1).

Ejemplo:

Un ama de casa recibe un préstamo por un período de 2 meses y con el compromiso de pagar un 4% mensual de interés simple *¿Cuál es el valor del préstamo que recibió, si al cabo de los dos meses paga $540 000?*

Solución:

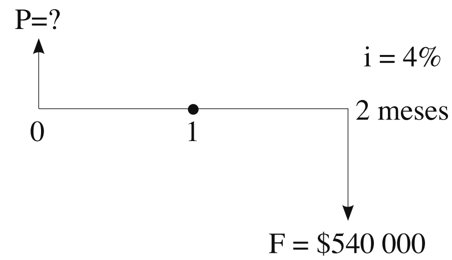
De la fórmula inicial $F = P\,(1 + n \cdot i)$ se despeja el valor de P, que es el valor que se desea conocer. Aplicamos la fórmula (2): $P = F / (1 + n \cdot i)$:

P = ?
F = $540 000
n = 2
i = 0,04 = 4% mensual

$$P = \frac{540\ 000}{(1 + 2 \cdot 0.04)} = \$500\ 000 \qquad P = \frac{540\ 000}{(1 + 2 \cdot 0{,}04)}$$

- *El ama de casa prestó $500 000*

Representación gráfica:



2.4 NÚMERO DE PERÍODOS

Número de períodos (n) $\boxed{\mathbf{n = [\ (F/P) - 1\ ] / i}}$ **(3)**

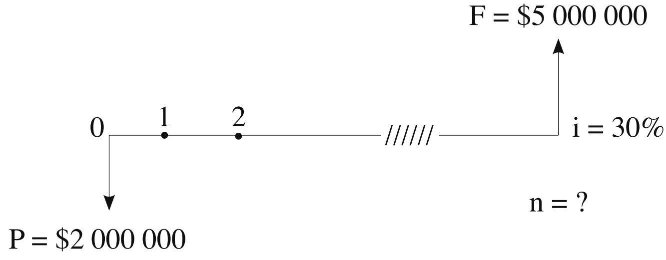
De la fórmula (1) se despejó el valor de la incógnita deseada, **n**; en la fórmula (3), F representa el valor futuro que se recibe, si se deposita un valor presente igual a P, para ganar un interés o rédito igual a **i** durante un período **n**.

Ejemplo:

Suponga que un inversionista ahorra $2 000 000 y espera recibir 30% anual de interés simple. Si recibe al cabo de **n** años $5 000 000, *¿por cuánto tiempo mantuvo la inversión?*

Solución:

- Representación gráfica del problema:



En la gráfica observamos que el inversionista depositó en el período 0; P = \$2 000 000 y al cabo de n = ? períodos recibirá F = \$5 000 000, a un interés i = 0,30 = 30%.

- Utilizamos la fórmula (3):

$$n = \left[\frac{5\,000\,000}{2\,000\,000} - 1 \right] / 0{,}30 = 5$$

- *La inversión duró 5 años.*

2.5 TASA DE INTERÉS

Tasa de interés (i) $\boxed{\mathbf{i = [\ (F/P) - 1\ ] / n}}$ **(4)**

La expresión (4) se obtuvo despejando **i**, tasa de interés, de la fórmula (1) e indica la tasa de interés que se desea ganar, si se espera obtener un valor futuro F cuando se deposita o ahorra un valor presente P durante un número de períodos **n**.

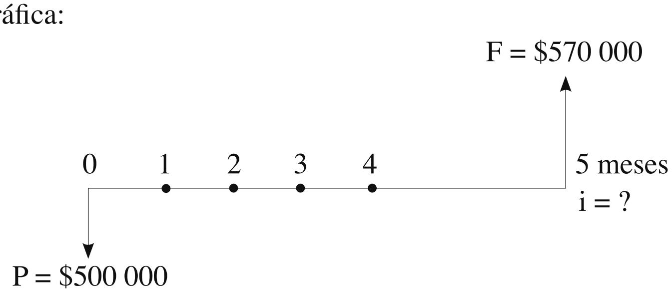
Ejemplo:

Un estudiante deposita hoy en una cuenta de ahorro su mesada mensual de \$500 000, por un período de 5 meses, al fin de los cuales recibe \$570 000. *¿Qué tasa de interés reconoce mensualmente el banco, si los intereses se pagan bajo la modalidad de interés simple?*

Solución:

- Representación gráfica:

P = \$500 000
F = \$570 000
n = 5 meses
i = ?



