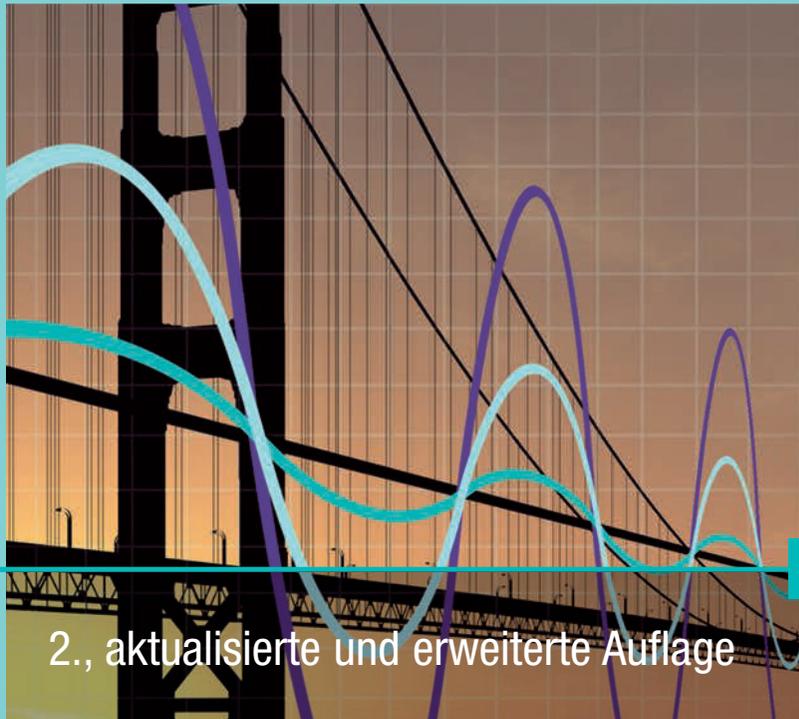


Kerstin Rjasanowa

Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen

Mit Fallstudien und numerischen Lösungen



2., aktualisierte und erweiterte Auflage



HANSER

Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp · Aufgabensammlung zur Baustatik

Dallmann · *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Lauer · *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Engel/AI-Akel · *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Fouad/Zapke · *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann · *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen · *Festigkeitslehre – klipp und klar
für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann · *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke · *Physik im Bauwesen*

Malpricht · *Schalungsplanung*

Proporowitz (Hrsg.) · *Baubetrieb – Bauverfahren*

Proporowitz (Hrsg.) · *Baubetrieb – Bauwirtschaft*

Prüser · *Konstruieren im Stahlbetonbau 1*

Prüser · *Konstruieren im Stahlbetonbau 2*

Rjasanowa · *Mathematik für Bauingenieure*

Rjasanowa · *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen*

Kerstin Rjasanowa

Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen

Mit Fallstudien und numerischen Lösungen

2., aktualisierte und erweiterte Auflage

Mit 164 Bildern, 54 Tabellen, 35 Beispielen,
45 Aufgaben und 22 Fallstudien



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren

Prof. Dr. rer. nat. Kerstin Rjasanowa
Hochschule Kaiserslautern
Fachbereich Bauen und Gestalten
<http://www.fh-kl.de/~kerstin.rjasanowa>

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München
Internet: <http://www.hanser.de>

Lektorat: Philipp Thorwirth
Herstellung: Denise Jäkel
Satz: Kerstin Rjasanowa
Coverconcept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Kösel, Krugzell
Printed in Germany
ISBN: 978-3-446-44448-5
E-Book-ISBN: 978-3-446-44585-7

Vorwort

Das vorliegende Buch hat numerische Methoden und deren Anwendung im Bauingenieurwesen zum Gegenstand. Es wendet sich an Leser, die sich mit der physikalisch-mathematischen Modellierung und Realisierung technischer Aufgaben im Bereich des Bauingenieurwesens auf dem Computer (Bauinformatik) beschäftigen oder selbst Programme dafür erstellen. Das sind vorwiegend Studierende und Dozenten des Bauingenieurwesens, der Technomathematik und Softwareentwickler im Bauingenieurwesen.

Numerische Methoden bilden die Grundlage für die Erstellung von Software in vielen Gebieten des Bauingenieurwesens, die z. B. die Simulation technischer Systeme anstelle aufwendiger oder teurer Experimente ermöglicht. Voraussetzung dafür ist, dass die praktischen Aufgabenstellungen analysiert und relevante physikalisch-mathematische Modelle abgeleitet werden. Meistens sind im Resultat lineare oder nichtlineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme zu lösen, Integrale und Ableitungen zu bestimmen, Funktionen zu approximieren oder Anfangs- und Randwertprobleme zu lösen. Analytische Lösungen, wenn sie überhaupt existieren, können in den überwiegenden Fällen nur unter großem Aufwand bestimmt werden. Die oft in solchen Situationen verwendeten Faustformeln oder Diagramme aus Handbüchern sind nicht immer zeitgemäß, weil sie zu ungenau und nicht adäquat zur Komplexität der Problemstellung sind. An dieser Stelle kommen numerische Lösungsverfahren zum Einsatz. Oft verwendete Näherungsverfahren werden im Buch angegeben und, wo sinnvoll, theoretisch begründet. Insbesondere wird die Frage nach der Brauchbarkeit der Näherungslösungen beantwortet. Eine effiziente und genaue Simulation der Probleme ist nur bei guter Abstimmung von physikalischem Modell, numerischem Verfahren und rechen technischer Umsetzung möglich. Eine einseitige Optimierung nur einer dieser drei Lösungsabschnitte führt hingegen nicht zum Ziel. Das wird im Buch an konkreten Beispielen vermittelt. Die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der Verfahren werden genau beschrieben. Jedes angegebene Verfahren wird an Zahlenbeispielen illustriert. Als Zusammenfassung wird der Algorithmus des Verfahrens so dargestellt, dass unmittelbar danach Software erstellt werden kann.

