

UNITEXT for Physics

Massimo Falcioni
Angelo Vulpiani

Meccanica Statistica Elementare

I fondamenti

 Springer

UNITEXT for Physics

Series editors

Michele Cini, Roma, Italy
Attilio Ferrari, Torino, Italy
Stefano Forte, Milano, Italy
Inguscio Massimo, Firenze, Italy
G. Montagna, Pavia, Italy
Oreste Nicrosini, Pavia, Italy
Luca Peliti, Napoli, Italy
Alberto Rotondi, Pavia, Italy

For further volumes:

<http://www.springer.com/series/13351>

Massimo Falcioni · Angelo Vulpiani

Meccanica Statistica Elementare

I fondamenti



Springer

Massimo Falcioni
Università la Sapienza di Roma
Roma
Italy

Angelo Vulpiani
Università la Sapienza di Roma
Roma
Italy

ISSN 2198-7882

ISBN 978-88-470-5652-7

DOI 10.1007/978-88-470-5653-4

ISSN 2198-7890 (electronic)

ISBN 978-88-470-5653-4 (eBook)

Springer Milan Heidelberg New York Dordrecht London

© Springer-Verlag Italia 2015

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15 % di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15 % potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n.108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge. L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati ecc., anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Printed on acid-free paper

Springer is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

La meccanica statistica è spesso vista, in particolare nei corsi universitari introduttivi, come una materia ancillare di supporto allo studio della struttura della materia. A causa di questa impostazione, e anche della necessità di arrivare velocemente a fornire agli studenti strumenti per affrontare calcoli specifici, le parti di tipo più concettuale (quelle che coinvolgono la teoria ergodica e le connessioni tra meccanica statistica e calcolo delle probabilità) vengono ignorate o, nel migliore dei casi, accennate velocemente all'inizio del corso.

La meccanica statistica spesso sembra una sorta di metodologia generale, con deboli legami con la fisica delle cose che si toccano. Lo studente più attento rimane, per quanto riguarda aspetti come l'ergodicità, gli insiemi statistici e l'irreversibilità, con la sensazione di qualcosa di sospeso e vago, argomenti che (così viene spesso detto) in fondo non sono veramente essenziali per andare avanti.

Il problema si ripete anche su aspetti meno formali. Anche in alcuni buoni libri manca una pur rapida discussione delle evidenze sperimentali sulla validità della meccanica statistica e del suo utilizzo per determinare le caratteristiche del mondo atomico, combinando esperimenti e teoria. Per nostra esperienza diretta possiamo dire con certezza che la stragrande maggioranza degli studenti termina il corso di laurea triennale in fisica senza avere un'idea di come sia stato possibile determinare il numero di Avogadro e le caratteristiche essenziali del potenziale di interazione tra le molecole.

Lo scopo di questo libretto è riempire queste lacune discutendo gli aspetti di tipo fondamentale, sia di carattere fisico che concettuale, della meccanica statistica; in particolare:

- chiarire la rilevanza fisica dell'ipotesi ergodica e la sua connessione con la probabilità e gli insiemi statistici;
- discutere l'importanza dei tanti gradi di libertà coinvolti negli oggetti macroscopici;
- mostrare come, con l'ausilio di semplici risultati di meccanica statistica, sia possibile determinare le principali proprietà fisiche del mondo atomico;
- chiarire i principali aspetti tecnici e concettuali dell'irreversibilità.

Lo schema del libro è il seguente:

- Il Capitolo iniziale introduce i problemi di fondo della connessione tra termodinamica e meccanica statistica, con qualche accenno al ruolo della probabilità, la dinamica e i tanti gradi di libertà.
- Nei Capitoli 2 e 3 viene presentata l'ipotesi ergodica, la sua connessione con gli insiemi statistici, i suoi limiti e una sua versione debole che è interessante per gli oggetti macroscopici.
- Il Capitolo 4 è dedicato all'irreversibilità, argomento affascinante e ancora controverso: si cerca di mostrare come molti aspetti oscuri scompaiano se si accetta di considerare sistemi macroscopici.
- Il Capitolo 5 discute come, con l'aiuto della meccanica statistica, sia possibile determinare le proprietà fondamentali dei potenziali efficaci di interazione tra le molecole, la loro massa e il numero di Avogadro. Una particolare attenzione è dedicata al moto browniano.
- L'ultima parte è costituita da una serie di Appendici che sono state introdotte per diversi motivi. Alcune contengono risultati tecnici, utili per la discussione generale, che abbiamo preferito inserire alla fine del libro, per non spezzare il discorso e per non appesantire la presentazione. Altre sono dei complementi tecnici o concettuali di interesse per i lettori più esigenti; abbiamo inoltre inserito brevi note storiche.

