Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

RESEARCH

Michael Meyer

# Vom Satz zum Begriff

## Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Springer Spektrum

# Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Band 18

**Herausgegeben von**
S. Hußmann,
M. Nührenbörger,
S. Prediger,
C. Selter,
Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts" trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

**Herausgegeben von**
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Technische Universität Dortmund, Deutschland

Michael Meyer

# Vom Satz zum Begriff

## Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht

Springer Spektrum

Michael Meyer
Universität zu Köln, Deutschland

Habilitationsschrift Technische Universität Dortmund, 2012

ISBN 978-3-658-07068-7 ISBN 978-3-658-07069-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-07069-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum


Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

# Geleitwort

Entdecken und Begründen nehmen im Diskurs um die Stärkung der Prozessbezogenheit des Mathematikunterrichts eine große Rolle ein. Doch was genau machen Lernende, wenn sie entdecken, prüfen und begründen, wie verlaufen ihre entsprechenden Prozesse? Welche Lerngelegenheiten werden ihnen dazu geboten, und wie nutzen sie sie?

Michael Meyer arbeitet in dieser Arbeit einen Zugang zu diesen Fragestellungen aus, der die Prozesse des Entdeckens, Prüfens und Begründens bzgl. ihrer philosophisch-logischen Strukturen ausdifferenziert. Die Ausdifferenzierung ermöglicht insbesondere, das Lernprinzip „Entdeckendes Lernen" auch begrifflich zu fassen. Dieser Zugang über die Ausdifferenzierung philosophisch-logischer Strukturen wurde in der vorangegangenen Dissertation von Michael Meyer bereits entwickelt und hat sich seitdem für verschiedene mathematikdidaktische Forschungsarbeiten bewährt.

Die Bezeichnung „philosophisch-logisch" zeigt dabei, dass die Arbeit zwischen zwei Polen vermittelt: Die Logik ermöglicht zum einen, die logische Struktur denknotwendiger Schlüsse zu betrachten, lässt jedoch den fragilen mentalen Prozess der Wissensgenerierung außen vor. Die Berücksichtigung der Bezugsdisziplin Philosophie erlaubt zum anderen, sich diesem (aus didaktischer Sicht spannenden) Forschungsbereich nicht nur empirisch, sondern vor allem auch theoretisch zu nähern.

Aufbauend auf den Grundlagen seiner bisherigen Forschungsarbeit geht der Autor in dieser Habilitationsschrift zwei wesentliche Schritte weiter: Die erste Erweiterung in konstruktiver Richtung besteht darin, dass neben realen Lernprozessen auch intendierte Lernprozesse betrachtet werden. Die durch Aufgaben in Schulbüchern angezielten Lernprozesse werden hinsichtlich ihres Potentials analysiert, welche Erkenntniswege sie anzuregen im Stande sind. Das hier entstandene System von Optionen strukturiert die Möglichkeiten bei der Erstellung von Aufgaben zur Erkundung neuer mathematischer Zusammenhänge. Die Prüfung der empirischen Realisierbarkeit einzelner Optionen zeigt nicht nur die theoretische Durchdringung denkbaren Handelns, sondern auch den praktischen und empirischen Nutzen des Optionensystems.

Die zweite Erweiterung in dieser Arbeit geht in theoretische Richtung: War die Theorie zuvor noch auf das Entdecken, Prüfen und Begründen mathematischer Zusammenhänge beschränkt, so erfolgt hier auch eine Erweiterung auf mathematische Begriffe. Somit werden insgesamt mathematische Lernprozesse in einem breiteren Umfang, bezogen auf mathematische Begriffe und Sätze, betrachtet.

In dieser Habilitationsschrift verbindet Michael Meyer einige der Veröffentlichungen, die während seiner Zeit in Dortmund entstanden sind, zu einem zusammenhängenden Werk. Die Veröffentlichungen basieren auch auf der Zusammenarbeit mit anderen Forschenden in Münster und Dortmund, wie in den Kapiteln einzeln ausgewiesen wird. Weitere Veröffentlichungen des Autoren zu Themen wie Modellieren, Methodologie interpretativer (Unterrichts-)Forschung sowie Sprache bzw. Mehrsprachigkeit und ihre Rolle beim Mathematiklernen sind anderen Organen zu entnehmen. Entsprechend präsentiert Michael Meyer hier nur einen Teil seiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts von 2007 bis 2012.