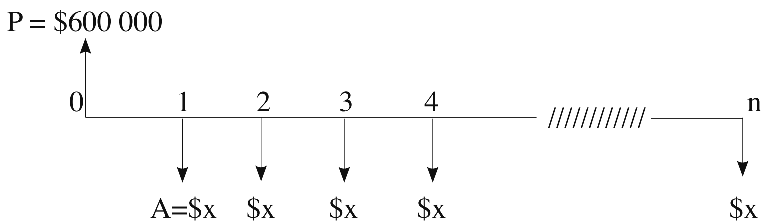
- Se depositan \$500 000 en el período 0, y se reciben al cabo de 5 períodos \$570 000. Encontremos el interés que gana el estudiante. Al reemplazar los valores en (4) obtenemos la siguiente expresión:

$$i = \left[\frac{570\,000}{500\,000} - 1 \right] / 5 = [1{,}14 - 1] /5 = 0{,}028$$

- *El banco paga* i = *2.8% mensual.*

2.6 ANUALIDADES (CUOTAS UNIFORMES)

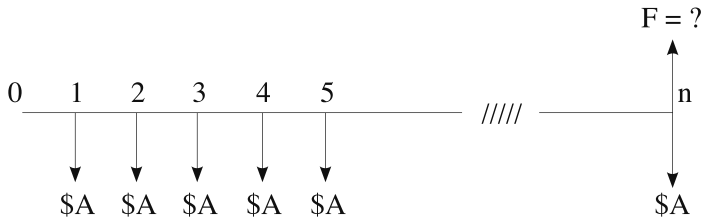
Usualmente, en la vida diaria se pactan los pagos de cuotas iguales por un crédito, para que se realicen de una forma periódica, cada mes o trimestre o semestre o año. Por ejemplo, cuando se compra en un almacén de muebles un juego de sala que tiene un valor de \$600 000, el vendedor puede proponer el pago de la deuda en 12 cuotas iguales de \$X, al inicio o al final de cada mes. Estos pagos iguales o uniformes se conocen como *anualidades* y al representarlos sobre la recta observamos:



A continuación analizaremos los dos casos: el pago de las cuotas al final del período o al inicio del mismo mes y las expresiones correspondientes generadas para sus cálculos.

2.6.1. **Futuro de una anualidad vencida**

Se acuerda depositar en **n** períodos una cantidad de \$A y se desea determinar qué cantidad estará acumulada al final de los **n** períodos. Si se reconoce un interés simple de i% por período, esta sería la gráfica:



Para determinar el valor futur*o se debe calcular el* valor futuro de cada anualidad *con la fórmula (1), y luego se deben sumar los futuros obtenidos en el período **n**:*

$F_1 = A \cdot [1+ (n-1) \cdot i]$ *Es el valor equivalente a A dentro de n-1 períodos*
$F_2 = A \cdot [1+(n-2) \cdot i]$
$F_3 = A \cdot [1+(n-3) \cdot i]$
.
.
.
$F_{n-1} = A \cdot [1+i]$
$F_n = A$

- Sumando estos valores futuros se obtiene:

$F = F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n$
$F = A \cdot [1+(n-1) \cdot i] + A \cdot [1+(n-2) \cdot i] + A \cdot [1+(n-3) \cdot i] + ... + A \cdot [1+i] + A$

- Si se factoriza A, tenemos:

$F = A \cdot [1+(n-1) \cdot i+1+(n-2) \cdot i+1+(n-3) \cdot i+ .... +1+i +1]$
$F = A \cdot [n + (n-1) \cdot i +(n-2) \cdot i +(n-3) \cdot i+ .... +i]$
$F = A \cdot n + A \cdot i \, [(n-1) + (n-2) + (n-3)+ .... +1]$

- La suma de los números naturales de 1 a (n-1) es igual $n \cdot \frac{(n-1)}{2}$