A scanso di equivoci, diciamo esplicitamente che il termine "elementare" nel titolo è da intendersi come fondamentale, non come semplice.

Su alcune questioni basilari, quali, ad esempio, il ruolo dell'ergodicità e l'origine dell'irreversibilità, esistono punti di vista diversi da quello qui esposto, che noi riteniamo essere il più soddisfacente dal punto di vista concettuale e il più aderente alle idee di L. Boltzmann.

Il libro può essere utilizzato come un testo complementare ai tanti buoni libri di meccanica statistica, i prerequisiti richiesti sono solo la matematica di base a livello universitario, conoscenze elementari di meccanica statistica e probabilità.

Desideriamo ringraziare Luca Peliti, che ci ha incoraggiato a scrivere questo libro un po' fuori dagli usuali schemi; Luca Cerino, Sergio Ciuchi e Andrea Puglisi, che hanno letto parti del manoscritto dandoci utili suggerimenti. Un particolare ringraziamento va ad Andrea Gnoli, per l'attenta lettura di una prima versione del libro e a Sergio Ciuchi, per averci fornito alcune figure.

Roma,
primavera 2014

Massimo Falcioni
Angelo Vulpiani

Indice

1	Il problema di fondo	1
1.1	I paradossi	1
1.2	Cercando di superare i paradossi	4
1.3	Un'analogia dalla teoria delle probabilità	7
1.3.1	Qualche commento sulle probabilità	8
1.4	Ritorno alla Meccanica Statistica	11
1.5	Ruolo della dinamica	16
1.6	Lecture consigliate	17
2	Dalla Meccanica alla Termodinamica	19
2.1	Ipotesi ergodica e densità microcanonica	19
2.2	Commenti e osservazioni sull'ergodicità	21
2.3	L'entropia	29
2.4	Lecture consigliate	34
3	Il Microcanonico e oltre	35
3.1	Osservazioni preliminari sui volumi e sull'entropia	36
3.2	Dall'insieme microcanonico a quello canonico	38
3.3	La distribuzione di Maxwell-Boltzmann	40
3.4	Gli <i>ensembles</i>	43
3.5	Ergodicità e simulazioni numeriche	46
3.5.1	La dinamica molecolare	47
3.5.2	L'algoritmo di Verlet	48
3.5.3	Il metodo Monte Carlo	49
3.6	Lecture consigliate	50
4	Il problema dell'irreversibilità macroscopica	51
4.1	Il problema dell'irreversibilità	51
4.2	L'equazione di Boltzmann	53
4.2.1	Due paradossi apparentemente insormontabili	57
4.2.2	La risposta di Boltzmann	59