Die Arbeit ist interessant aus analytischer Perspektive, da sie eine Beschreibungssprache für die philosophisch-logische Struktur komplexer Prozesse bietet und dadurch eine genauere Erfassung realer Lehr-Lernprozesse ermöglicht. Sie bietet aber auch konstruktive Orientierungen für die Erstellung von Aufgaben, also eines logisch sensiblen, mathematikdidaktischen Designs. Damit werden konstruktive und rekonstruktive Perspektive gewinnbringend verbunden.

Susanne Prediger

Susanne Prediger,
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Dortmund im Mai 2014

# Danksagung

Die vorliegende Habilitationsschrift verbindet ausgewählte Forschungsarbeiten, die während meiner Zeit am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts der (Technischen) Universität Dortmund entstanden sind, zu einem zusammenhängenden Werk. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Schrift beigetragen haben.

In der Arbeitsgruppe von Frau Prof.'in Dr. Susanne Prediger und Herrn Prof. Dr. Stephan Hußmann stand mir jederzeit ein anregendes Forschungsumfeld zur Verfügung. Beide boten mir Freiräume zur individuellen Entfaltung und eröffneten mir diverse Möglichkeiten zur (Neu-)Orientierung. Entsprechend möchte ich beiden meinen herzlichen Dank aussprechen. Hervorgehoben sei insbesondere die gemeinsame Forschungs- und Publikationstätigkeit mit Frau Prof.'in Dr. Susanne Prediger, durch die mein Wissenschaftshorizont erweitert wurde.

Unzählige Gespräche mit den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, von denen hier nur die langjährigen Weg- und Diskussionsgefährten Dr. Heinz Laakmann, Nikola Leufer, Dr. Andrea Schink und Dr. Susanne Schnell genannt seien, waren nicht nur in wissenschaftlicher Hinsicht eine absolute Bereicherung, die ich nicht missen möchte. Bei den weiteren Mitgliedern des Institutes möchte ich mich ebenfalls für eine lehrreiche, spannende und schöne Zeit bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jörg Voigt aus Münster, der als betreuender Hochschullehrer während der Promotionszeit mein Interesse an der wissenschaftlichen Tätigkeit im Bereich der Didaktik der Mathematik geweckt und auch im Anschluss an diese gefördert hat. Unsere produktive Zusammenarbeit, die sich meiner Promotion anschloss, resultierte in diversen Veröffentlichungen, welche zu einem großen Teil auch in dieses Buch eingeflossen sind. Seine Ratschläge waren auch unabhängig von den gemeinsamen Veröffentlichungen stets eine bedeutende Hilfe.

Dankbar bin ich Herrn Prof. Dr. Willibald Dörfler und Herrn Prof. Dr. Heinz Steinbring dafür, dass sie die externen Gutachten für diese Habilitationsschrift verfasst haben, sowie den zahlreichen Korrekturleserinnen und -lesern dieser Schrift bzw. ihrer zuvor publizierten Bestandteile. Ebenso gilt mein Dank der Habilitationskommission sowie dem Dekan der Fakultät für Mathematik, Herrn Prof. Dr. Stefan Turek, dafür, dass er mir trotz des Rufes von der Universität zu Köln die Möglichkeit eröffnet hat, das Habilitationsvorhaben zu realisieren. Sie alle haben nicht nur die erste universitäre Habilitation im Bereich der Didaktik der Mathematik in Dortmund ermöglicht, sondern mir auch die Gelegenheit gegeben, mit der Habilitation meine Zeit in Dortmund wissenschaftlich abzuschließen.

Abschließend gilt mein größter Dank meinen Eltern, meinen Großeltern, meiner Schwester und all den Freundinnen und Freunden, die mir zur Seite standen bzw. stehen. Ohne eure Hilfe und Unterstützung wäre dies hier nicht möglich gewesen!