Die angegebenen Verfahren werden an Fallstudien aus der Praxis des Bauingenieurwesens angewendet, die allgemeine Problemklassen repräsentieren. Dabei sind z. B. die Bereiche Technische Mechanik, Wasserbau, Siedlungswasserwirtschaft, Baubetrieb und Straßenbau vertreten. Die Fallstudien weisen einheitliche Gliederung in „Praktische Aufgabenstellung“, „Mathematisches Modell“, „Numerisches Verfahren“ und „Berechnungsergebnisse“ auf. Das jeweilige praktische Problem wird mit klarer Benennung der Eingabegrößen und der gesuchten Größen analysiert, und die im Bauingenieurwesen üblichen Modelle werden abgeleitet. Insbesondere erhält der Leser eine genaue mathematische Analyse ihrer Lösbarkeitseigenschaften. Die Anwendung eines geeigneten numerischen Verfahrens wird begründet und konkret angegeben. Dabei werden aktuelle, moderne und effiziente Methoden vorgestellt. Wenn unterschiedliche numerische Verfahren zum Einsatz kommen können, werden ihre Vor- und Nachteile genannt. Sonderfälle und ihre Behandlung werden aufgezeigt, die bei der Erstellung von Computerprogrammen zu berücksichtigen sind. Eigene Tests an konkreten Berechnungsbeispielen zeigen gleichzeitig die Funktionsfähigkeit der Algorithmen und der realisierten Computerprogramme. Anschließend erfolgt die Diskussion und Bewertung der Ergebnisse.

Numerische Verfahren und Fallstudien betreffen die Gebiete „Lineare Gleichungssysteme“, „Nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme“, „Interpolation“, „Numerische Integration“, „Numerische Differenziation“, „Ausgleichsrechnung“ und „Gewöhnliche Differenzialgleichungen“ (Anfangswert- und Randwertaufgaben). Alle Kapitel enthalten Übungsaufgaben vorwiegend aus dem Bauingenieurwesen, die gleichzeitig weitere Anwendungsgebiete der numerischen Methoden aufzeigen und damit auch ihre Praxisnähe illustrieren. Das Lösen der Aufgaben dient der Vertiefung und zusammenfassenden Kontrolle der gewonnenen Kenntnisse und regt zur eigenen Implementierung der numerischen Algorithmen an. Das Buch ist klar strukturiert. Alle Gedankenschritte sind durch Überschriften der Absätze genannt. Beweise zu theoretischen Grundlagen sind, sofern vorhanden, klein gedruckt. Das Verständnis des Buches ist beim Überspringen nicht beeinträchtigt. Jedoch

zeigen die angegebenen Beweise Ideen für die theoretische Absicherung der numerischen Methoden bei den Anwendungsbeispielen, die auch bei neuen Aufgaben Verwendung finden können.

Auf meiner Homepage www.fh-kl.de/kerstin.rjasanowa ist für jede Fallstudie ein funktionsfähiges Computerprogramm in der Programmiersprache C oder mit dem Computeralgebrasystem MathCAD bereitgestellt. Damit besteht für den Leser zusätzlich zum Durchführen eigener Testrechnungen auch die Möglichkeit, anhand von Programmierbeispielen Anregungen für die eigene Softwareentwicklung zu entnehmen.

Der Leser lernt, praktische Aufgaben mit geeigneten numerischen Methoden zu behandeln. Aufgrund der strukturierten Analyse und Begründung der Verfahren mit ihren Einsatzmöglichkeiten sind diese auch auf weitere praktische Aufgaben übertragbar. Der Bauingenieur wird in die Lage versetzt, Problemstellungen, für die keine Softwarepakete oder Handbücher zur Verfügung stehen, zu lösen. Durch die Angabe der Algorithmen für die Verfahren können selbstständig Implementierungen auf unterschiedlichen Computerplattformen vorgenommen werden. Dozenten im Fach Bauinformatik oder Technomathematik können die vollständig hergeleiteten und praktisch realisierten Fallstudien in Vorlesungen oder als praktische Übung verwenden. Die notwendige, aber oft aufwendige Recherche in der Ingenieurliteratur sowie der Literatur zu numerischen Methoden ist nicht erforderlich.

Auf diesem Wege möchte ich allen herzlich danken, die mich bei diesem Buchvorhaben unterstützten. Besonderer Dank gilt meinem ehemaligen Kollegen Priv.-Doz. Dr. Andrä (habilitiert an der TU Karlsruhe, jetzt Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik Kaiserslautern), der das gesamte Manuskript mehrfach gründlich gelesen und mir viele Hinweise zur mathematischen Darstellung, zu praktischen Beispielen insbesondere im Bereich der Technischen Mechanik und zur Literatur gegeben hat. In sehr sachlichen Diskussionen erörterten wir vor allem die Theorie der numerischen Verfahren, die die Grundlage ihrer Funktionsfähigkeit bei praktischen Anwendungen ist. Sehr herzlich bedanke ich mich bei meinen Kollegen des Studienganges Bauingenieurwesen Prof. Dr. Schanzenbach, Prof. Dr. Lang, Prof. Dr. Rühl, Prof. Dr. Thamfald und Prof. Dr. Nitsch, die geduldig eine kritische Durchsicht der Fallstudien vornahmen und denen ich viele Anregungen zu ihrer korrekten Darstellung verdanke. Großer Dank gilt ebenfalls meinem Mann und Kollegen, der das Manuskript aufmerksam auf durchgehend mathematisch präzise und verständliche Darstellung und Gestaltung prüfte. Herzlichen Dank möchte ich Dr. Grzhibovskis (Fachrichtung 6.1 - Mathematik der Universität des Saarlandes) für die vielen Hilfestellungen bei der Handhabung von Latex und Mathematica aussprechen. Der Assistentin des Studienganges Bauingenieurwesen, Frau Lange, bin ich sehr dankbar für die Unterstützung in vielen technischen Fragen während des Entstehens des Buches. Nicht zuletzt gilt mein Dank den Studierenden, die mich während meiner langjährigen Vorlesungen „Numerische Methoden im Bauingenieurwesen“ und ihrer Übungen am Computer ebenfalls zu dieser Darstellung motivierten. Bei Frau Fritzsich und Frau Kaufmann vom Carl Hanser Verlag bedanke ich mich sehr für die Unterstützung des Buchprojektes und die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Kaiserslautern, im September 2010