4.3	Un modello probabilistico in cui tutto è chiaro	61
4.3.1	Caos molecolare nel modello di Ehrenfest	62
4.3.2	Tempi di ricorrenza	64
4.4	Ancora sull'irreversibilità	64
4.5	Considerazioni finali	66
4.6	Lecture consigliate	68
5	Studiare il mondo atomico con la meccanica statistica	69
5.1	Meccanica statistica ed esperimenti	70
5.1.1	La distribuzione di Maxwell	70
5.1.2	La distribuzione di Fermi-Dirac	72
5.1.3	Il problema del potenziale di interazione	74
5.2	Contare gli atomi senza poterli vedere: il moto Browniano	75
5.2.1	Un po' di storia	75
5.2.2	La teoria di Einstein nella versione di Langevin	77
5.2.3	L'equazione di Langevin a tempi discreti	79
5.2.4	Gli esperimenti di Perrin	80
5.2.5	L'importanza storica e concettuale del moto Browniano	81
5.3	Le fluttuazioni sono piccole ma rivelabili	81
5.4	Le dimensioni delle molecole	84
5.4.1	Qualche calcolo semplice	84
5.4.2	Dalla termodinamica ai potenziali di interazione	86
5.4.3	Osservazioni conclusive	87
5.5	Lecture consigliate	88
	Appendice A Osservazioni su esponenziali e potenze	89
A.1	Le funzioni	89
A.2	Gli integrali	92
A.3	Volumi	95
	Appendice B Legge dei grandi numeri, piccole e grandi fluttuazioni	97
B.1	Dalla legge binomiale al teorema del limite centrale	97
B.2	Oltre il limite centrale	99
B.3	Grandi deviazioni	101
	Appendice C Un altro modo di scrivere la densità nel microcanonico	105
	Appendice D La teoria di Einstein del moto Browniano	107
	Appendice E Relazione di Taylor-Kubo per il coefficiente di diffusione ..	111
	Appendice F Lo sviluppo del viriale per gas debolmente interagenti	113
	Appendice G Le catene di Markov in due parole	117
	Appendice H Tempi di ricorrenza	121

Appendice I Un tributo a Ludwig Boltzmann, il grande visionario	123
Indice analitico	131

Il problema di fondo

Sommario Nella seconda metà del *XIX* secolo tre grandi schemi teorici dominavano la fisica: la Meccanica, l'Elettromagnetismo e la Termodinamica.

La Meccanica regolava il moto dei corpi materiali; l'Elettromagnetismo dava le leggi che guidano i fenomeni elettrici e magnetici; la Termodinamica dettava i principi che sottostanno agli scambi energetici tra sistemi nei processi di raggiungimento dell'equilibrio termico. Quest'ultima teoria era stata sviluppata partendo da osservazioni ed esperimenti sui corpi materiali, ma aveva alla fine mostrato la grande generalità delle sue leggi quando, applicata allo studio delle proprietà della radiazione elettromagnetica in equilibrio all'interno di una cavità (problema del corpo nero), aveva correttamente predetto un andamento proporzionale alla quarta potenza della temperatura per la densità di energia del campo elettromagnetico (legge di Stefan e Boltzmann).

La Meccanica Statistica si pose l'obiettivo di ricondurre la Termodinamica alla Meccanica, partendo dall'*ipotesi atomistica*, cioè dall'assunzione che la materia sia costituita da unità microscopiche elementari, atomi e molecole, che seguono le leggi della meccanica. È opportuno ricordare che all'inizio del *XX* secolo la realtà degli atomi non aveva ancora ricevuto convincente evidenza sperimentale e l'ipotesi atomistica era tutt'altro che universalmente accettata. Al contrario, le prove della validità delle leggi della Termodinamica, anche al di fuori del campo in cui essa era stata sviluppata, facevano guardare con molto scetticismo al tentativo di unificazione tra le due teorie, portato avanti dalla Meccanica Statistica.

L'obiezione fondamentale nei riguardi del progetto si può ricondurre a una serie di incompatibilità tra i principi fondanti delle due teorie.

1.1 I paradossi

La Termodinamica è basata sull'osservazione che esistono *stati di equilibrio*: un insieme di corpi che possono scambiare tra loro energia, posti in contatto e mantenuti in sufficiente isolamento con l'esterno, raggiungono uno stato in cui scambi d'ener-

gia (e anche eventualmente flussi di materia o altro) cessano; le variabili con cui il sistema è caratterizzato non mostrano più dipendenza dal tempo. Questa osservazione, assunta a principio, introduce la nozione di irreversibilità in Termodinamica, affermando che esistono processi che non ammettono un'evoluzione temporale inversa: se un sistema ha raggiunto l'equilibrio in uno stato diverso dal suo stato iniziale, non ritorna spontaneamente in quest'ultimo. Più esattamente due eventi sono esclusi dalla Termodinamica:

- a) che il processo di rilassamento all'equilibrio abbia un inverso (a livello macroscopico); cioè che il sistema possa essere preparato in uno stato iniziale di equilibrio, in modo tale che spontaneamente evolva verso il vecchio stato iniziale, di non equilibrio;
- b) che il sistema, una volta raggiunto l'equilibrio, mantenuto in isolamento, al trascorrere del tempo torni nel suo stato iniziale, di non equilibrio.