Michael Meyer

Michael Meyer,
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik,
Köln im Mai 2014

Für Ignatz und Hermine

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

„Nein, nein, ich rate nie. Raten ist eine abscheuliche Angewohnheit; es zerstört die Fähigkeit, logisch zu denken."
(Sherlock Holmes; Doyle 2005, S. 15)

Die vorliegende Arbeit thematisiert zwei Dimensionen im und für den Mathematikunterricht. Die erste Dimension bezieht sich auf Prozesse des Lernens mathematischer Inhalte: Entdecken, Prüfen und Begründen. Mathematisch tätig zu sein bedeutet, diese Prozesse nicht nur isoliert voneinander durchzuführen, sondern auch als Zusammenspiel zu betrachten: Einer Entdeckung fehlt es ohne anschließende Begründung an Sicherheit, während eine Begründung ohne vorhergehende Entdeckung den Kern aktueller didaktischer Bestrebungen verfehlt. Die Entdeckung eines (mathematischen) Zusammenhanges ist dabei der (subjektive) Ausgangspunkt neuer Erkenntnis. Prüfen wir unsere Entdeckung, so wird sie plausibler. Doch auch wenn wir mehr Vertrauen gewonnen haben, fehlt es an letztendlicher Sicherheit, die wir erst durch eine (objektivere) Begründung erhalten können. Der Ansatzpunkt für eine solche Begründung ergibt sich jedoch nicht von selbst, auch er muss erst entdeckt werden. Die notwendige Verbindung zwischen dem (kreativen) Entdecken und dem (strengen) Begründen lässt sich aber auch aus einer anderen Perspektive betrachten: „Strenge allein ist lähmender Tod, Kreativität allein ist Geisteskrankheit" (Bateson 1978, S. 265).

Sowohl auf theoretischer als auch auf empirischer Ebene werden die Prozesse des Entdeckens, des Prüfens und des Begründens und das Zusammenspiel dieser Prozesse betrachtet. Es wird versucht, die Rationalität dieser Prozesse herauszuarbeiten. „Rationalität" bezieht sich dabei auf die den Prozessen inhärente philosophische Logik, die insbesondere im Kontext des Generierens neuen Wissens nicht der mathematischen Logik entsprechen kann. Hierzu werden Mittel und Methoden verwendet, die sich in der mathematikdidaktischen Diskussion bewährt haben: Das Entdecken wird als Abduktion, das Begründen als Deduktion (bzw. als Argument) und das Prüfen auch mittels der Induktion rekonstruiert. Gegenstände der hier vorgestellten Analysen sind Schulbücher, Unterrichtssequenzen und Interviews.

Die zweite Dimension, die in dieser Arbeit thematisiert wird, ist die Struktur der mathematischen Inhalte des Unterrichts: Begriffe, Urteile und Zusammenhänge zwischen den Urteilen (die, so sie bewiesen wurden, in der fachmathema-

M. Meyer, *Vom Satz zum Begriff*, Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 18, DOI 10.1007/978-3-658-07069-4_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

tischen Diskussion auch als Sätze[1] bezeichnet werden). Ebenso wie die zuvor genannten Prozesse stehen diese Inhalte in einem Wechselspiel zueinander: Einen Begriff, wie zum Beispiel den der linearen Funktion, zu entwickeln, ohne einen dazugehörigen mathematischen Satz (der beispielsweise die Äquivalenz der begriffskonstituierenden Charakteristika in verschiedenen Darstellungsformen thematisiert) zu behandeln, wäre didaktisch nicht ratsam, insofern sich ein Begriff nicht nur auf seine Definition erstreckt, sondern auch auf seine Bedingungen bzw. notwendigen oder möglichen Konsequenzen und somit auch die Zusammenhänge zwischen den ihn beschreibenden Urteilen umfasst. Ein mathematischer Zusammenhang hingegen wird konstituiert von Urteilen und den in ihnen verwendeten Begriffen.

Die beiden Dimensionen sind sehr eng miteinander verknüpft. Denn eine Entdeckung, eine Prüfung und/oder eine Begründung ergibt im Mathematikunterricht erst dann Sinn, wenn sich diese Prozesse auf fachliche Inhalte beziehen. Auslöser für solche Prozesse bilden zumeist Aufgaben, die von der Lehrperson oder durch Schulbücher an die Lernenden herangetragen werden. Diese soziale Bedingung des Lernens erkenntnistheoretisch zu orientieren ist ein wesentlicher Kern dieser Arbeit.

