Tilo Arens
Frank Hettlich
Christian Karpfinger
Ulrich Kockelkorn
Klaus Lichtenegger
Hellmuth Stachel

LEHRBUCH

Arbeitsbuch Mathematik

Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege

3. Auflage

Springer Spektrum

Arbeitsbuch Mathematik

Tilo Arens · Frank Hettlich ·
Christian Karpfinger · Ulrich Kockelkorn ·
Klaus Lichtenegger · Hellmuth Stachel

Arbeitsbuch Mathematik

Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege

3. Auflage

Springer Spektrum

Tilo Arens
Karlsruhe, Deutschland

Frank Hettlich
Karlsruhe, Deutschland

Christian Karpfinger
München, Deutschland

Ulrich Kockelkorn
Berlin, Deutschland

Klaus Lichtenegger
Graz, Österreich

Hellmuth Stachel
Wien, Österreich

ISBN 978-3-642-54947-2 ISBN 978-3-642-54948-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-54948-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger
Einbandabbildung: © Jos Leys

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorbemerkungen

Auf verschiedentlichen Wunsch bieten wir alle Aufgaben des Buchs Arens et al., Mathematik mit Hinweisen, Lösungen und Lösungswegen als gedrucktes Buch. Die Inhalte des Buchs stehen als PDF-Dateien auch auf der Website **matheweb** zur Verfügung.

Die Aufgaben gliedern sich in drei Kategorien: Anhand der *Verständnisfragen* können Sie prüfen, ob Sie die Begriffe und zentralen Aussagen verstanden haben, mit den *Rechenaufgaben* üben Sie Ihre technischen Fertigkeiten und die *Anwendungsprobleme* geben Ihnen Gelegenheit, das Gelernte an praktischen Fragestellungen auszuprobieren.

Ein Punktesystem unterscheidet leichte Aufgaben •, mittelschwere •• und anspruchsvolle ••• Aufgaben. Die Lösungshinweise helfen Ihnen, falls Sie bei einer Aufgabe partout nicht weiterkommen. Für einen optimalen Lernerfolg schlagen Sie die Lösungen und Lösungswege bitte erst nach, wenn Sie selber zu einer Lösung gekommen sind.

Verweise auf Seiten, Formeln, Abschnitte und Kapitel beziehen sich auf die 3. Auflage des Buches Arens et al. *Mathematik*.

Wir wünschen Ihnen viel Freude und Spaß mit diesem Arbeitsbuch und in Ihrem Studium.

Der Verlag und die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2

Aufgaben

Verständnisfragen

2.1 • Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

1. „$x > 1$ ist hinreichend für $x^2 > 1$."
2. „$x > 1$ ist notwendig für $x^2 > 1$."
3. „$x \geq 1$ ist hinreichend für $x^2 > 1$."
4. „$x \geq 1$ ist notwendig für $x^2 > 1$."

2.2 • Welche der folgenden Schlüsse sind auf formaler Ebene (d. h. noch ohne tatsächliche Betrachtung der Wahrheitswerte der Aussagen) richtig? Welche sind als Implikationen wahre Aussagen, wenn man auch die Wahrheitswerte der jeweils verknüpften Aussagen betrachtet?

1. Alle Vögel können fliegen. Möwen sind Vögel.
   $\Rightarrow$ Möwen können fliegen.
2. Alle Vögel können fliegen. Pinguine sind Vögel.
   $\Rightarrow$ Pinguine können fliegen.
3. Alle Vögel können fliegen. Möwen können fliegen.
   $\Rightarrow$ Möwen sind Vögel.
4. Alle Vögel können fliegen. Libellen können fliegen.
   $\Rightarrow$ Libellen sind Vögel.

2.3 • Verneinen Sie die folgende (falsche) Aussage: „Alle stetigen Funktionen sind differenzierbar."

2.4 • Verneinen Sie die Aussage: „Zu jedem bekannten Teilchen gibt es ein entsprechendes Antiteilchen."

2.5 • Die *symmetrische Differenz* ist definiert über:

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Machen Sie sich die Bedeutung dieser Definition klar, und zeichnen Sie ein entsprechendes Venn-Diagramm.

2.6 • Wir betrachten die beiden folgenden Mengen:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$
$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Geben Sie jeweils eine Abbildung $N \to M$ an, die (a) injektiv, aber nicht surjektiv, (b) surjektiv, aber nicht injektiv, (c) bijektiv ist.

2.7 •• Wie viele unterschiedliche binäre, also zwei Aussagen verknüpfende Junktoren gibt es?

2.8 •• Formulieren Sie die Aussage

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = z$$

in natürlicher Sprache und verneinen Sie sie. Ist diese Aussage oder ihre Verneinung wahr?

2.9 •• Wir betrachten die Teilmengen X, Y und Z von $\mathbb{R}$. Verneinen Sie die Aussage

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y \ \forall z \in Z : x \cdot y < z.$$

2.10 •• Es seien M_1 und M_2 Teilmengen von X. Beweisen Sie die einfachste Form der *Regeln von de Morgan*, wobei wir C_X als Bezeichnung für die Komplementbildung bezüglich X verwenden:

$$C_X(M_1 \cap M_2) = C_X(M_1) \cup C_X(M_2),$$
$$C_X(M_1 \cup M_2) = C_X(M_1) \cap C_X(M_2).$$

Stellen Sie diesen Sachverhalt mittels Venn-Diagrammen dar.

2.11 •• Die Menge A_4 hat vier Elemente, die Mengen B_3, B_4 und B_5 haben entsprechend drei, vier und fünf Elemente. Überlegen Sie jeweils, ob es Abbildungen

$$f_{43} : A_4 \to B_3$$
$$f_{44} : A_4 \to B_4$$
$$f_{45} : A_4 \to B_5$$

geben kann, die (a) injektiv, aber nicht surjektiv, (b) surjektiv, aber nicht injektiv, (c) bijektiv sind.

T. Arens et al., *Arbeitsbuch Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-642-54948-9_1

2.12 •• Wir sind im Text nicht explizit auf den Unterschied zwischen *Aussagen* und *Aussageformen* eingegangen. Während wir Aussagen als feststellende Sätze definiert haben, die einen eindeutigen Wahrheitswert w oder f haben, sind **Aussageformen** Sätze, deren Wahrheitswert sich vorerst nicht bestimmen lässt, weil sie noch eine oder mehrere freie Variable beinhalten.

Beispiele für Aussageformen wären „Die Zahl x ist ungerade" oder "Monarch x regierte länger als 20 Jahre", wobei x jeweils die freie Variable bezeichnet. Ersetzt man in einer Aussageform die freien Variablen durch passende Objekte oder *bindet* die Variablen durch Quantoren, erhält man Aussagen. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen, Aussageformen oder keines der beiden handelt:

(a) „x ist ungerade" mit $x = 2$
(b) „x ist ungerade" mit $x = 3$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}: \; 1/(1 + x^2 y^2) \leq 1$
(d) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: \; 1/(1 + x^2 y^2) \leq 1$

2.13 ••• Jene reellen Zahlen x, die Lösung einer Polynomgleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$ sind, nennt man **algebraische Zahlen**. Dabei muss mindestens ein $a_k \neq 0$ sein.