Kerstin Rjasanowa

Die 2., korrigierte Auflage des vorliegenden Buches enthält zusätzlich zur 1. Auflage ausführlich beschriebene Lösungswege bzw. Hinweise zu allen Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels. Insbesondere erfolgte in den Lösungen zu den Aufgaben in Kapitel 2 „Nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme“ eine umfassende vergleichende Analyse zur Anwendung unterschiedlicher Iterationsverfahren. Während des Bearbeitens der Aufgaben gewinnt der Leser praktische Erfahrungen mit den vorgestellten Algorithmen und ihrem Einsatz bei konkreten Anwendungen. Wo möglich sind Beispielrechnungen angegeben, damit der Leser seine eigenen Ergebnisse überprüfen kann. Alle Lösungen sind mit MathCAD-Arbeitsblättern realisiert, die unter der Adresse www.hanser-fachbuch.de/9783446444485 zur Verfügung stehen. Die dafür erforderlichen Algorithmen sind als eigene Funktionen in der Datei Mybib.xcmd programmiert und hinterlegt und müssen in jedes Arbeitsblatt

eingebunden werden. Für einige dieser Algorithmen gibt es auch MathCAD-eigene Funktionen, die alternativ benutzt werden können und die eigene Überlegungen bestätigen. Da die Algorithmen und Lösungswege plattformunabhängig sind, kann aber auch mit jeder geeigneten Programmiersprache bzw. jedem anderen Computeralgebrapaket gearbeitet werden.

Außerdem stehen die für jede Fallstudie erstellten Computerprogramme in der Programmiersprache C sowie MathCAD-Arbeitsblätter dafür jetzt unter der Adresse www.hanser-fachbuch.de/9783446444485 bereit. Für die gewissenhafte Durchsicht des Kapitels „Lösungen“ bedanke ich mich sehr herzlich bei meinem Kollegen des Studienganges Bauingenieurwesen, Prof. Dr. Schanzenbach. Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Ph. Thorwirth, der mich sehr motivierte, das Kapitel „Lösungen“ zum Buch zu ergänzen.

Kaiserslautern, im Januar 2015

Kerstin Rjasanowa

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Gleichungssysteme – direkte Verfahren	13
1.1	Lineare Gleichungssysteme	14
1.2	Gauß-Algorithmus und LU-Zerlegung	17
1.3	Fallstudie: Berechnung von Stabkräften im Fachwerk	26
1.4	Cholesky-Zerlegung	32
1.5	Fallstudie: Berechnung von Verschiebungen und Stabkräften im Fachwerk	37
1.6	Aufgaben	47
2	Nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme	49
2.1	Nichtlineare Gleichungen	49
2.1.1	Einleitung	50
2.1.2	Newton-Verfahren	51
2.1.3	Verfahren der einfachen Iteration	55
2.1.4	Bisektionsverfahren	58
2.1.5	Regula falsi und Sekantenverfahren	60
2.2	Fallstudie: Wasserabsenkung in einem vollkommenen Brunnen	63
2.3	Fallstudie: Spiegellinie eines Fließgewässers	68
2.4	Fallstudie: Berechnung einer Streichwehranlage	73
2.5	Fallstudie: Berechnung des internen Zinsfußes	76
2.6	Nichtlineare Gleichungssysteme	80
2.7	Fallstudie: Berechnung von Wasserversorgungsnetzen	83
2.8	Fallstudie: Berechnung von Dübelkräften in einer Ankerplatte	91
2.9	Aufgaben	96
3	Interpolation	99
3.1	Polynominterpolation	99
3.2	Newton-Interpolation	101
3.3	Lagrange-Interpolation	108
3.4	Kubische Interpolationssplines	112

3.5	Fallstudie: Straßenachsen in CAD-Systemen	120
3.6	Kubische Approximationssplines	127
3.7	Fallstudie: Proctorversuch	131
3.8	Bilineare Interpolation	133
3.9	Fallstudie: Berechnung eines unvollkommenen Überfalls	136
3.10	Aufgaben	138
4	Numerische Integration	140
4.1	Quadraturformel und Fehlerabschätzung	140
4.2	Geschlossene Newton-Cotes-Formeln	142
4.2.1	Rechteckregel	142
4.2.2	Trapezregel	142
4.2.3	Simpsonregel	142
4.2.4	Newton-3/8-Regel	143
4.3	Offene Newton-Cotes-Formeln	143
4.3.1	Mittelpunkt-Rechteckregel	144
4.3.2	Offene Newton-Cotes-Formel mit zwei Stützstellen	144
4.3.3	Offene Newton-Cotes-Formel mit drei Stützstellen	145
4.4	Zusammengesetzte Quadraturformeln	145
4.4.1	Geschlossene Newton-Cotes-Formeln	146
4.4.2	Offene Newton-Cotes-Formeln	147
4.5	Gauß-Quadraturformeln	149
4.6	Methode von Romberg	153
4.7	Fallstudie: Berechnung von Punkten einer Klothoide	156
4.8	Fallstudie: Mengenermittlung	161
4.9	Fallstudie: Seerückhalt bei gesteuertem Abfluss	164
4.10	Aufgaben	167
5	Numerische Differenziation	170
5.1	Konstruktion von Ableitungsformeln mit Interpolationspolynomen	170
5.1.1	Fehler bei der Approximation von Ableitungen	173
5.1.2	Konstruktion mit der Taylor-Zerlegung	175