Die gesellschaftliche Funktion der Mathematikdidaktik besteht darin, den Mathematikunterricht zu verbessern. Aber nur das, was (besser, anders, neu, ...) verstanden ist, lässt sich auch intellektuell ehrlich verbessern. Die vorliegende Arbeit unternimmt den Versuch, einen Beitrag zu beiden Bereichen, dem Verstehen und dem (darauf basierten) Verändern, zu leisten:

Im Kontext der Prozesse des Entdeckens, Prüfens und Begründens mathematischer Zusammenhänge wird zunächst dem Aspekt des Verstehens nachgegangen, indem mit Abduktion, Deduktion und Induktion bereits etablierte Schlussformen verwendet werden, um zu rekonstruieren, welche Optionen Lehrpersonen bzw. Schulbuchautorinnen und -autoren zur Initiierung des Entdeckens, Prüfens und/oder Begründens gegeben sind. Auf der Basis der herausgearbeiteten Optionen zeigt sich Potential für mögliche Veränderungen der unterrichtlichen Lehr-Lern-Angebote. Dazu wird eine aus mathematischer und didaktischer Perspektive sinnvolle Option, bei der das Entdecken und das Begründen sehr eng miteinander verknüpft sind, tiefergehend erkundet und hinsichtlich ihrer empirischen Realisierbarkeit an Beispielen überprüft.

Um das Lehren und Lernen mathematischer Begriffe im Unterricht besser zu verstehen, wurden in der didaktischen Diskussion schon diverse theoretische Modelle und Analyseinstrumentarien entwickelt. In dieser Arbeit wird der Ver-

[1] Diese übliche Verwendung des Wortes „Satz“ wird in dieser Arbeit auf (noch) nicht bewiesene Zusammenhänge zwischen Urteilen ausgeweitet, um terminologische Konflikte bei der Analyse der Schulbücher, wo auch soeben entdeckte mathematische Beziehungen als (Merk-)Sätze bezeichnet werden, zu vermeiden.

such unternommen, neben den bereits bestehenden Werkzeugen neue theoretische Konstrukte zu nutzen, die ausgehend von einem sprachtheoretischen Ansatz auch eine logische Analyse von Begriffsbildungsprozessen ermöglichen. Es soll ein tief(er)gehendes Verstehen des Umgangs der Lernenden mit Begriffen ermöglicht werden, indem insbesondere die Beziehungen zwischen mathematischen Begriffen, den sie konstituierenden Urteilen und den Zusammenhängen zwischen diesen Urteilen beleuchtet wird. Auf der Basis der Ergebnisse wird eine Art der Begriffsbildung erprobt und hinsichtlich ihrer Konsequenzen analysiert, bei der die Begriffsbildung bereits im prädefinitorischen Stadium durch Prozesse des Entdeckens und des Begründens initiiert wird.

Die meisten Inhalte der vorliegenden Arbeit sind bereits in referierten Zeitschriften und Sammelbänden publiziert worden (s. Meyer 2008, 2009 a und b; 2010 a, b, c und d; Meyer und Voigt 2008 und 2009). Hier werden sie neu zusammengestellt und thematisch verknüpft entlang folgender Fragestellungen:

- Was ist notwendig, um Lernende zu einer Entdeckung anzuregen?
- Welche philosophisch-logischen Optionen existieren, um einen mathematischen Zusammenhang entdecken, prüfen und/oder begründen zu lassen?
- Inwiefern können Lernende eine Idee für die Begründung eines mathematischen Zusammenhanges gewinnen, noch bevor sie diesen Zusammenhang erkannt haben?
- Welche Erkenntnisse lassen sich aus der Rekonstruktion realer Begriffsbildungsprozesse mittels des Sprachspielkonzeptes Wittgensteins ziehen?
- Inwieweit ist das Entdecken und Begründen mathematischer Zusammenhänge auch vor der Explizierung von Definitionen der in den Zusammenhängen enthaltenen mathematischen Begriffe möglich und tragfähig?