Alle rationalen Zahlen sind algebraisch, aber auch viele irrationale Zahlen gehören zu dieser Klasse, etwa $\sqrt{2}$. Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen *transzendent*.

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat (was wir bald ohne Mühe beweisen werden können), die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.

2.14 ••• Wir können Mengen M_α mit den Elementen α einer **Indexmenge** I kennzeichnen. So etwas nennt man ein **System** oder eine **Familie** von Mengen,

$$F = \{M_\alpha : \alpha \in I\} \; .$$

Eine besonders häufige Wahl ist $I = \mathbb{N}$, man kann dann Mengen M_n mit $n \in \mathbb{N}$ durchnummerieren.

Für Systeme von Mengen schreibt man Durchschnitt und Vereinigung häufig als:

$$\bigcup_{M \in F} M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x \,|\, \exists \alpha \in I : x \in M_\alpha\}$$
$$\bigcap_{M \in F} M = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x \,|\, \forall \alpha \in I : x \in M_\alpha\}$$

- Beweisen Sie die Distributivgesetze:

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$
$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

- Beweisen Sie die **Regeln von de Morgan**, wobei alle $M \in F$ Teilmengen von X sind und C_X die Komplementbildung bezüglich X bezeichnet:

$$C_X\left(\bigcup_{M \in F} M\right) = \bigcap_{M \in F} C_X(M)$$
$$C_X\left(\bigcap_{M \in F} M\right) = \bigcup_{M \in F} C_X(M)$$

Stellen Sie diese Beziehungen für drei Mengen mittels Venn-Diagrammen dar.

2.15 ••• Betrachten Sie die Aussage des Kreters Epimenides „Alle Kreter sind Lügner" und die Aussage „Diese Aussage ist falsch". Wo liegt ein echtes, wo nur ein scheinbares Paradoxon vor und wie lässt sich letzteres auflösen?

Rechenaufgaben

2.16 • Beweisen Sie die Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

2.17 • Beweisen Sie die Abtrennregel (*modus ponens*):

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

2.18 • Beweisen Sie die Äquivalenzen:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$$

2.19 • Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ und $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. Bilden Sie die Mengen $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ und $M_2 \cup M_3$ sowie $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$, $M_1 \setminus M_3$, $M_2 \setminus M_3$, $\bigcap_{n=1}^3 M_n = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ und $\bigcup_{n=1}^3 M_n = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

2.20 •• Beweisen Sie das Distributivgesetz:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

2.21 •• Beweisen Sie die Absorptionsgesetze:

$$M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$$
$$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$$

Anwendungsprobleme

2.22 • Ist der folgende Schluss richtig?

(„Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden“ (Niels Bohr) $\wedge$ „Niemand versteht die Quantenmechanik“ (Richard Feynman)) $\Rightarrow$ „Niemand ist von der Quantenmechanik schockiert“

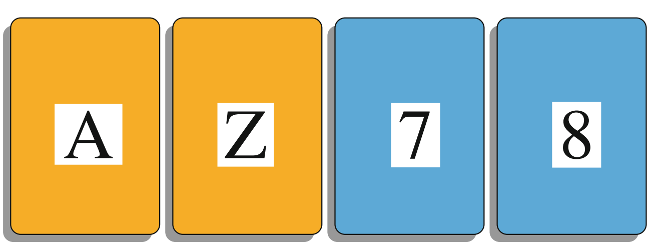
2.23 •• Nach einem Mordfall gibt es drei Verdächtige, A, B und C, von denen zumindest einer der Täter sein muss. Nachdem sie und die Zeugen getrennt vernommen wurden, kennen die Ermittler folgende Fakten:

1. Wenn A Täter ist, dann müssen B oder C ebenfalls Täter sein.
2. Wenn B Täter ist, dann ist A unschuldig.
3. Wenn C Täter ist, dann ist auch B Täter.

Lässt sich damit herausfinden, wer von den dreien schuldig bzw. unschuldig ist?

2.24 •• An einer Weggabelung in der Wüste leben zwei Brüder, die vollkommen gleich aussehen, zwischen denen es aber einen gewaltigen Unterschied gibt: Der eine sagt immer die Wahrheit, der andere lügt immer. Schon halb verdurstet kommt man zu dieser Weggabelung und weiß genau: Einer der beiden Wege führt zu einer Oase, der andere hingegen immer tiefer in die Wüste hinein. Man darf aber nur einem der Brüder (man weiß nicht, welcher es ist) genau eine Frage stellen. Was muss man fragen, um sicher den Weg zur Oase zu finden?

2.25 •• Sie haben vier Karten, jeweils mit einem Buchstaben auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite. Wie viele und welche der im Folgenden dargestellten Karten müssen Sie mindestens umdrehen, um die Aussage „wenn auf einer Seite einer Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl“ zu bestätigen.



2.26 ••• Jede beliebige Aussage, die durch ihre Wahrheitstafel gegeben ist, kann auf zwei fundamentale Arten dargestellt werden: In der *konjunktiven Normalform* als Konjunktion von Disjunktionen der beteiligten Variablen bzw. ihrer Negationen, und in der *disjunktiven Normalform* als Disjunktion von entsprechenden Konjunktionen.

Dies ist in der Digitalelektronik sehr praktisch, weil es eine automatisierbare Möglichkeit darstellt, zu jeder Wahrheitstafel einen äquivalenten logischen Ausdruck und damit eine Schaltung zu konstruieren.

Wir betrachten nun die beiden Wahrheitstafeln

A	B	G
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

und

A	B	C	H
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	f	w

.

Für die Aussage G lautet die disjunktive Normalform

$$G \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))) ,$$

die konjunktive

$$G \Leftrightarrow (((\neg A) \vee B) \wedge (A \vee (\neg B))) .$$

- Bestimmen Sie nun diese beiden Normalformen für die Aussage H.
- Gibt es ein Kriterium, für welche Art von Wahrheitstafel welche Normalform vorzuziehen ist, wenn man einen möglichst einfachen Ausdruck erhalten will?
- Lassen sich die so erhaltenen Ausdrücke noch weiter vereinfachen?

Hinweise

Verständnisfragen

2.1 • Bedenken Sie auch den Fall negativer Zahlen.

2.2 • Auf formaler Ebene folgt aus „Alle $x \in A$ haben Eigenschaft E“, dass auch alle $y \in B$ mit $B \subseteq A$ die Eigenschaft E haben. Hingegen gilt nicht nicht, dass wenn alle $x \in A$ und alle $y \in B$ Eigenschaft E haben, dass deswegen $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ oder gar $A = B$ sein muss. Bei Betrachtung der Wahrheitswerte gilt allerdings *ex falso quodlibet*.

2.3 • Beim Verneinen einer Allaussage entsteht eine Existenzaussage.

2.4 • Hier sind eine All- und eine Existenzaussage verknüpft. Beide ändern bei Verneinung ihren Charakter; im zweiten Fall ist es allerdings sprachlich schwierig (und verzichtbar), dies explizit auszuführen.

2.5 • Welche Elemente von A und B können in $A \Delta B$ enthalten bzw. nicht enthalten sein?

2.6 • Die bijektive Abbildung liegt auf der Hand. Um eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung zu konstruieren, muss man nur in der Wertemenge Elemente überspringen. Für eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung muss man mehrere Elemente des Wertebereichs auf das gleiche Element des Bildbereichs abbilden, diesen aber insgesamt immer noch voll ausschöpfen.