5.1.3	Rekursive Konstruktion	177
5.2	Differenziation fehlerbehafteter Funktionen	179
5.3	Fallstudie: Durchbiegung eines Balkens	181
5.4	Aufgaben	183
6	Ausgleichsrechnung	185
6.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	185
6.2	Lineare Ausgleichsprobleme	187
6.3	Fallstudie: Plattendruckversuch	191
6.4	Fallstudie: Kelchüberfälle bei vollkommenem Abfluss	193
6.5	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	196
6.6	Fallstudie: Ermittlung des Sättigungsverlaufes poröser Medien	200
6.7	Aufgaben	202
7	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	205
7.1	Anfangswertprobleme	205
7.1.1	Polygonzugverfahren von Euler	206
7.1.2	Trapezverfahren	207
7.1.3	Diskretisierungsfehler und Fehlerordnung	210
7.1.4	Runge-Kutta-Verfahren	213
7.1.5	Verfahren der Taylor-Reihe	217
7.2	Fallstudie: Flusslaufrückhalt	220
7.3	Fallstudie: Seerückhalt	224
7.4	Fallstudie: Schwingungsverhalten bei Stoßbelastung	228
7.5	Randwertprobleme – Methode der finiten Elemente (FEM)	231
7.6	Fallstudie: Biegelinie eines Balkens	238
7.7	Aufgaben	248
8	Lösungen	249
9	Lösungen	250
	Kapitel 1	250
	Kapitel 2	252

Kapitel 3	257
Kapitel 4	258
Kapitel 1	262
Kapitel 6	264
Kapitel 7	266
Literaturverzeichnis	271
Sachwortverzeichnis	273

1 Lineare Gleichungssysteme — direkte Verfahren

Viele Aufgaben im Bauingenieurwesen führen auf das Lösen linearer Gleichungssysteme. Dazu gehört z. B. die Berechnung von Stabkräften und Verschiebungen im Fachwerk. Das Newton-Verfahren zur Lösung nicht-linearer Gleichungssysteme (siehe **Kapitel 2**) führt ebenfalls zu linearen Gleichungssystemen, ebenso wie die Interpolation und Approximation mit Splines (siehe **Kapitel 3**), die Ausgleichsrechnung (siehe **Kapitel 6**) oder die Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) bei statischen oder thermischen Berechnungen (siehe **Kapitel 7**). Wenn die Anzahl der Unbekannten nicht zu groß ist, können direkte Verfahren, bei denen die Lösung des Gleichungssystems genau berechnet wird, angewendet werden. Dazu gehört der Gauß-Algorithmus und die Cholesky-Zerlegung. Die Cholesky-Zerlegung stellt spezielle Anforderungen an die Koeffizientenmatrix, während der Gauß-Algorithmus ein allgemeines Lösungsverfahren von grundlegender Bedeutung ist.

Bezeichnungen und Voraussetzungen

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	Matrix A mit m Zeilen und n Spalten
a_{ij}	Element der Matrix A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte
$L \in \mathbb{R}^{n \times n}$	untere Dreiecksmatrix L , wenn $l_{ij} = 0$ für $i < j$
$U \in \mathbb{R}^{n \times n}$	obere Dreiecksmatrix U , wenn $u_{ij} = 0$ für $i > j$
$D \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Diagonalmatrix D , wenn $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$
$C = AB$	Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den Elementen $c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$
$(AB)C = A(BC)$	ist Produkt der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$
$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$	Assoziativität der Matrixmultiplikation Transponierte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a_{ji}^T = a_{ij}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$
$(AB)^T = B^T A^T$	Transponiertensatz, $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$
A^{-1}	Inverse der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$ A $	Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$ AB = A B $	Determinante des Produktes der Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$E^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Einheitsmatrix, $e_{ii}^n = 1, e_{ij}^n = 0$ für $j \neq i$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$	Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit n Komponenten
$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	Skalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$
$(x, y) = y^T x$	Skalarprodukt der Vektoren x, y als Matrixprodukt
$(x, Ay) = (A^T x, y)$	$x, y \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\sum_{i=a}^b c_i = 0, a > b$	Summe ist gleich Null, wenn der obere Summationsindex kleiner als der untere ist.

Matrizen und Vektoren werden mit oberen Indizes bezeichnet, z. B. die Matrix $E^3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, der Vektor $F^2 \in \mathbb{R}^2$.

Komponenten von Matrizen und Vektoren und andere skalare Größen werden mit unteren Indizes bezeichnet, z. B. $a_{ij} \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}$.

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Zuerst wird der Begriff des linearen Gleichungssystems, seiner Koeffizientenmatrix, seiner rechten Seite und seiner Lösung erklärt. Voraussetzung für das Lösen linearer Gleichungssysteme mit direkten Verfahren ist die Existenz der Lösung und ihre Eindeutigkeit. Der Nachweis dieser Eigenschaften sichert die erfolgreiche Anwendung solcher Verfahren, insbesondere auf dem Computer. Im Folgenden wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben und an Zahlenbeispielen erläutert.

Definition 1.1

Die Gesamtheit der n Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1.1)$$

mit den gegebenen **Koeffizienten** $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und den **rechten Seiten** $b_i \in \mathbb{R}$ sowie den **Unbekannten** x_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$, heißt **lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten**.

Lineares Gleichungssystem

Im linearen Gleichungssystem (1.1) stimmt die Anzahl seiner Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten überein. In diesem Kapitel werden ausschließlich solche linearen Gleichungssysteme betrachtet.

Notation

Das lineare Gleichungssystem (1.1) kann kürzer notiert werden mithilfe der **Matrixschreibweise**

$$Ax = b, \quad (1.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **Koeffizientenmatrix** und der Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ **rechte Seite** des Gleichungssystems. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist der **Vektor der Unbekannten**. Können die Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dieses Vektors so angegeben werden, dass alle Gleichungen in (1.1) gleichzeitig erfüllt sind, ist x **Lösung** des Gleichungssystems.

Matrixschreibweise

Beispiel 1.2

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es hat die Lösung $(x_1, x_2)^\top = (2, 1)^\top$, wie durch Einsetzen von $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ in die beiden Gleichungen überprüft werden kann.

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder genau eine oder unendlich viele oder gar keine Lösung. Hat es genau eine Lösung, heißt es **eindeutig lösbar**.

Die Existenz der Lösung des Gleichungssystems (1.2) und ihre Eindeutigkeit garantiert der folgende Satz.

Das Gleichungssystem (1.2) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschieden von Null ist, d. h. wenn die Koeffizientenmatrix **regulär** ist.