Entrambi questi divieti appaiono ingiustificabili in meccanica. Si assuma il punto di vista atomistico e si supponga che un sistema isolato sia costituito da N particelle tra cui agiscono delle forze, \mathbf{F}_i , che dipendono solo dalle posizioni, \mathbf{x}_i , delle particelle.

ā) La struttura delle equazioni di Newton

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

è tale che, se $(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)) \equiv \{\mathbf{x}_i(t)\}$ è una soluzione permessa, descrivente una possibile evoluzione delle N particelle, allora anche $\{\mathbf{x}_i(-t)\}$, descrivente il moto inverso, con tutte le velocità invertite, è una soluzione possibile. Questo perché, se effettuiamo la trasformazione $t \rightarrow -t$ e $\mathbf{v}_i \rightarrow -\mathbf{v}_i$ mentre \mathbf{x}_i non cambia, l'Eq.(1.1), che dipende solo dalle derivate seconde rispetto al tempo, resta inalterata. Più precisamente: si consideri una condizione iniziale con particelle nelle posizioni $(\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_N(0))$ con velocità $(\mathbf{v}_1(0), \dots, \mathbf{v}_N(0))$, e la si lasci evolvere, secondo l'Eq.(1.1), fino al tempo t . A questo tempo si invertano le velocità, e si prendano come nuove condizioni iniziali quelle con le particelle in $(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t))$ con velocità $(-\mathbf{v}_1(t), \dots, -\mathbf{v}_N(t))$. L'evoluzione dalla nuova condizione, durante un altro intervallo di tempo t , riporterà le particelle del sistema nelle posizioni $(\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_N(0))$ con velocità invertite $(-\mathbf{v}_1(0), \dots, -\mathbf{v}_N(0))$.

Questa proprietà delle soluzioni della (1.1) è in contrasto con il punto *a)*. Si assuma che le N particelle descrivano due sistemi in contatto. Per fissare le idee, e per semplicità, qui e nel seguito del capitolo, consideriamo come sistema di esempio due gas che occupano volumi fissati e possono scambiare energia attraverso una parete divisoria: un gas *A* con N_A particelle e un gas *B* con N_B particelle ($N_A + N_B = N$). Indicando con $V(\{\mathbf{x}_i\})$ l'energia potenziale associata alle forze tra le molecole, l'energia totale del sistema

$$E_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + V(\{\mathbf{x}_i\}), \quad (1.2)$$

si può decomporre in questo modo:

$$E_{tot} = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + V_A + \sum_{i=1}^{N_B} \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 + V_B + V_{AB} \equiv E_A + E_B + V_{AB}, \quad (1.3)$$