2.7 •• Zählen Sie die möglichen Belegungen einer entsprechenden Wahrheitstafel!

2.8 •• Bei der Verneinung der Quantoren ändert sich wie gehabt deren Charakteristik – aus All- werden Existenzquantoren und umgekehrt.

2.9 •• Beim Verneinen klappen die Quantoren um, ändern also ihre Charakteristik.

2.10 •• Zeigen Sie, dass ein Element der links stehenden Menge stets ein Element der rechts stehenden Menge sein muss und umgekehrt.

2.11 •• Versuchen Sie, jeweils eine derartige Abbildung explizit zu konstruieren. Das liefert Einsichten, warum es manche Abbildungen mit den geforderten Eigenschaften nicht geben kann.

2.12 •• Überprüfen Sie, ob Sie einen Wahrheitswert zuordnen können bzw. ob noch freie Variablen vorhanden sind.

2.13 ••• Konstruieren Sie eine Möglichkeit, alle Polynome mit ganzen Koeffizienten abzuzählen.

2.14 ••• Zeigen Sie, dass ein Element der linken Seite auch eines der rechten Seite sein muss und umgekehrt.

2.15 ••• Erinnern Sie sich an die Regeln beim Verneinen von Quantoren.

Rechenaufgaben

2.16 • Stellen Sie eine entsprechende Wahrheitstafel auf.

2.17 • Stellen Sie eine entsprechende Wahrheitstafel auf.

2.18 • Stellen Sie eine entsprechende Wahrheitstafel auf.

2.19 • Benutzen Sie die Definitionen aus Abschn. 2.4.

2.20 •• Betrachten Sie ein beliebiges Element und zeigen Sie, dass es genau dann zur Menge auf der linken Seite der Gleichung gehört, wenn es auch zu der Menge auf der rechten gehört. Dabei ist ein Rückgriff auf die Aussagenlogik notwendig.

2.21 •• Zeigen Sie, dass ein Element der linken Seite auch eines der rechten Seite sein muss und umgekehrt.

Anwendungsprobleme

2.22 • Betrachten Sie die Wahrheitstafel der Implikation und bedenken Sie das Prinzip des indirekten Beweises.

2.23 •• Spielen Sie alle möglichen Fälle durch und überprüfen Sie, wo sich Widersprüche ergeben. Alternativ können Sie auch eine aussagenlogische Formulierung finden und diese analysieren.

2.24 •• Versuchen Sie, eine Frage zu konstruieren, auf die jeder der beiden Brüder gleich antworten muss. Dabei ist es notwendig, das Verhalten des jeweils anderen Bruders miteinzubeziehen.

2.25 •• Nur in zwei Fällen ist nach Definition der Implikation ein Widerspruch zur Aussage überhaupt möglich; diese Fälle sind zu identifizieren.

2.26 ••• Einfacher zu verstehen ist, wie die disjunktive Normalform zustandekommt. Orientieren Sie sich zunächst an den w-Einträgen der Wahrheitstafel. Wie müssen beispielsweise die Eingangsvariablen (oder ihre Negationen) mittels $\wedge$ verknüpft sein, damit man genau dann eine wahre Aussage erhält, wenn A falsch ist, B und C hingegen wahr sind? Wie muss man die aus den einzelnen Zeilen resultierenden Einträge verknüpfen, um alle derartigen Möglichkeiten zu berücksichtigen? Drehen Sie die Überlegung für die konjunktive Normalform einfach um.

Lösungen

Verständnisfragen

2.1 • Nur die erste Aussage ist richtig.

2.2 • Die Schlüsse 1 und 2 sind formal richtig, 3 und 4 sind formal falsch. Bei Betrachtung der entsprechenden Wahrheitswerte sind alle Aussagen wahr.

2.3 • „Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind.“

2.4 • „Es gibt ein bekanntes Teilchen, zu dem es kein entsprechendes Antiteilchen gibt.“

2.5 • $A \Delta B$ enthält jene Elemente, die entweder in A oder in B enthalten sind, aber nicht in beiden.

2.6 • Eine injektive, nicht surjektive Abbildung ist $f(n) = \frac{1}{2n}$. Surjektiv, aber nicht injektiv ist etwa $g(2k-1) = \frac{1}{k}$, $g(2k) = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Eine simple bijektive Abbildung wäre $h(n) = \frac{1}{n}$.

2.7 •• Es sind 16.

2.8 •• „Für alle reellen Zahlen x und z gibt es eine reelle Zahl y, so dass $x \cdot y = z$ ist“ lautet verneint „Es gibt reelle Zahlen x und z, so dass für alle reellen Zahlen y stets $x \cdot y \neq z$ ist“. Die ursprüngliche Aussage ist falsch, die Negation wahr.

2.9 •• „$\exists x \in X\ \forall y \in Y\ \exists z \in Z : x \cdot y \geq z$.“

2.10 •• –

2.11 •• tabellarisch dargestellt:

	inj., ¬ surj.	surj., ¬ inj.	bijektiv
f_{43}	nein	ja	nein
f_{44}	nein	nein	ja
f_{45}	ja	nein	nein

2.12 •• (a) und (b) sind Aussagen, (c) ist eine Aussageform, (d) ist eine Aussage.

2.13 ••• –

2.14 ••• –

2.15 ••• „Alle Kreter sind Lügner“ von einem Kreter ist zwar falsch, aber kein Widerspruch – im Gegensatz zu „Diese Aussage ist falsch“.

Rechenaufgaben

2.16 • –

2.17 • –

2.18 • –

2.19 • $M_1 \cap M_2 = \{e\}$, $M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, ..., $\bigcup_{n=1}^{3} M_n = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

2.20 •• –

2.21 •• –

Anwendungsprobleme

2.22 • Nein.

2.23 •• A ist auf jeden Fall unschuldig, B schuldig. Ob auch C schuldig ist, lässt sich anhand der vorliegenden Fakten nicht feststellen.

2.24 •• „Von welchem Weg würde dein Bruder sagen, dass er zur Oase führt?“

2.25 •• Man muss die Karten $\boxed{\text{A}}$ und $\boxed{7}$ umdrehen.

2.26 ••• Disjunktive Normalform: $H \Leftrightarrow \big((A \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))\big)$

Konjunktive Normalform: $H \Leftrightarrow \big(((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg C)) \wedge ((\neg A) \vee B \vee C) \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)\big)$

Eine Vereinfachung ist in beiden Fällen noch möglich.

Lösungswege

Verständnisfragen

2.1 • Die erste Aussage stimmt. Wenn $x > 1$ ist, dann ist auch $x^2 > 1$. Die Bedingung $x > 1$ ist aber nicht notwendig für $x^2 > 1$, dann auch die Quadrate von Zahlen x mit $x < -1$ sind größer als eins.

Dass $x \geq 1$ ist, ist nicht hinreichend für $x^2 > 1$, denn im Falle $x = 1$ erhält man $x^2 = 1$. Mit dem gleichen Argument wie oben ist $x \geq 1$ nicht notwendig für $x^2 > 1$.