Beispiel 1.4

- Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 18 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung, denn die Determinante seiner Koeffizientenmatrix beträgt 3. Die Lösung lautet $(x_1, x_2)^\top = (12, -3)^\top$.

- Die Determinante der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 18 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$$

beträgt Null. Es hat keine Lösung. Umstellen der ersten Gleichung nach x_1 ergibt $x_1 = 6 - 2x_2$. Setzt man diese in die zweite Gleichung ein, so folgt $12 = 10$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

- Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 18 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

hat dieselbe Koeffizientenmatrix wie im vorherigen Beispiel. Allerdings hat es unendlich viele Lösungen, die in folgender Gestalt geschrieben werden können:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zum Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems (1.2) kann der Gauß-Algorithmus (siehe [19]) auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ angewendet werden. Das Ziel der Umformungen des linearen Gleichungssystems (1.2) besteht im Erzeugen der sogenannten **Dreiecksgestalt** der Koeffizientenmatrix, bei der alle Elemente unterhalb

Lösungsmenge und eindeutige Lösbarkeit

Satz 1.3

Lösungsmenge

Berechnung der Lösung mit dem Gauß-Algorithmus

ihrer Hauptdiagonale gleich Null sind und auf der Hauptdiagonale alle Elemente gleich Eins sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind nur Umformungen zulässig, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems (1.2) nicht verändern. Solche äquivalenten Umformungen sind:

1. die Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl verschieden von Null,
2. die Addition zweier Gleichungen,
3. das Vertauschen der Reihenfolge von Gleichungen.

Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus kann für die Zeilennummern $i = 1, \dots, n$ folgendermaßen durchgeführt werden:

1. Durch Zeilenvertauschung wird $a_{ii} \neq 0$ erreicht und anschließend die i -te Zeile mit dem Reziproken $1/a_{ii}$ multipliziert, sodass das Element in der i -ten Zeile und i -ten Spalte danach eine Eins ist. (Gibt es keine solche Vertauschung, so ist die Koeffizientenmatrix nicht regulär, und nach **Satz 1.3** ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.)
2. Damit in der i -ten Spalte unterhalb dieses Elementes Nullen entstehen, wird zur k -ten Zeile das $(-a_{ki})$ -fache der i -ten Zeile addiert, $k = i + 1, \dots, n$.

Das so umgeformte Gleichungssystem wird, beginnend mit der letzten Gleichung, nach den Unbekannten x_n, \dots, x_1 aufgelöst, indem die zuvor bereits ermittelten Unbekannten in die aktuelle Gleichung eingesetzt werden.

Wenn die Voraussetzung von **Satz 1.3** erfüllt ist, so kann stets die Dreiecksgestalt der Koeffizientenmatrix erzeugt werden. Ist hingegen die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null, so ergibt sich bei der vollständigen Durchführung des Gauß-Algorithmus bei mindestens einem Hauptdiagonalelement eine Null. Erweist sich dabei die entsprechende rechte Seite ungleich Null, so hat das Gleichungssystem keine Lösung, andernfalls unendlich viele.

Lösung mit Gauß-Algorithmus

Beispiel 1.5

1. Die Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus für das erste lineare Gleichungs-

systems aus **Beispiel 1.4** lauten

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 2 & 5 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $x_2 = -3$. Setzt man diese in die erste ein, erhält man unmittelbar $x_1 = 6 - 2x_2 = 12$.

2. Die Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus für das zweite lineare Gleichungssystem aus **Beispiel 1.4** lauten

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Das Hauptdiagonalelement der Koeffizientenmatrix in der zweiten Zeile ist gleich Null, die entsprechende rechte Seite ist gleich 1. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

3. Die Umformungen mit dem Gauß-Algorithmus für das dritte lineare Gleichungssystem aus **Beispiel 1.4** lauten

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 18 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Das Hauptdiagonalelement der Koeffizientenmatrix in der zweiten Zeile ist gleich Null, die entsprechende rechte Seite auch. Die zweite Gleichung des Gleichungssystems ist automatisch erfüllt. Wählt man $x_2 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, so ergibt sich aus der ersten Gleichung unmittelbar $x_1 = 6 - 2x_2 = 6 - 2t$. Man erhält so die bereits in **Beispiel 1.4** angegebenen unendlich vielen Lösungen.

1.2 Gauß-Algorithmus und LU-Zerlegung

Jeder Schritt des Gauß-Algorithmus ist als Multiplikation des linearen Gleichungssystems mit einer unteren Dreiecksmatrix darstellbar. Auf dieser Grundlage wird erklärt, dass die Koeffizientenmatrix in ein Produkt aus unterer und oberer Dreiecksmatrix zerlegbar ist. Der Algorithmus zur Berechnung dieser Matrizen wird angegeben. Das lineare Gleichungssystem wird damit in zwei Schritten aufgelöst. Im ersten Schritt, dem Vorwärtseinsetzen, ist ein lineares Gleichungssystem mit der unteren Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix zu lösen und im zweiten Schritt, dem Rückwärtseinsetzen, ein lineares Gleichungssystem mit der oberen Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix. Diese beiden Gleichungssysteme sind sukzessive durch Einsetzen der bereits ermittelten Komponenten des Lösungsvektors in die nächste Gleichung auflösbar, beginnend mit der ersten bzw. letzten Gleichung. Die Algorithmen dafür werden angegeben.

Wie bereits in **Abschnitt 1.1** geschildert, besteht das Ziel des Gauß-Algorithmus darin, durch äquivalente Umformungen des linearen Gleichungssystems (1.2) ein lineares Gleichungssystem

Ziel des Gauß-Algorithmus

$$Ux = \tilde{b}, \quad U \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

zu erhalten, dessen Koeffizientenmatrix eine obere Dreiecksmatrix U mit von Null verschiedenen Hauptdiagonalelementen ist:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Unbekannte x_n ergibt sich dann unmittelbar aus der letzten Gleichung, die Unbekannte x_{n-1} durch Einsetzen von dem berechneten x_n in die vorletzte Gleichung usw. Der genaue Algorithmus zur Berechnung der Unbekannten x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 wird unten angegeben.