Alle Fragestellungen verbindet das übergreifende Forschungsinteresse an den philosophisch-logischen Strukturen von Erarbeitungsprozessen. Dazu wurden theoretische Konstrukte und methodologische Zugänge der Bezugsdisziplinen (vorrangig Philosophie und Soziologie) herangezogen, um mathematisches Handeln bzw. die es bedingenden Faktoren mittels Methoden der interpretativen Forschung zu rekonstruieren und daraus Möglichkeiten zu ihrer Initiierung zu spezifizieren.

Die einzelnen Kapitel sind wie folgt strukturiert: Im *ersten Kapitel* werden einleitend zunächst drei zentrale Begriffe, die in dieser Arbeit vorrangig zur Rekonstruktion dienen, in ihren Grundzügen thematisiert: Abduktion, Deduktion und Induktion. Die Abduktion wird als die charakteristische Schlussform zur (Re-)Konstruktion des Entdeckens beschrieben. Ebenso verhält es sich mit der Deduktion für das Begründen und der Induktion für das Prüfen. Diese philosophisch-logischen Begriffe haben ihren Ursprung in der Philosophie von Charles

Sanders Peirce (1839-1914). Sie wurden für die Rekonstruktion des Mathematiklernens aufgearbeitet und an empirischen Phänomenen ausgeschärft (s. Meyer 2007a).

Im *zweiten Kapitel* werden die zuvor präsentierten Begriffe verwendet, um einführende Wege zur Erarbeitung von mathematischen Zusammenhängen (im Kontext des Forschungsgegenstandes „Schulbücher“ auch „Merksatz“ genannt) in Schulbüchern zu analysieren. Da die interpretative Erforschung von Schulbüchern gemessen an deren faktischer Bedeutung für den schulischen Mathematikunterricht noch ausbaufähig ist, werden an konkreten Beispielen von Erarbeitungswegen zudem auch methodologische Überlegungen aufgezeigt. Forschungsleitende Fragen dieses Kapitels sind u. a.:

- Welche Optionen des Entdeckens, Prüfens und Begründens lassen sich zur Konstruktion von Aufgaben unterscheiden?
- Wie kann durch die Art seiner Entdeckung dem Merksatz mehr Plausibilität verliehen werden?
- Durch welche Art seiner Prüfung lässt sich dem zuvor entdeckten oder präsentierten Merksatz mehr (oder weniger) Plausibilität verleihen?
- Wie können das Entdecken und das Prüfen mit dem Begründen verbunden werden?

Bei der Schulbuchanalyse hat sich eine Option der Erarbeitung von Merksätzen aus mathematischer Sicht als besonders sinnvoll erwiesen. Hierbei werden das Entdecken und das Begründen von Beginn an miteinander in Beziehung gesetzt, so dass die Lernenden bereits vor der expliziten Kenntnis des noch zu entdeckenden Zusammenhanges eine Idee für dessen nachfolgenden Beweis gewinnen können. Diese sowohl aus didaktischer als auch aus mathematischer Sicht sinnvolle Option „Entdecken mit latenter Beweisidee“ wird im *dritten Kapitel* ausführlich thematisiert. Dies geschieht u. a. auf der Basis der folgenden Fragestellungen:

- Wie wird das Entdecken mit latenter Beweisidee in den Schulbüchern realisiert?
- Welche Maßnahmen der Schulbuchautorinnen und -autoren lassen sich rekonstruieren, um das Erkennen der Beweisidee durch die Lernenden zu forcieren?
- Inwiefern gelingt es den Lernenden, eine vorerst nur latente Beweisidee (für sich) zu realisieren und im nachfolgenden Beweis zu manifestieren?

Während die bisher skizzierten Kapitel das Erarbeiten von Merksätzen in den Fokus nehmen, erfolgt ab dem *vierten Kapitel* eine Erweiterung der inhaltlichen

Betrachtungen auf mathematische Begriffe. Wesentliche Ziele dieses Kapitels sind, die Sprachspielphilosophie Ludwig Wittgensteins zur Beschreibung realer Begriffsbildungsprozesse als sinnvoll herauszustellen und zum Verstehen derselben zu nutzen. Vorrangig unter der Perspektive des Verstehens von Begriffsbildungsprozessen werden hier folgende Fragen verfolgt:

- Inwieweit eignet sich die Sprachspielphilosophie Wittgensteins, um Begriffsbildungen zu beschreiben?
- Welchen Mehrwert bietet dieser theoretische und methodische Zugriff?
- Welche Grenzen zeigen sich?
- Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für reale Begriffsbildungsprozesse?