2.2 • Die Schlüsse 1 und 2 sind formal richtig, 3 und 4 sind formal falsch. Etwas abstrakter angeschrieben mit „fl“ für „kann fliegen“:

1. $\forall x \in V$: $\mathrm{fl}(x)$, $M \subseteq V \Rightarrow \forall x \in M : \mathrm{fl}(x)$, richtig
2. $\forall x \in V$: $\mathrm{fl}(x)$, $P \subseteq V \Rightarrow \forall x \in P : \mathrm{fl}(x)$, richtig
3. $\forall x \in V$: $\mathrm{fl}(x)$, $\forall x \in M : \mathrm{fl}(x) \Rightarrow M \subseteq V$, falsch
4. $\forall x \in V$: $\mathrm{fl}(x)$, $\forall x \in L : \mathrm{fl}(x) \Rightarrow L \subseteq V$, falsch

Derartige Schlussweisen werden in der klassischen Logik seit der Antike untersucht und als *Syllogismen* bezeichnet.

Betrachten wir nun zusätzlich die Wahrheitswerte: Die Aussagen „Wenn alle Vögel fliegen können und Möwen Vögel sind, dann können alle Möwen fliegen“ ist eine Implikation mit einer falschen Voraussetzung, denn nicht alle Vögel können fliegen. Entsprechend ist – *ex falso quodlibet* – die gesamte Aussage richtig. Das Gleiche gilt für die anderen drei Aussagen. Selbst dort, wo die Schlussweise falsch ist, erhält man durch die ebenfalls falsche Voraussetzung insgesamt eine wahre Aussage.

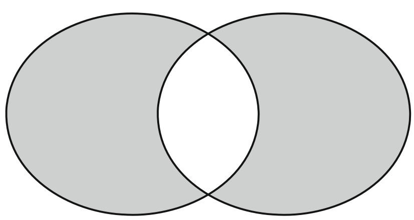
2.3 • Zunächst erhält man „Nicht alle stetigen Funktionen sind differenzierbar". Führt man nun die Verneinung des Allquantors explizit aus, so ergibt sich die Existenzaussage „Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind".

2.4 • Aus „Nicht zu jedem bekannten Teilchen gibt es ein entsprechendes Antiteilchen" wird „Es gibt ein bekanntes Teilchen, zu dem es kein entsprechendes Antiteilchen gibt". (Nach dem momentanen Stand der Physik ist diese Aussage wahrscheinlich falsch. Sehr wohl gibt es allerdings Teilchen, die ihr eigenes Antiteilchen sind.)

Man könnte auch die Verneinung der zweiten Existenzaussage explizit ausführen, erhielte dann aber eine sehr umständliche Konstruktion von der Art „Es gibt ein bekanntes Teilchen, so dass für alle Antiteilchen gilt, dass sie kein Antiteilchen dieses Teilchens sind".

Oft verhilft das explizite Verneinen von Quantoren zu neuen Einsichten – bei Weitem aber nicht immer.

2.5 • $A \Delta B$ enthält jene Elemente, die entweder in A oder in B enthalten sind, aber nicht in beiden. Das entsprechende Venn-Diegramm hat folgende Gestalt:



Eine äquivalente Definition der symmetrischen Differenz wäre übrigens

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2.6 • Um eine Abbildung zu konstruieren, die injektiv, aber nicht surjektiv ist, darf nicht nach ganz M abgebildet werden, die Abbildung muss aber in beide Richtungen eindeutig sein. Mit der Vorschrift $f(n) = \frac{1}{2n}$ werden alle Elemente von M der Form $1/(2n+1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ von f nicht „getroffen". Die Zordnung ist jedoch in beide Richtungen eindeutig.

Eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung g muss nach ganz M abbilden, das darf allerdings nicht auf eine in beide Richtungen eindeutige Weise geschehen. Zumindest ein Element muss mindestens zweimal von der Abbildung „getroffen" werden. Mit der Vorschrift $g(2k-1) = \frac{1}{k}$, $g(2k) = \frac{1}{k}$ werden jeweils zwei Elemente von N auf ein Element von M abgebildet.

Die wohl einfachste bijektive Abbildung ist h mit $h(n) = \frac{1}{n}$. Hier sieht man sowohl Injektivität als auch Surjektivität unmittelbar.

Neben den schon angegebenen Abbildungen gibt es natürlich noch viele weitere. Eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung kann man auch schon durch $f_2(n) = \frac{1}{n+1}$ erhalten. Dabei ist aus dem Bildelement eindeutig das Element der Wertemenge rekonstruierbar, das Element 1 der Wertemenge gehört aber nicht zum Bild.

Eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung wäre $g_2(1) = 1$, $g_2(n) = \frac{1}{n-1}$ für $n \geq 2$. Dabei wird die gesamte Menge M als Bild erfasst, das Element $1 \in M$ ist allerdings das Bild von zwei Elementen, nämlich $1 \in N$ und $2 \in N$ – damit ist die Abbildung bereits nicht mehr injektiv.

Auch aus h mit $h(n) = \frac{1}{n}$ kann man über Vertauschungen andere bijektive Abbildungen erzeugen, etwa h_2 mit $h_2(1) = \frac{1}{2}$, $h_2(2) = 1$ und $h_2(n) = \frac{1}{n}$ für $n \geq 3$.

2.7 •• Bei zwei Aussagen gibt es vier mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten, jeder davon kann entweder w oder f zugewiesen werden. Ingesamt gibt es also $N = 2^4 = 16$ verschiedene Junktoren, zu denen eben auch die vorgestellen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ gehören.

2.8 •• Die Aussage lautet „Für alle reellen Zahlen x und z gibt es eine reelle Zahl y, so dass $x \cdot y = z$ ist". Die Negation kann stufenweise erfolgen und führt von „Nicht für alle reellen Zahlen x und z gibt es eine reelle Zahl y, so dass $x \cdot y = z$ ist" über „Es gibt reelle Zahlen x und z, so dass es keine reelle Zahl y gibt, mit der $x \cdot y = z$ ist" hin zu „Es gibt reelle Zahlen x und z, so dass für alle reellen Zahlen y stets $x \cdot y \neq z$ ist".

Dass diese Negation und nicht die ursprüngliche Aussage wahr ist, sieht man sofort am Beispiel $x = 0$ und $z = 1$. Hingegen wäre die ursprüngliche Aussage wahr, würde man den Fall $x = 0$ von vornherein ausschließen.

2.9 •• Wir können die Negation gewissermaßen „durch" die Aussage schieben, wobei jeweils ein Quantor umklappt:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x \in X\ \exists y \in Y\ \forall z \in Z : x \cdot y < z)\\
&\exists x \in X\ \neg(\exists y \in Y\ \forall z \in Z : x \cdot y < z)\\
&\exists x \in X\ \forall y \in Y \neg(\forall z \in Z : x \cdot y < z)\\
&\exists x \in X\ \forall y \in Y\ \exists z \in Z : \neg(x \cdot y < z)\\
&\exists x \in X\ \forall y \in Y\ \exists z \in Z : x \cdot y \geq z
\end{aligned}$$

2.10 •• Wir beweisen die erste Regel, indem wir zeigen, dass von den beiden Mengen $C_X(M_1 \cap M_2)$ und $C_X(M_1) \cup C_X(M_2)$ jede eine Teilmenge der anderen ist. Damit müssen sie gleich sein.