Schritte des Gauß-Algorithmus als Matrixmultiplikation

Jeder Schritt des Gauß-Algorithmus bedeutet die Multiplikation des linearen Gleichungssystems (1.2) mit einer unteren Dreiecksmatrix.

Die Multiplikation der k -ten Gleichung mit einer reellen Zahl λ entspricht der Multiplikation des linearen Gleichungssystems (1.2) von links mit der Diagonalmatrix

$${}_k \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

denn für einen Spaltenvektor $(s_1, \dots, s_k, \dots, s_n)^\top$ gilt

$${}_k \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ \lambda s_k \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Das Produkt der Diagonalmatrix (1.4) mit der Koeffizientenmatrix erhält man nach Multiplikation ihrer n Spaltenvektoren gemäß (1.5). Entsprechend ergibt sich das Produkt der Diagonalmatrix (1.4) mit dem Vektor der rechten Seite des linearen Gleichungssystems.

Die Addition der k -ten zur l -ten Gleichung entspricht der Multiplikation

Die Inverse einer unteren Dreiecksmatrix ist wieder eine untere Dreiecksmatrix. Die Matrix G^{-1} ist daher eine untere Dreiecksmatrix, und mit der Bezeichnung $G^{-1} = L$ lautet die Matrizen Gleichung (1.8)

$$A = LU. \quad (1.9)$$

Durchführbarkeit des Gauß-Algorithmus

Voraussetzung für die Durchführbarkeit des Gauß-Algorithmus ist, dass im l -ten **Eliminationsschritt**, $l = 1, 2, \dots, n - 1$,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(l-1)} & a_{12}^{(l-1)} & \dots & a_{1l}^{(l-1)} & \dots & a_{1n}^{(l-1)} & b_1^{(l-1)} \\ 0 & a_{22}^{(l-1)} & \dots & a_{2l}^{(l-1)} & \dots & a_{2n}^{(l-1)} & b_2^{(l-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ll}^{(l-1)} & \dots & a_{ln}^{(l-1)} & b_l^{(l-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nl}^{(l-1)} & \dots & a_{nn}^{(l-1)} & b_n^{(l-1)} \end{array} \right)$$

das **Pivotelement** $a_{ll}^{(l-1)}$ auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden ist, denn man berechnet mit dem Quotienten

$$\begin{aligned} l_{il} &= a_{il}^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)} \quad \text{die Elemente} & (1.10) \\ a_{ik}^{(l)} &= a_{ik}^{(l-1)} - l_{il} a_{lk}^{(l-1)} \quad \text{und} \\ b_i^{(l)} &= b_i^{(l-1)} - l_{il} b_l^{(l-1)}, \quad i, k = l + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Die Existenz eines von Null verschiedenen Pivotelementes in jedem Eliminationsschritt ist durch die Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (1.2) aus **Satz 1.3** gesichert. Es gilt der folgende Satz:

Satz 1.6

Für eine reguläre Matrix A existiert vor dem l -ten Eliminationsschritt des Gauß-Algorithmus stets eine Zeilenvertauschung derart, dass das l -te Diagonalelement $a_{ll}^{(l-1)}$ verschieden von Null ist.

Zwei Schritte zur Auflösung des linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem (1.2) geht mit der Zerlegung (1.9) über in

$$LUx = b. \quad (1.11)$$

Mit der Bezeichnung

$$Ux = y$$

ergeben sich zur Lösung von (1.11) die folgenden zwei Schritte, bei denen jeweils ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist:

$$1. \quad Ly = b \quad \text{mit der Lösung } y, \quad (1.12)$$

$$2. \quad Ux = y \quad \text{mit der Lösung } x. \quad (1.13)$$

Beide linearen Gleichungssysteme lassen sich einfach auflösen.

Das lineare Gleichungssystem (1.12) lautet ausführlich

Vorwärtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Aus der ersten Gleichung in (1.14) ergibt sich

$$y_1 = b_1/l_{11}. \quad (1.15)$$

Mit dem so berechneten y_1 folgt aus der zweiten Gleichung in (1.14)

$$y_2 = (b_2 - l_{21}y_1)/l_{22},$$

damit aus der dritten Gleichung in (1.14)

$$y_3 = (b_3 - (l_{31}y_1 + l_{32}y_2))/l_{33}$$

usw. Allgemein ergeben sich die Komponenten des Vektors y sukzessive durch das **Vorwärtseinsetzen**, beginnend mit der Gleichung (1.15), und

$$y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k \right) / l_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (1.16)$$

Analog lautet das lineare Gleichungssystem (1.13) ausführlich

Rückwärtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Aus der letzten Gleichung in (1.17) folgt sofort

$$x_n = y_n/u_{nn}, \quad (1.18)$$

damit aus der vorletzten Gleichung

$$x_{n-1} = (y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n)/u_{n-1,n-1},$$

weiter aus der drittletzten Gleichung

$$x_{n-2} = (y_{n-2} - (u_{n-2,n-1}x_{n-1} + u_{n-2,n}x_n)) / u_{n-2,n-2}$$

usw. Allgemein ergeben sich die Komponenten des Vektors x sukzessive durch das **Rückwärtseinsetzen**, beginnend mit der Gleichung (1.18), und

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}x_k \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (1.19)$$

Existenz und Eindeutigkeit

Die Grundlage für die Berechenbarkeit der Elemente der Matrizen L und U liefert der folgende Satz:

Satz 1.7

Der Gauß-Algorithmus leistet unter der Voraussetzung, dass alle Pivotelemente $a_{ll}^{(l-1)}$, $l = 1, 2, \dots, n-1$, verschieden von Null sind, die Produktzerlegung einer regulären Matrix A in eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix U . Die Zerlegung $A = LU$ ist eindeutig, wenn z. B. die Diagonalelemente l_{ii} der Matrix L vorgegeben sind, $i = 1, 2, \dots, n$.