- Reemplacemos en F:

$$\boxed{\mathbf{F = \frac{n \,.\, A\,[2 + i \cdot (n\text{-}1)]}{2}}} \qquad \mathbf{(5)}$$

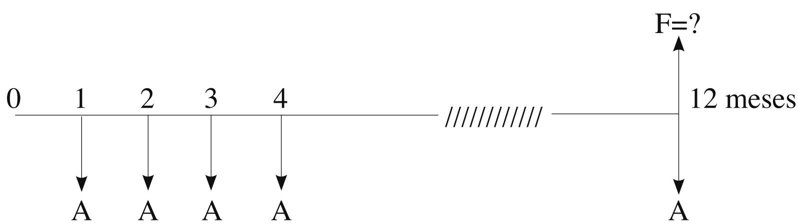
Esta expresión indica el valor futuro F a recibirse cuando finalicen los **n** períodos que equivalen a las **n** cuotas iguales vencida de $A en cada uno, a una tasa igual a **i**.

Ejemplo:

Un estudiante recibe mensualmente un giro de su padre para sus gastos, ahorra $100.000 y los deposita al final de cada mes en un banco que le reconoce un interés simple del 3% mensual. *¿Qué cantidad de dinero tendrá en su cuenta al final del año después de doce depósitos de ahorro?*

Solución:

- En la recta siguiente tenemos la siguiente representación:



$A = \$100\,000$
$i\% = 3\%$ mes
$n = 12$ meses
$F = ?$

- Reemplazamos en la ecuación (5):

$$F = \frac{100\,000 \cdot 12 \cdot [2 + 0{,}03 \cdot 11]}{2}$$

$F = 1\,398\,000$

- *El estudiante tendrá ahorrado al final del año $1 398 000.*

2.6.2 **Presente de una anualidad vencida**

Para determinar el valor presente de una anualidad vencida se remplaza la expresión (1) en (5):

$$F = P \cdot (1 + i \cdot n) = \frac{A \cdot n \cdot [2 + i \cdot (n-1)]}{2}$$

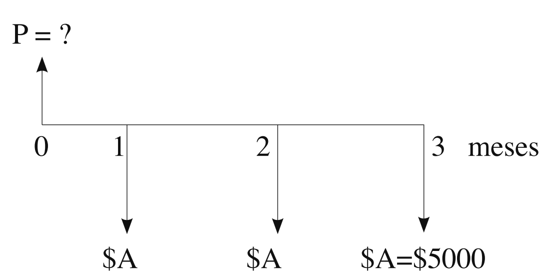
$$\boxed{\mathbf{P = \frac{n \cdot A \cdot [2 + i \cdot (n-1)]}{2 \cdot (1 + i \cdot n)}}} \qquad \textbf{(6)}$$

- *Hemos expresado que recibir hoy \$P equivale a pagar **n** cuotas vencidas de \$A en **n** períodos, a una tasa **i** por período.*

Ejemplo 1:

Durante tres meses se depositan mensualmente \$5000 en una cuenta, el dinero pierde su poder adquisitivo a una tasa del 2,5% mensual. *¿Cuál es el valor presente equivalente a estos tres pagos que se realizan al final de cada mes?*

Solución:



A = \$5000
n = 3 meses
P = ?
i = 0,025 = 2,5% mensual

$$P = \frac{5000 \cdot 3 \cdot [2 + 2(0{,}025)]}{2 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 3)}$$

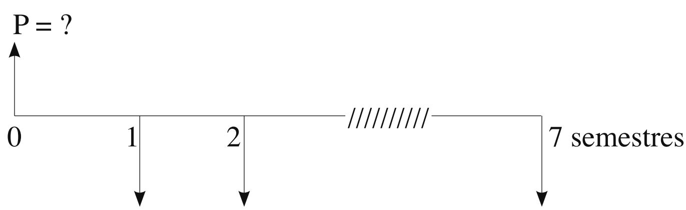
$$P = \$14302{,}33$$

- *Pagar tres cuotas de \$5000 a una tasa de 2,5% mensual, es equivalente a pagar hoy \$14302,33,*

Ejemplo 2:

Se realiza un préstamo de \$4 000 000 y el pacto es pagarlo en siete cuotas iguales, con una tasa de interés semestral de 15%. *Se desea calcular el valor de la cuota y construir una matriz de pago que muestre cómo se distribuye la cuota entre intereses y abonos a capital.*

Solución:



i = 15% semestral
A = ?