Liegt ein Element $x \in X$ in $C_X(M_1 \cap M_2)$, so kann es nicht in M_1 *und* M_2 liegen. Damit liegt es im Komplement von M_1 oder M_2 bezüglich X und deshalb in der Vereinigung $C_X(M_1) \cup C_X(M_2)$.

Umgekehrt muss ein $x \in X$, das in $C_X(M_1) \cup C_X(M_2)$ in $C_X(M_1)$ oder $C_X(M_2)$ liegen. Es kann kein Element von M_1 *und* M_2 sein, muss also in $C_X(M_1 \cap M_2)$ liegen.

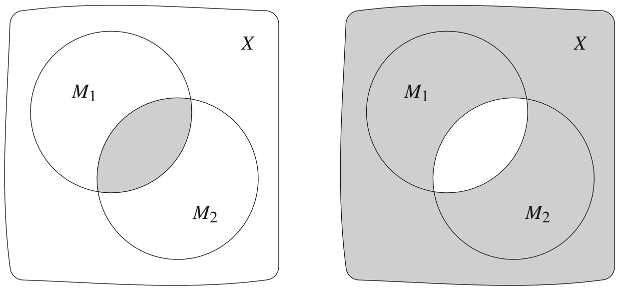


Abb. 2.23 Der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ zweier Mengen und sein Komplement $C_X(M_1 \cap M_2)$

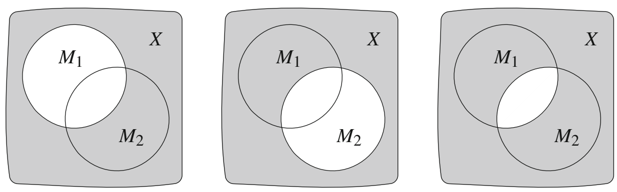


Abb. 2.24 Die Komplemente $C_X(M_1)$ und $C_X(M_2)$ und deren Vereinigung $C_X(M_1) \cup C_X(M_2)$

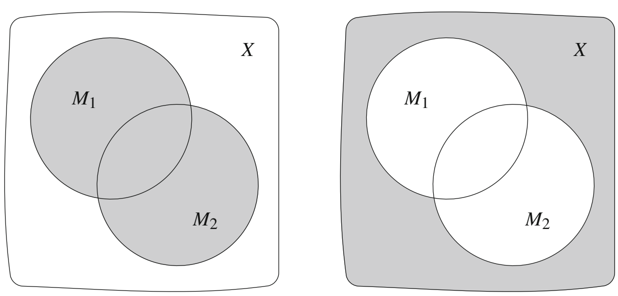


Abb. 2.25 Die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ zweier Mengen und ihr Komplement $C_X(M_1 \cup M_2)$

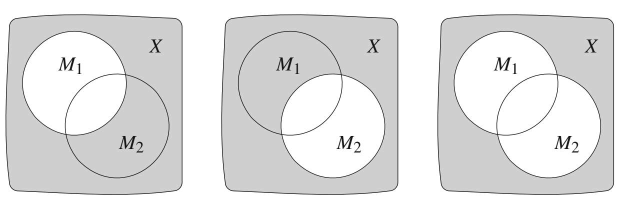


Abb. 2.26 Die Komplemente $C_X(M_1)$ und $C_X(M_2)$ und deren Durchschnitt $C_X(M_1) \cap C_X(M_2)$

Völlig analog können wir auch die zweite Regel beweisen. Die entsprechenden Venn-Diagramme sind in den Abb. 2.23 und 2.24 sowie 2.25 und 2.26 dargestellt.

2.11 •• Eine Abbildung $A_4 \to B_3$ kann surjektiv sein, aber niemals injektiv, da es im Wertebereich gar nicht genug Elemente gibt, um die Abbildung in beide Richtungen eindeutig zu machen. Ein Beispiel für eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung wäre:

$$f_{43}(a_1) = b_1, \quad f_{43}(a_2) = b_2$$
$$f_{43}(a_3) = b_3, \quad f_{43}(a_4) = b_1$$

Entsprechend kann eine Abbildung $A_4 \to B_5$ niemals surjektiv sein, da es in der Wertemenge zu viele Elemente gibt, als dass jedes im Bild liegen könnte. Eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung wäre:

$$f_{45}(a_1) = b_1, \quad f_{45}(a_2) = b_2$$
$$f_{45}(a_3) = b_3, \quad f_{45}(a_4) = b_4$$

Im Falle $A_4 \to B_4$ besitzt die Definitionsmenge gleich viele Elemente wie die Wertemenge. Damit lässt sich problemlos eine bijektive Abbildung konstruieren, etwa:

$$f_{44}(a_1) = b_1, \quad f_{44}(a_2) = b_2$$
$$f_{44}(a_3) = b_3, \quad f_{44}(a_4) = b_4$$

Wegen dieser genauen Übereinstimmung ist allerdings jede surjektive Abbildung gleichzeitig injektiv, und jede injektive Abbildung auch surjektiv.

2.12 •• (a) und (b) sind feststellende Sätze mit den eindeutigen Wahrheitswerte w und f. In (c) ist die Variable y frei, (e) ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert w.

2.13 ••• Eine Möglichkeit, die Abzählbarkeit der Polynome zu zeigen, ist die folgende: Zunächst nummerieren wir die ganzen Zahlen mit null beginnend durch, also etwa $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 2, \ldots$ Nun betrachten wir alle Polynome vom Grad n, wobei wir für die Koeffizienten a_k jeweils alle Zahlen b_ℓ mit $\ell \leq n$ zulassen. Eines dieser Polynome ist identisch null und muss ausgeschlossen werden. Es verbleiben $n^{n+1} - 1$ Polynome, von denen jedes nur eine endliche Zahl von Nullstellen hat. Tatsächlich sind es höchstens n unterschiedliche reelle Nullstellen.

Damit ist die Zahl der Nullstellen aller Polynome vom Grad n endlich und kann von x_{i_n} bis x_{f_n} durchnummeriert werden. Dass dabei viele Nullstellen mehrfach vorkommen werden, soll uns hier nicht weiter stören. Nun betrachten wir der Reihe nach $n = 2$, $n = 3, \ldots$ und nummerieren somit alle Nullstellen durch. Jedes mögliche Polynom mit ganzen Koeffizienten wird in dieser Abfolge irgendwann auftauchen; damit sind die algebraischen Zahlen abzählbar.

2.14 •••

- Wir lassen im folgenden Beweis der Kürze wegen die Indizierung $i \in I$ weg. Das Wort „*oder*“ ist stets im Sinne der Aussagenlogik, also nicht ausschließend zu verstehen.