Während im *fünften Kapitel* Begriffsbildungsprozesse reflektiert und rekonstruiert werden, sollen diese im abschließenden *sechsten Kapitel* initiiert werden. Die Initiierung geschieht unter bestimmten Fragestellungen, welche wiederum den Bogen zurück zu den anfänglichen Betrachtungen der Prozesse des Entdeckens und Begründens spannen. Einige dieser Fragestellungen sind:

- (Wie) Können die Prozesse des Entdeckens und Begründens zur Erarbeitung mathematischer Begriffe angewendet werden?
- Was sind die Bedingungen und Grenzen dieser Möglichkeit?
- Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für das Mathematiklernen?

Die Rekonstruktionen in dieser Arbeit erfolgen auf der Basis etablierter Analysewerkzeuge. Insofern auf diese Werkzeuge nicht zurückgegriffen werden kann bzw. der Einsatz neuer sinnvoll erscheint, werden diese zunächst beschrieben und anschließend an empirischen Beispielen geschärft. Diese Beispiele umfassen Gegenstandsbereiche des realen Mathematikunterrichts (Äußerungen von Lernenden in Interviews und/oder Unterrichtsgesprächen sowie Schulbücher). Die anschließend initiierten Lernprozesse sollen die Nutzbarkeit und die Bedeutung der theoretischen Analysen erweisen. Die wichtigsten Ergebnisse, sowohl theoretischer als auch empirischer Art, werden im *siebten Kapitel* komprimiert wiedergegeben.

Zusammenfassend kann der Kern der vorliegenden Arbeit darin gesehen werden, ausgewählte philosophisch-logische Begriffe zu nutzen, um das Entdecken, das Prüfen und das Begründen mathematischer Inhalte eingehend zu verstehen, um darauf basierend Lernprozesse zu initiieren und zu rekonstruieren.

Vor dem inhaltlichen Beginn bedarf es noch einer wichtigen Bemerkung: Die als Mathematikerin sozialisierte Leserin bzw. deren männliches Äquivalent wird wissen, dass der Schluss von einem Urteil zu einem anderen nur bei

Kenntnis eines passenden Vermittlungsgesetzes erlaubt ist. Unter dem Blickwinkel der deduktiven Logik werden unter der Bezeichnung „Schluss“ nur notwendige und sichere Folgerungen verstanden. Hierbei wenden wir uns bekannte Gesetze an. Wenn aber im Folgenden die Mathematik (bzw. das Wissen allgemein) in ihrem Entstehungsprozess betrachtet werden soll, so ergibt sich ein Problem: Die Gesetze sind uns zuvor nicht bekannt – zumindest nicht hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf die betrachteten Phänomene. Es bedarf daher eines ausgedehnteren Verständnisses von Begriffen wie „Schluss“ oder „Folgerung“, so dass es möglich wird, die Rationalität von Entdeckungsprozessen wiederzugeben. Dieses Verständnis lässt sich ebenfalls nicht mittels der induktiven Logik (bzw. das des logischen Empirismus) erfassen, entsprechend dem ausgehend von Einzelfällen auf etwas Allgemeines geschlossen werden würde. Das vermeintlich vertraute Verständnis des Grundbegriffs „Schluss“ wird in der vorliegenden Arbeit also erweitert und differenziert, ohne das Risiko mangelnder begrifflicher Präzision einzugehen. Die Ursachen für diese Erweiterung sind vielschichtig: So gehören zur Reflexion der mathematischen Tätigkeiten in Schule und Hochschule zwar einerseits die Beachtung logischer Zusammenhänge. Jedoch wurde andererseits in der Zeit der Wissenschaftsorientierung des Mathematikunterrichts in den 60er und 70er Jahren des letzten Jahrhunderts der Logik eine besonders hohe Bedeutung zugeschrieben (s. hierzu beispielsweise den Überblick in Griesel 1972 und weitere Artikel in den Ausgaben der „Beiträge zum Mathematikunterricht“ dieser Jahre), insbesondere im Bemühen, das Beweisen zu schulen. Diese frühen, tiefgründigen Ansätze zur mathematischen Logik im Schulbereich führten aber nicht zu den erhofften Erfolgen (zur Kritik siehe beispielsweise Kline 1973). Dafür können unteren anderen vier Gründe angeführt werden:

Erstens waren viele Ansätze auf die formale und/oder klassische Logik (Wahrheitstafeln etc.) beschränkt, sowohl in mathematikdidaktischen Arbeiten, als auch im Mathematikunterricht und in der grundständigen Hochschullehre. Auf diese Weise verloren inhaltlich-mathematische Gesichtspunkte zugunsten formallogischer Aspekte an Bedeutung. Beispielsweise ist nach der klassischen Logik folgende Implikation wahr: Wenn ein gleichseitiges Dreieck einen rechten Innenwinkel besitzt, dann treffen sich die Winkelhalbierenden außerhalb des Dreiecks.

Zweitens konzentrierten sich die logischen Betrachtungen auf deduktive Prozesse der Wissenssicherung. Der für das Mathematiklernen zentrale Prozess der Wissensgenerierung, der in den 80er Jahren mit Blick auf konstruktivistische Lerntheorien (s. auch „Entdeckendes Lernen“, u. a. Bruner 1981) ein Hauptthema der Mathematikdidaktik wurde, blieb logisch unbeleuchtet.

Drittens wurde im Versuch, das Beweisen im Mathematikunterricht formaler zu behandeln, eine grundsätzliche Differenz zwischen dem Problembewusstsein der Lernenden und dem der Mathematikdidaktiker erkennbar. Den Lernenden genüg(t)en oft induktive Prüfungen von mathematischen Aussagen an einzelnen Beispielen (s. z. B. Almeida 2001), um von der Wahrheit der Aussagen überzeugt zu sein, und ihnen erschienen die formalen Begründungen auf abstrakter Ebene eher irrelevant. Die in der Schulmathematik schon traditionell enge Bindung von allgemeingültigen mathematischen Aussagen an Beispielen wurde noch verstärkt, als in den 80er und 90er Jahren die Anwendungsorientierung zunehmende Bedeutung gewann (s. Modellieren). Die Mathematik wurde stärker mit Sachbeispielen aus der außerunterrichtlichen Lebenswirklichkeit verknüpft.

Viertens scheint die Hoffnung enttäuscht worden zu sein, dass die Lernenden durch eine frühe Schulung in logischen Grundlagen günstige Orientierungen zu ihren zukünftigen mathematischen Tätigkeiten gewinnen würden. Später stellte man entsprechend das Mathematiktreiben „vom Kopf auf die Füße zu stellen" habe, wie es u. a. durch die und in der Formulierung allgemeiner Lernziele deutlich wurde (s. beispielsweise Winter 1975). Die Erfahrung mathematische Inhalte eigenständig zu entwickeln habe der logischen Betrachtung der Endprodukte vorauszugehen. Und eine in sich geschlossene Behandlung der Logik mit den Lernenden, etwa im Rahmen eines Logik(ex)kurses, schaffe einen zusätzlichen Lernstoff, der mit mathematischen Tätigkeiten unverbunden bliebe.

Die vorliegende Arbeit nimmt also die logische Reflexion von mathematischen Tätigkeiten wieder auf. Die Arbeit basiert nun aber nicht mehr allein auf den engen Bereich der formalen und klassischen Logik, sondern nutzt weitergehende Ansätze aus der philosophischen Logik, und sie beansprucht nicht, die logische Betrachtung zum Thema für Lernende zu erheben. So werden die vier genannten Gründe für die enttäuschten Hoffnungen auf den Nutzen logischer Analysen berücksichtigt. Die logische Analyse wird zukunftsträchtiger. [2]

---

[2] Redaktionelle Anmerkungen:

- Hervorhebungen in Zitaten entsprechen stets dem Original.
- Alle im Text auftretenden Personen wurden anonymisiert (Pseudonyme).

# Vom Satz …