- Con el despeje de A en la fórmula (6) obtenemos:

$$\mathbf{A = \frac{2 \cdot P \cdot [1 + n \cdot i]}{n [2 + (n - 1) \cdot i]}}$$

- Cuando se reemplaza en la fórmula se tiene:

$$A = \frac{\$4\,000\,00 \cdot 2 \cdot [1 + 7 \cdot 0{,}15]}{7\,[2 + (7-1) \cdot 0{,}15]} = \$807\,881{,}77$$

- *La cuota que se debe cancelar semestralmente es de $807 881,77*

Matriz de pago

Semestre	Cuota	Intereses	Abono a capital	Saldo
0				$4 000 000,00
1	$807 881,77	$413 793,10	$394 088,67	$3 605 911,33
2	$807 881,77	$354 679,80	$453 201,97	$3 152 709,36
3	$807 881,77	$295 566,50	$512 315,27	$2 640 394,09
4	$807 881,77	$236 453,20	$571 428,57	$2 068 965,52
5	$807 881,77	$177 339,90	$630 541,87	$1 438 423,65
6	$807 881,77	$118 226,60	$689 655,17	$748 768,47
7	$807 881,77	$59 113,30	$748 768,47	$0,00
Totales	$5 655 172,41	$1 655 172,41	$4 000 000,00	

En la tabla observamos que la suma de las siete cuotas es de $5 655 172,41 y el capital que se debe cancelar es de $4 000 000,00; luego la diferencia de $1 655 172,41 representa los intereses que se deben pagar por el préstamo. Es importante anotar que cuando se trabaja con interés simple, los intereses de cada período no se calculan sobre saldo, sino que los intereses totales se distribuyen mediante un factor en cada período mediante la siguiente expresión:

$$\text{Interés del período} = I \cdot (n+1 - n_j) \cdot \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

I = Intereses totales

n = Número de períodos

n_j = Período de análisis

El pago de los intereses se puede pactar de dos formas: cancelar al inicio con una mayor cantidad de intereses y menor abono a capital o pagar al inicio una menor cantidad de intereses y menor abono a capital. Esto implicaría que la tabla de amortización se invierte.

Para calcular los intereses correspondientes al período uno (1) tenemos:
Intereses del período uno (1) es igual a: \$1 655 172,41 · [7+1-1] · 2/[7 · 7+1)]= **\$413 793,103**, y así sucesivamente.

El abono a capital es la diferencia entre la cuota y los intereses correspondientes a cada período.

Abono a capital = Cuota – Intereses del período

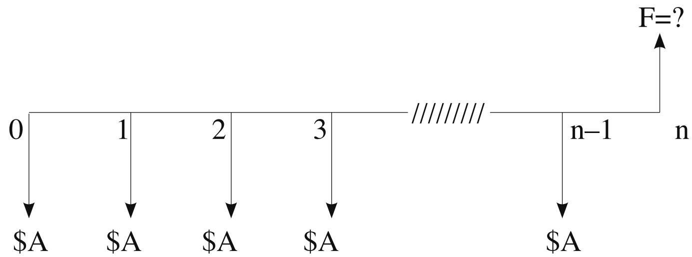
La expresión (6) no representa la sumatoria de los presentes de las anualidades y se puede comprobar con la siguiente expresión:

$$P=A \cdot [[[1+(n-1) \cdot i]/(1+n \cdot i)]+[[1+(n-2) \cdot i]/(1+n \cdot i)]+[[1+(n-3) \cdot i]/(1+n \cdot i)]+ \ldots\ldots\ldots\ldots +[[1+(n-n) \cdot i]/(1+n \cdot i)]]]$$

La comprobación se deja para el lector inquieto.

2.6.3 Futuro de la anualidad anticipada

*En esta sección analizaremos el caso donde los pagos uniformes se realizan al inicio de cada período y se desea determinar el valor que se acumula al final de **n** períodos*. La representación gráfica es:



- Se debe llevar cada cuota a valor futuro en el período **n** con el apoyo de la fórmula (1):