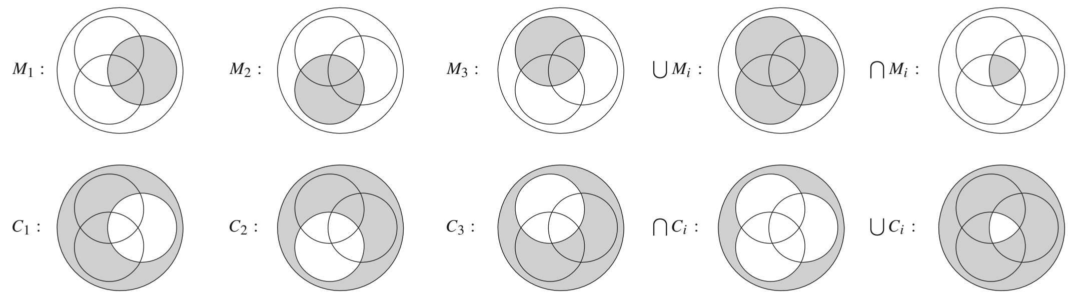


Abb. 2.27 Veranschaulichung der Regeln von de Morgan anhand dreier Mengen. Wir benutzen die Bezeichnung $C_i := C_X(M_i)$ für Komplemente bezüglich der Grundmenge X; die Durchschnitte und Vereinigungen gelten jeweils für $i = 1, 2, 3$

Damit ein Element x in $A \cup \bigcap B_i$ liegt, muss es in A oder im Durchschnitt aller B_i liegen. Es liegt demnach in A oder in jedem der B_i. Daher liegt es in jeder Menge $A \cup B_i$ und folgerichtig auch im Durchschnitt aller dieser Mengen, in $\bigcap(A \cup B_i)$.
Umgekehrt muss ein x, das in $\bigcap(A \cup B_i)$ liegt, in jeder der Mengen $A \cup B_i$ liegen. Das kann nur erfüllt sein, wenn es in A oder in *jeder* der Mengen B_i liegt. Damit liegt es sicher in $A \cup \bigcap B_i$.
Der Beweis des zweiten Gesetzes erfolgt analog.

- Wir beweisen auch hier nur die erste Regel, die Vorgehensweise ür die zweite ist vollkommen analog:

$$\begin{aligned} x \in C_X\left(\bigcup M\right) &\iff x \in X \text{ und } x \notin \bigcup M \\ &\iff x \in X \text{ und } \forall\, M \in F:\ x \notin M \\ &\iff \forall\, M \in F:\ x \in C_X(M) \\ &\iff x \in \bigcap C_X(M) \end{aligned}$$

Da diese Äquivalenz für jedes Element in $C_X(\bigcup M)$ und ebenso jedes in $\bigcap C_X(M)$ gilt, müssen die beiden Mengen identisch sein. Eine Darstellung der Regeln mittels Venn-Diagrammen erfolgt in Abb. 2.27.

2.15 ••• „Diese Aussage ist falsch." führt sowohl bei der Annahme, sie sei falsch, als auch bei der Annahme, sie sei wahr, immer auf Widersprüche.

Die Sache mit den Kretern ist da wesentlich diffiziler: Angenommen, Epimenides sagt die Wahrheit, und alle Kreter sind Lügner – im extremen Sinne dass sie immer die Unwahrheit sagen. In diesem Fall wäre auch seine Aussage unwahr und wir gelangen tatsächlich zu einem Widerspruch.

Nehmen wir nun an, Epimenides sage die Unwahrheit, und nicht alle Kreter seien Lügner. Das bedeutet, dass es zumindest einen Kreter geben muss, der die Wahrheit sagt – dabei braucht es sich aber nicht um Epimenides zu handeln. Dass die Aussage „alle Kreter sind Lügner" falsch ist, führt also auf keinerlei Widerspruch, solange Epimenides nicht der einzige Kreter ist.

Rechenaufgaben

2.16 • Wir führen den Beweis des ersten Gesetzes mittels Wahrheitstafel, der Beweis des zweiten erfolgt völlig analog:

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\wedge$	C	$\Leftrightarrow$	A	$\wedge$	$(B \wedge C)$
w	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	***w***	*w*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*w*	*f*	*f*	***w***	*w*	*f*	*f*
w	*f*	*w*	*f*	*f*	*w*	***w***	*w*	*f*	*f*
w	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	***w***	*w*	*f*	*f*
f	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*	***w***	*f*	*f*	*w*
f	*w*	*f*	*f*	*f*	*f*	***w***	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*w*	*f*	*f*	*w*	***w***	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	***w***	*f*	*f*	*f*

Die Assoziativgesetze sind die Rechtfertigung für Schreibweisen wie $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ ohne Klammern.

2.17 • Beweis mittels Wahrheitstafel:

A	B	$(A$	$\wedge$	$(A \Rightarrow B))$	$\Rightarrow B$
w	*w*		*w*	*w*	***w***
w	*f*		*f*	*f*	***w***
f	*w*		*f*	*w*	***w***
f	*f*		*f*	*w*	***w***

2.18 • Beweis mittels Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\wedge$	$\neg B)$
w	*w*	*w*	***w***	*w*	*f*	*f*	*f*
w	*f*	*w*	***w***	*w*	*f*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	***w***	*w*	*w*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	***w***	*f*	*w*	*w*	*w*

A	B	$(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg A$	$\vee$	$\neg B)$
w	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	f	f	f
w	f	f	$\boldsymbol{w}$	f	f	w	w
f	w	f	$\boldsymbol{w}$	f	w	w	f
f	f	f	$\boldsymbol{w}$	f	w	w	w

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$ (	$(\neg A)$	$\vee$	B)
w	w	w	$\boldsymbol{w}$	f	w	w
w	f	f	$\boldsymbol{w}$	f	f	f
f	w	w	$\boldsymbol{w}$	w	w	w
f	f	w	$\boldsymbol{w}$	w	w	f

2.19 • Die Lösungen ergeben sich durch einfaches Benutzen der Definitionen. Zum Beispiel enthält $M_1 \cap M_2$ nur jene Elemente, die beiden Mengen gemeinsam sind – das ist lediglich das Element e. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
M_1 \cap M_2 &= \{e\}\\
M_1 \cup M_2 &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}\\
M_1 \cap M_3 &= \{a, c, e\}\\
M_1 \cup M_3 &= \{a, b, c, d, e, g, i\}\\
M_2 \cap M_3 &= \{e, g, i\}\\
M_2 \cup M_3 &= \{a, c, e, f, g, h, i\}\\
M_1 \setminus M_2 &= \{a, b, c, d\}\\
M_2 \setminus M_1 &= \{f, g, h, i\}\\
M_1 \setminus M_3 &= \{b, d\}\\
M_2 \setminus M_3 &= \{f, h\}\\
\bigcap_{n=1}^{3} M_n &= \{e\}\\
\bigcup_{n=1}^{3} M_n &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}
\end{aligned}$$

2.20 •• Die folgenden Beziehungen sind einander jeweils äquivalent:

$$\begin{aligned}
&x \in M_1 \cup (M_2 \cap M_3)\\
&\iff x \in M_1 \vee x \in (M_2 \cap M_3)\\
&\iff x \in M_1 \vee (x \in M_2 \wedge x \in M_3)
\end{aligned}$$

und wegen $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$\begin{aligned}
&\iff (x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge (x \in M_1 \vee x \in M_3)\\
&\iff x \in M_1 \cup M_2 \wedge x \in M_1 \cup M_3\\
&\iff x \in (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)
\end{aligned}$$

Die oben verwendete aussagenlogische Äquivalenz

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

lässt sich leicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel zeigen.

2.21 •• Das Element x_1 sei in M_1 enthalten. Dann ist natürlich auch $x_1 \in M_1 \cup M_2$ und daher weiter $x_1 \in M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. x_2 sei nicht in M_1 enthalten. Dann kann es zwar Element von $M_1 \cup M_2$ sein (wenn es Element von M_2 ist), aber sicher nicht Element von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$. Das heißt, alle Elemente von M_1 und nur diese sind auch Elemente von $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$, also ist tatsächlich $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$. Der Beweis von $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$ verläuft völlig analog.