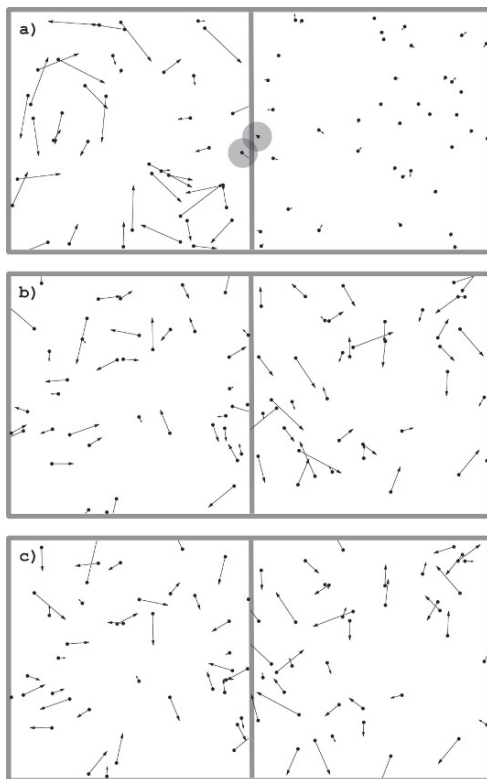
dove V_A (V_B) dipende solo dalle particelle del gas A (B) e V_{AB} indica il contributo all'energia potenziale dovuto alle molecole dei due gas che si trovano in prossimità della parete di separazione e che permettono lo scambio di energia tra i due sistemi. Tali molecole sono quelle che distano dalla parete per una quantità dell'ordine della portata delle interazioni intermolecolari e sono quindi relativamente poche rispetto al numero totale¹: anche se definito con un certo grado di arbitrarietà, quantitativamente V_{AB} è una piccola correzione a $E_A + E_B$. Si supponga che lo stato meccanico iniziale $\{\mathbf{x}_i(0)\}$, $\{\mathbf{v}_i(0)\}$ sia di non equilibrio, caratterizzato da una distribuzione di energia tra i due sistemi data da $E_A(0) + E_B(0) + V_{AB}(0) = E_{tot}$. Si assuma che al tempo t il sistema sia all'equilibrio termodinamico, caratterizzato dalla distribuzione energetica $E_A^{eq} + E_B^{eq} + V_{AB}^{eq} = E_A(t) + E_B(t) + V_{AB}(t) = E_{tot}$, dove, a meno di una correzione trascurabile (data da V_{AB}^{eq}), E_A^{eq} e E_B^{eq} sono le energie di equilibrio dal punto di vista termodinamico ($E_A^{eq} \neq E_A(0)$ e $E_B^{eq} \neq E_B(0)$). Si esegua ora l'inversione descritta sopra. Tenendo conto del fatto che le energie dipendono solo dal modulo delle velocità, e quindi anche il nuovo stato iniziale ha le energie di equilibrio, si capisce che si sta preparando uno stato in cui due sistemi inizialmente in equilibrio in un tempo t vanno fuori equilibrio ritornando nel vecchio stato iniziale, vedi Fig.1.1.

\tilde{b}) Un'importante proprietà delle equazioni meccaniche è relativa a sistemi il cui moto avviene in una regione finita dello spazio, come quelli di cui si occupa la Termodinamica. In questo caso vale il *Teorema di ricorrenza* di Poincaré: il sistema ritorna (infinite volte) arbitrariamente vicino a qualunque suo stato dinamico. Ciò implica la violazione da parte dei sistemi meccanici del divieto b) imposto dalla Termodinamica. Ritornando ai due gas introdotti sopra, una volta che sia stato raggiunto l'equilibrio (al tempo t) il teorema di Poincaré implica che, aspettando un tempo sufficiente, il sistema ripasserà arbitrariamente vicino allo stato iniziale di non equilibrio: in meccanica l'equilibrio non è per sempre.

Le incompatibilità di principio delle leggi meccaniche coi punti a) e b) sono note, rispettivamente, come *paradosso della reversibilità* (dovuto a J. Loschmidt) e *paradosso della ricorrenza* (dovuto a E. Zermelo).

¹ Per esempio, per un gas contenuto in un recipiente cubico di lato $L = 10$ cm, essendo la portata delle interazioni tra le molecole, r_0 , dell'ordine di $1\text{\AA} = 10^{-10}$ m, la frazione di particelle contenute entro una distanza r_0 da una parete è r_0/L , di ordine 10^{-9} .

Figura 1.1 a) Due sistemi inizialmente non all'equilibrio evolvono verso lo stato di equilibrio. La velocità di una particella è proporzionale alla lunghezza della freccia che parte da essa. Inizialmente il gas contenuto nella parte sinistra del recipiente ha temperatura maggiore di quello nella parte destra. Le interazioni fra le particelle in vicinanza della superficie di contatto sono responsabili del raggiungimento dello stato di equilibrio. Due particelle ed il raggio d'azione delle forze di interazione (non in scala) sono mostrate in a). In b) è mostrato lo stato di equilibrio, in c) quello ottenuto da b) in vertendo *tutte* le velocità.



1.2 Cercando di superare i paradossi

Se si vogliono far coesistere due teorie che presentano contraddizioni derivanti dai loro principi, si deve necessariamente intervenire sui principi stessi. In questo caso il raccordo tra Meccanica e Termodinamica, prodotto dalla Meccanica Statistica, si ottiene a costo di una interpretazione meno rigida della nozione di equilibrio.