Berechnung der oberen und unteren Dreiecksmatrix

Wählt man z. B. $l_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, so lautet (1.9) ausführlich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Matrixmultiplikation ergeben sich die Elemente a_{ij} der i -ten Zeile der Matrix A als

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik}u_{kj}, \quad (1.20)$$

wobei für die Elemente der unteren Dreiecksmatrix L gilt

$$l_{ik} = 0, \quad k > i. \quad (1.21)$$

Zeilenelemente

Betrachtet man Gleichung (1.20) für $i \leq j$ und zerlegt die linke Seite in drei Summanden

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + l_{ii}u_{ij} + \sum_{k=i+1}^n l_{ik}u_{kj},$$

so verschwindet der letzte Summand wegen (1.21), und man erhält mit den zuvor bereits berechneten Elementen l_{ik} , u_{kj} , $k = 1, 2, \dots, i-1$, und der Vereinbarung $l_{ii} = 1$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad j = i, i+1, \dots, n. \quad (1.22)$$

Die Elemente a_{ji} der i -ten Spalte der Matrix A ergeben sich als

$$a_{ji} = \sum_{k=1}^n l_{jk} u_{ki}, \quad (1.23)$$

wobei für die Elemente der oberen Dreiecksmatrix U gilt

$$u_{ki} = 0, \quad k > i. \quad (1.24)$$

Betrachtet man Gleichung (1.23) für $j > i$ und zerlegt die linke Seite in drei Summanden

$$a_{ji} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} + l_{ji} u_{ii} + \sum_{k=i+1}^n l_{jk} u_{ki},$$

so verschwindet der letzte Summand wegen (1.24), und man erhält mit den zuvor bereits berechneten Elementen l_{jk} und u_{ki} , $k = 1, 2, \dots, i$,

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) / u_{ii}, \quad j = i+1, i+2, \dots, n. \quad (1.25)$$

Aus den Gleichungen (1.22), (1.25), (1.16), (1.19) ergibt sich der Gauß-Algorithmus und das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen mit folgenden Schritten:

1. Berechnung der Matrizen L und U

Für $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Für } j = i, \dots, n \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$\text{Für } j = i+1, \dots, n \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) / u_{ii}$$

2. Vorwärtseinsetzen

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Spaltenelemente

Algorithmus der LU-Zerlegung

3. Rückwärtseinsetzen

$$x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right) / u_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Lösung mit der LU-Zerlegung

Beispiel 1.8

Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der LU -Zerlegung der Koeffizientenmatrix.

Aus der Auswertung der ersten Zeile der Koeffizientenmatrix mit der Matrizen-
gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

erhält man unmittelbar

$$u_{11} = 3, \quad u_{12} = 6, \quad u_{13} = 9.$$

Aus der Auswertung der ersten Spalte der Koeffizientenmatrix folgt

$$l_{21} u_{11} = 2 \quad \text{und somit} \quad l_{21} = 2/3,$$

$$l_{31} u_{11} = 1 \quad \text{und somit} \quad l_{31} = 1/3.$$

Die Auswertung der zweiten Zeile der Koeffizientenmatrix ergibt

$$l_{21} u_{12} + u_{22} = 5 \quad \text{und somit} \quad u_{22} = 1,$$

$$l_{21} u_{13} + u_{23} = -2 \quad \text{und somit} \quad u_{23} = -8,$$

die zweite Spalte liefert

$$l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = 3 \quad \text{und somit} \quad l_{32} = 1.$$

Schließlich erhält man aus der dritten Zeile

$$l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = -1 \quad \text{und somit} \quad u_{33} = 4.$$

Nach der LU -Zerlegung der Koeffizientenmatrix erfolgt gemäß (1.12) die Berechnung der Komponenten des Hilfsvektors y durch das Vorwärtseinsetzen (1.15), (1.16) aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $y_1 = 39$, $y_2 = -23$, $y_3 = 12$.

Gemäß (1.13) ergeben sich die Komponenten des Lösungsvektors x durch das Rückwärtseinsetzen (1.18), (1.19) aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ -23 \\ 12 \end{pmatrix},$$

und man erhält als Lösung $x_3 = 3$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$.

1. Um Speicherplatz bei der programmtechnischen Realisierung zu sparen, können die Elemente der Matrizen L und U anstelle der entsprechenden Elemente der Koeffizientenmatrix A gespeichert werden, falls diese danach nicht mehr benötigt werden.
2. Der Hilfsvektor y kann durch den Lösungsvektor x überschrieben werden, sodass dafür ebenfalls kein zusätzlicher Speicherplatz erforderlich ist.
3. Bei der Lösung von mehreren linearen Gleichungssystemen mit derselben Koeffizientenmatrix A , aber unterschiedlichen Vektoren der rechten Seite ist die LU -Zerlegung der Matrix A nur *einmal* durchzuführen. Lediglich Vor- und Rückwärtseinsetzen müssen neu erfolgen. Deswegen ist es sinnvoll, die drei Schritte des Gauß-Algorithmus beim Programmieren als getrennte Funktionen zu realisieren.
4. Die Anzahl der erforderlichen arithmetischen Operationen für den vollständigen Gauß-Algorithmus steigt im Wesentlichen mit der dritten Potenz der Zahl der Unbekannten an. Die Anzahl der erforderlichen arithmetischen Operationen für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen steigt lediglich im Wesentlichen mit der zweiten Potenz der Zahl der Unbekannten an.
5. Wie **Satz 1.6** zu entnehmen ist, existiert im l -ten Eliminationsschritt eine geeignete Zeilenvertauschung derart, dass das entsprechende Diagonalelement (Pivotelement) verschieden von Null ist. Für den Prozess der LU -Zerlegung bedeutet das, dass das Element u_{ll} in (1.19) verschieden von Null sein muss - andernfalls ist eine Zeilenvertauschung mit einer der Folgezeilen ($(l+1)$ -te bis n -te) vorzunehmen. Sinnvoll ist es hierbei, die Zeile mit dem betragsmäßig größten der Elemente a_{il} , $i = l, l+1, \dots, n$, aus der l -ten Spalte zu tauschen. Man vermeidet damit unter Umständen die Division durch kleine Zahlen und sich daraus ergebende größere Rundungsfehler.