Anwendungsprobleme

2.22 • Wir nennen S „Man ist von der Quantenmechanik schockiert“ und V „Man hat die Quantenmechanik verstanden“. Dann behauptet Bohr „$\neg S \Rightarrow \neg V$“, Feynman, dass $\neg V$ eine wahre Aussage ist. Die Aussage „$\neg S \Rightarrow \neg V$“ ist äquivalent mit „$V \Rightarrow S$“, aber nicht mit „$\neg V \Rightarrow \neg S$“. Man kann auch von der Quantenmechanik schockiert sein, ohne sie verstanden zu haben.

2.23 •• Angenommen A sei schuldig. Dann folgt daraus, dass B ebenfalls schuldig ist, entweder direkt oder als Mittäter von C. Die Schuld von B impliziert aber die Unschuld von A, d. h. dieser Fall liefert einen Widerspruch.

Demnach ist A auf jeden Fall unschuldig. Nun nehmen wir an, B sei ebenfalls unschuldig. Da mindestens einer der drei schuldig sein muss, muss dann C ein Täter sein. Damit ist B aber Mittäter, und die Annahme, B sei unschuldig wurde auf einen Widerspruch geführt.

B ist auf jeden Fall schuldig – entweder direkt oder als Mittäter von C. Ob C aber schuldig ist, lässt sich mit diesen Mitteln nicht feststellen.

Alternativ zur obigen Vorgehensweise könnte man den aussagenlogischen Ausdruck

$$(A \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \Rightarrow \neg A) \wedge (C \Rightarrow B)$$

so weit wie möglich vereinfachen und daraus die Lösung ablesen.

2.24 •• Es ist klar, dass man nicht einfach „Welcher Weg führt zur Oase?“ fragen darf; die Antwort könnte ebenso gut wahr wie falsch sein. Auch „Sagst du die Wahrheit?“ bringt einen nicht weiter, außerdem hat man ja nur eine einzige Frage frei. Der Ausweg besteht darin, auf den anderen Bruder Bezug zu nehmen: Fragt man nämlich „Von welchem Weg würde dein Bruder sagen, dass er zur Oase führt?“, so erhält man die gleiche Auskunft (egal welchen der beiden Brüder man fragt) – und weiß, dass man den anderen Weg nehmen muss.

2.25 •• Auf jeden Fall umdrehen muss man die Karten $\boxed{\text{A}}$ und $\boxed{7}$. Auf der Rückseite von $\boxed{\text{A}}$ müsste, sollte die Aussage wahr sein, eine gerade Zahl stehen, auf der Rückseite von $\boxed{7}$ ein Konsonant. Was auf den Rückseiten der anderen beiden Karten steht, ist für die Überprüfung der Aussage hingegen irrelevant.

2.26 •••

- Für die disjunktive Normalform wollen wir Aussagen mit „Oder" verbinden, die jeweils nur für *eine* spezielle Kombination der Eingangsvariablen wahr sind. Um das zu tun, suchen wir alle Einträge, für die H wahr ist; das ist zum Beispiel für $A = f$, $B = f$ und $C = w$ der Fall.
  Damit gerade diese und nur diese Kombination einen wahren Ausdruck liefert, muss man die Variablen zu $(\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C$ kombinieren. Entsprechendes machen wir für jede Zeile, für die H wahr ergibt. Die Ausdrücke für die einzelnen Zeilen können wir nun mittels $\vee$ kombinieren. Damit genügt es, wenn die Bedingung für eine Zeile erfüllt ist, um insgesamt „wahr" zu erhalten.
  Das ergibt in diesem Beispiel:
  $$\begin{aligned} H \Leftrightarrow \big(& (A \wedge B \wedge C) \\ & \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C) \\ & \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge C) \\ & \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C))\big) \end{aligned}$$
  Für die konjunktive Normalform müssen wir die Argumentation gerade umdrehen. Hier orientieren wir uns an jenen Zeilen, die ein f liefern. Das ist zum Beispiel für $A = w$, $B = w$ und $C = f$ so. Nun *negieren* wir die wahren Eingangsvariablen und verbinden alle mit „Und" zu $(\neg A) \vee (\neg B) \vee C$. Genau für die Kombination $A = w$, $B = w$ und $C = f$ ist dieser Ausdruck falsch.
  Wieder führen wir die entsprechende Prozedur für alle Zeilen durch, die „falsch" liefern und verbinden sie mit „Und". Wenn eine der so erfassten Kombinationen vorliegt, ist der Gesamtausdruck „falsch", sonst „wahr",
  $$\begin{aligned} H \Leftrightarrow \big(& ((\neg A) \vee (\neg B) \vee C) \\ & \wedge ((\neg A) \vee B \vee (\neg C)) \\ & \wedge ((\neg A) \vee B \vee C) \\ & \wedge (A \vee (\neg B) \vee C)\big) \end{aligned}$$
- Sind mehr resultierende Einträge wahr, so ist die konjunktive Normalform einfacher. Sind mehr falsch, so ist die disjunktive Normalform vorteilhaft.
- Die Ausdrücke, die man per Normalform erhält, lassen sich oft noch vereinfachen, indem man die logischen Distributivgesetze und die für beliebige Aussagen A gültigen Beziehungen
  $$A \wedge (\neg A) = f \quad \text{und} \quad A \vee (\neg A) = w$$
  sowie
  $$f \vee A \Leftrightarrow A \quad \text{und} \quad w \wedge A \Leftrightarrow A$$
  benutzt. Hier ergibt dieses Vorgehen beispielsweise für die disjunktive Normalform
  $$\begin{aligned} H & \Leftrightarrow \big(((A \vee (\neg A)) \wedge B \wedge C) \\ & \qquad \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (C \vee (\neg C)))\big) \\ & \Leftrightarrow \big((w \wedge B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B) \wedge w)\big) \\ & \Leftrightarrow \big((B \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))\big)\,. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Aufgaben

Verständnisfragen

3.1 • Welche Probleme hat das folgende Vorgehen zur Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 + x = 0$?

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= 0 \quad \big|/x \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \quad \big|\sqrt{\ldots} \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

3.2 • Können Angaben von Werten über 100% sinnvoll sein?

3.3 • Warum werden leere Summen gleich null, leere Produkte aber gleich eins gesetzt?

3.4 • Bestimmen Sie die Summe aller natürlichen Zahlen von eins bis tausend.

3.5 • Scheitert der Beweis von „$2n + 1$ ist für alle $n \geq 100$ eine gerade Zahl" am Induktionsanfang, am Induktionsschritt oder an beidem?

3.6 • Die Zahlen a_k mit $k \in \mathbb{N}$ seien beliebig aus $\mathbb{R}$. Eine Summe der Form

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

nennt man eine *Teleskopsumme*. Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für den Wert einer solchen Summe und beweisen Sie sie mit Indexverschiebungen sowie mittels vollständiger Induktion.

3.7 •• Finden Sie zusätzlich zu den bereits im Text angegebenen Beispielen eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{N}$ falsch ist, für die sich der Induktionsschritt aber trotzdem durchführen lässt.