Un primo aspetto da notare è che, una volta accettato che un corpo macroscopico sia costituito da un numero N molto grande di molecole (dell'ordine del numero di Avogadro $N_0 \sim 10^{24}$), la meccanica di un insieme di N molecole fornisce l'evoluzione di $6N$ variabili dinamiche², che descrivono completamente gli stati microscopici del sistema. È utile studiare il moto nello spazio delle fasi usando come variabili le $3N$ componenti delle posizioni e le $3N$ componenti degli impulsi, che indichiamo rispettivamente con $\{\mathbf{q}_i\}$ e $\{\mathbf{p}_i\}$, la cui l'evoluzione è guidata dalle equazioni di

² In questo capitolo assumiamo che le molecole siano ben descritte dalle sole variabili del centro di massa ovvero che si possano considerare puntiformi.

Hamilton

$$\begin{aligned} d\mathbf{q}_i/dt &= \partial H/\partial \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i/m \\ d\mathbf{p}_i/dt &= -\partial H/\partial \mathbf{q}_i = -\partial V/\partial \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove si è introdotta la funzione di Hamilton

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} + V(\{\mathbf{q}_j\}), \quad (1.5)$$

che, in questo caso, fornisce anche l'energia del sistema. È comodo usare una notazione compatta per indicare uno stato microscopico completo di un sistema di N particelle mediante la seguente definizione: $\mathbf{X} \equiv (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$; \mathbf{X} è un vettore con $6N$ componenti reali.

Al contrario, se si studia lo stesso corpo dal punto di vista termodinamico, le variabili necessarie per una descrizione esauriente sono molto poche; nell'esempio del gas diviso in due parti di volume fissato, una sola variabile è sufficiente: l'energia di uno dei due gas, E_A o E_B , l'altra essendo fissata dalla conservazione dell'energia totale, potendosi trascurare il termine di interazione reciproca V_{AB} .

Quindi la meccanica fornisce una descrizione del sistema *enormemente*, ed *eccessivamente* più dettagliata (e ridondante) di quella termodinamica. Inoltre, mentre l'evoluzione meccanica descrive le variazioni dello stato di ogni singola molecola, la termodinamica si occupa delle variazioni di quantità *collettive*, come l'energia di un sistema, che istante per istante ricevono contributi da *tutte* le molecole che lo compongono. In questo senso il punto di vista meccanico si può chiamare *microscopico* e quello termodinamico *macroscopico*.

Lo studio del sistema dal punto di vista microscopico riguarda osservazioni sperimentali coinvolgenti una o poche molecole. Supponiamo di essere in grado di misurare l'energia di una data molecola del gas, la i -esima, di energia $e_i = e_i(t)$. Usando l'equazione di stato dei gas ideali monoatomici, si può stimare l'ordine di grandezza (che indichiamo con \tilde{e}) della variabile e_i a temperatura ambiente ($T = 300$ K):

$$\tilde{e} = \frac{3}{2} k_B T \approx 6.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}. \quad (1.6)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann. È chiaro che per la variabile e_i non è sensato parlare di equilibrio, come situazione in cui scompare la dipendenza temporale: a causa della presenza delle altre molecole, con cui la i -esima interagisce, il suo valore cambierà in continuazione, fluttuando intorno a \tilde{e} per quantità dello stesso ordine di grandezza³, subendo quindi variazioni di cui ci accorgiamo, essendo in grado di misurarle, per l'ipotesi fatta all'inizio.

³ Per esempio, nell'urto elastico bidimensionale tra una particella di massa m ed energia (cinetica) iniziale E e una particella di massa $m' = \gamma m$, inizialmente ferma, la variazione di energia della prima particella si scrive: $|\Delta E| = E (\cos\theta)^2 4\gamma/(1+\gamma)^2$, dove θ è l'angolo tra le direzioni finale e iniziale della particella incidente. Se le masse sono dello stesso ordine di grandezza si ha: $|\Delta E| = O(E)$. Con la notazione $O(x)$ intendiamo indicare una quantità dello stesso ordine di grandezza di x .