Die LU -Zerlegung der Matrix A und die Umformung der rechten Seite erfolgt in diesem Falle so, dass nach der Bestimmung des Pivotelementes $u_{ll} = a_{ll}^{(l-1)}$ im l -ten Eliminationsschritt die verbleibende Matrix ab der $(l+1)$ -ten Zeile und Spalte bzw. die rechte Seite ab

Bemerkung 1.9

Speicherplatz

Mehrere Systeme

Arithmetische Operationen

Pivotisierung

LU-Algorithmus mit Zeilenpivotisierung

Für $l = 1, 2, \dots, n - 1$

Für $i = l, \dots, n$ Ermitteln der Pivotzeilennummer und Zeilenvertauschung

Für $i = l + 1, \dots, n$ $l_{il} := a_{il}/a_{ll}$
 für $j = l + 1, \dots, n$ $a_{ij} := a_{ij} - l_{il}a_{lj}$
 $b_i := b_i - l_{il}b_l$

1.3 Fallstudie: Berechnung von Stabkräften im Fachwerk

Praktische Aufgabe

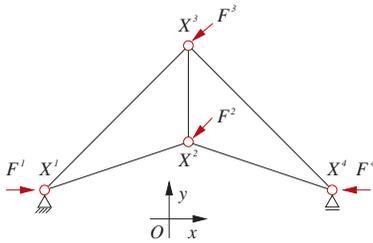


Bild 1.1 Zweidimensionales Fachwerk

Ein Fachwerk mit n Knoten X^i wird dort durch äußere Kräfte F^i , $i = 1, 2, \dots, n$, belastet (z. B. wie in **Bild 1.1**). Ist der Knoten gleichzeitig Lager, d. h. kraftübertragendes Kontaktelement, so tritt dort als Lagerreaktion die Kraft R^i auf. Das Fachwerk hat m Stäbe, die je zwei seiner Knoten verbinden. Die äußeren Kräfte werden nur in Richtung der Längsachsen dieser Stäbe übertragen und verursachen in den Stäben innere Kräfte. Gesucht sind die inneren Kräfte in allen Stäben des Fachwerks sowie die unbekanntes Lagerreaktionen.

Mathematisches Modell

Freischnitten

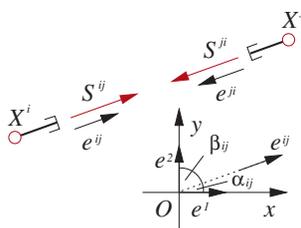


Bild 1.2 Freischnitten des Stabes $X^i X^j$

Betrachtet werden zwei Knoten X^i und X^j , die durch einen Stab verbunden sind. Wird der Knoten X^i bzw. X^j freigeschnitten, so ist S^{ij} die Normalkraft im Stab $X^i X^j$, die auf den Knoten X^i wirkt. Entsprechend ist S^{ji} die Normalkraft im Stab $X^i X^j$, die auf den Knoten X^j wirkt (siehe **Bild 1.2**). Der Stab $X^i X^j$ befindet sich in Ruhe, und aufgrund des Kräftegleichgewichtes ist

$$S^{ji} = -S^{ij}. \tag{1.26}$$

In jedem der n Knoten des in Ruhe befindlichen Fachwerks herrscht nach dem **ersten Newton-Axiom** Kräftegleichgewicht. Daher gelten die n Vektorgleichungen

$$\sum_j S^{ij} + R^i + F^i = O, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.27}$$

wobei nur über diejenigen Knotennummern j summiert wird, für die das Fachwerk einen Stab $X^i X^j$ enthält. Ist der Knoten X^i nicht gelagert, so ist in Gleichung (1.27) die Lagerreaktion R^i der Nullvektor: $R^i = O$.

Die Ortsvektoren der Punkte X^i bzw. X^j werden mit $x^i = \overrightarrow{OX^i}$ bzw. $x^j = \overrightarrow{OX^j}$ bezeichnet. Dann ist

$$\overrightarrow{X^i X^j} = x^j - x^i.$$

Ist e^{ij} der Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\overrightarrow{X^i X^j}$

$$e^{ij} = \frac{x^j - x^i}{|x^j - x^i|},$$

so gilt für die Kraft S^{ij} , die auf den Knoten X^i wirkt,

$$S^{ij} = s_{ij} e^{ij} \text{ mit } s_{ij} = (S^{ij}, e^{ij}). \quad (1.28)$$

Die Komponente s_{ij} der Kraft S^{ij} in Richtung des Vektors $\overrightarrow{X^i X^j}$ ist eine skalare Größe. Sie wird in der Literatur oftmals als „**Stabkraft**“ bezeichnet. Für $s_{ij} > 0$ handelt es sich um einen Zugstab und für $s_{ij} < 0$ um einen Druckstab.

Seien $\alpha_{ij} = \angle(e^{ij}, e^1)$, $\beta_{ij} = \angle(e^{ij}, e^2)$ und $\gamma_{ij} = \angle(e^{ij}, e^3)$ die Winkel zwischen den Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen e^1 , e^2 und e^3 und dem Vektor e^{ij} . Da die Komponenten des Einheitsvektors e^{ij} seine Richtungskosinusse sind, ist für ein zweidimensionales Fachwerk

$$e^{ij} = (\cos \angle \alpha_{ij}, \cos \angle \beta_{ij})^\top \quad (1.29)$$

bzw. für ein dreidimensionales Fachwerk

$$e^{ij} = (\cos \angle \alpha_{ij}, \cos \angle \beta_{ij}, \cos \angle \gamma_{ij})^\top.$$

Wegen $e^{ij} = -e^{ji}$ ist mit (1.26) und (1.28) $s_{ij} = s_{ji}$.

Als Unbekannte im Gleichungssystem (1.27) werden die m Stabkräfte und die unbekanntenen Komponenten der Lagerreaktionen gewählt.

Für ein zweidimensionales Fachwerk bedeuten die n Vektorgleichungen (1.27) $2n$ skalare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_j s_{ij} \cos \alpha_{ij} + R_x^i &= -F_x^i, \\ \sum_j s_{ij} \cos \beta_{ij} + R_y^i &= -F_y^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Stabkraft

Bestimmungsgleichungen