3.8 •• Beweisen oder widerlegen Sie:

$$p_n = n^2 - n + 41$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

3.9 •• Seltener als mit dem Binomialkoeffizienten hat man es mit seiner Verallgemeinerung, dem **Multinomialkoeffizienten** zu tun. Dieser ist definiert als

$$\binom{n}{\{k_1, \ldots, k_m\}} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$$

mit Zahlen $k_i \in \mathbb{N}_0$, die zusätzlich die Bedingung

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

erfüllen. Im Fall $m = 2$ reduziert sich das mit $k_1 = k$ und $k_2 = n - k$ auf den bekannten Binomialkoeffizienten. „Echte" Multinomialkoeffizienten treten dann auf, wenn man ein Multinom, also eine Summe mit mehr als zwei Summanden potenziert:

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n \\ &\quad = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{\{k_1, \ldots, k_m\}} a_1^{k_1}\, a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Multinomialkoeffizienten für $n = 2$ und $m = 3$ und ermitteln Sie damit ohne Ausmultiplizieren den Ausdruck $(a + b + c)^2$.

3.10 ••• Beweisen Sie die allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ mittels vollständiger Induktion.

3.11 ••• Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis" dafür, dass der Mars bewohnt ist:

Satz: Wenn in einer Menge von n Planeten einer bewohnt ist, dann sind alle bewohnt.

T. Arens et al., *Arbeitsbuch Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-642-54948-9_2

Beweis mittels vollständiger Induktion:

$n = 1$: trivial

$n \to n+1$: Laut Annahme sind von einer Menge von n Planeten alle bewohnt, sobald nur einer bewohnt ist. Nun betrachten wir eine Menge von $n+1$ Planeten (die wir willkürlich mit p_1 bis p_{n+1} bezeichnen). Von diesen schließen wir vorläufig einen aus unsere Betrachtungen aus, z. B. p_{n+1}. Wenn von der übriggebliebenen Menge von n Planeten nur einer bewohnt ist, sind laut Annahme alle bewohnt. Nun schließen wir von den n bewohnten Planeten einen aus, z. B. p_1, und nehmen p_{n+1} wieder hinzu. Wir erhalten wieder eine Menge von n Planeten, die bis auf p_{n+1} alle bewohnt sind. Auf jeden Fall ist einer bewohnt, demnach alle, also ist auch p_{n+1} bewohnt.

Korollar: Der Mars ist bewohnt.

Beweis: Betrachten Sie die n Planeten des Sonnensystems. Je nach aktueller Meinung zum Status des Pluto ist $n = 8$ oder $n = 9$, doch auf jeden Fall ist n endlich. Die Erde ist bewohnt, damit sind alle Planeten des Sonnensystems bewohnt – auch der Mars.

Rechenaufgaben

3.12 • Ein müder Floh springt zuerst einen Meter, dann nur mehr einen halben, dann gar nur mehr einen viertel Meter, kurz bei jedem Sprung schafft er nur mehr die Hälfte der vorangegangenen Distanz. Wie weit ist er nach sieben Sprüngen gekommen?

3.13 • Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Dabei ist $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= |5 - |2-3|| \\
A_2 &= \frac{x^2-1}{x+1} \\
A_3 &= \frac{\left|x^2-1\right|}{|(x+1)^2|} \\
A_4 &= 4^{(3^2)} - \left(4^3\right)^2 \\
A_5 &= \frac{9 + x + x^2 + 5x}{|-3| + \left(\sqrt{x}\right)^2}
\end{aligned}$$

3.14 •• Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\left|x^2-4\right| - \left|x+2\right| \left(x^2+x-6\right) > 0$$

3.15 • Zeigen Sie dass (sofern in den folgenden Ausdrücken die Nenner nicht verschwinden) stets gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \to \quad \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}\,.$$

Diese Regel ist als **korrespondierende Addition** bekannt. Versuchen Sie, eine analoge Regel auch für Ungleichungen (unter der Voraussetzung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$) zu finden.

3.16 • Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen n:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n\,(n+2)$$

3.17 • Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1) = (n-1)!$$

3.18 •• Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$\frac{|x-2| \cdot (x+2)}{x} < |x|$$

erfüllen.

3.19 •• Beweisen Sie die Pascal'sche Formel (3.11),

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

durch Aufspalten der Binomialkoeffizienten in Fakultäten.

3.20 •• Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + 2^{n+1} \cdot (n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2 = (-1)^{n+1}\, \frac{n\,(n+1)}{2}$$

3.21 •• Beweisen Sie mittels Induktion für alle natürlichen n:

- $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar
- $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar
- $3^{(2^n)} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar

3.22 •• $x \in \mathbb{R}$ sei eine feste Zahl, und es sei $p_1(x) = 1 + x$. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1}(x) = (1 + x^{(2^n)}) \cdot p_n(x)$$

Finden Sie einen expliziten Ausdruck für $p_n(x)$ und beweisen Sie dessen Gültigkeit mittels vollständiger Induktion.

3.23 •• Beweisen Sie mittels Induktion für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

3.24 •• Betrachten Sie eine Menge von reellen Zahlen x_k, wobei entweder alle $x_k \in (-1, 0)$ oder alle $x_k > 0$ sind. Beweisen Sie für diese die *verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

mittels vollständiger Induktion.

3.25 •• Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

3.26 ••

1. Zeigen Sie, dass für beliebige positive Zahlen x und y stets die Ungleichung
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$
gilt.
2. Die Zahlen a_k mit $k \in \mathbb{N}$ seien alle positiv. Zeigen Sie, dass stets
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$$
gilt.

3.27 ••• Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

3.28 ••• Man zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)\,(n-k) = \frac{n\,(n+1)\,(4n-1)}{6}$$

Anwendungsprobleme

3.29 • Zehn Katzen fangen in zehn Minuten zehn Mäuse. Wie viele Mäuse fangen hundert Katzen in hundert Minuten?

3.30 • Ein Erfinder stellt drei Maßnahmen vor, die jeweils den Energieverbrauch eines Motors reduzieren sollen. Die erste verringert den Verbrauch um 20%, die zweite um 30% und die dritte gar um 50%. Kann der Verbrauch des Motors mit allen drei auf null reduziert werden? Wenn nein, auf wie viel dann?

3.31 • Wieder taucht der Erfinder aus der vorherigen Aufgabe auf, diesmal mit einer Vorrichtung, die den Stromverbrauch von Glühlampen um 250% reduzieren soll. Was kann das bedeuten?

3.32 • Drei Firmen haben anfangs den gleichen Jahresumsatz. Der Umsatz von A bleibt in den darauffolgenden Jahren gleich. Der Umsatz von B nimmt zuerst um 50% zu und dann um 50% ab. Bei C hingegen nimmt der Umsatz zuerst um 50% ab, dann um 50% zu. Vergleichen Sie den Jahresumsatz der Firmen am Ende dieser Entwicklung.

3.33 • Für zwei in Serie geschaltete Widerstände R_1 und R_2 gilt

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2,$$

bei Parallelschaltung erhält man

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für eine beliebige Zahl n von Widerständen bei serieller Schaltung

$$R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} R_k,$$

und bei Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

gilt.

3.34 •• Ein Schwimmbecken kann mit drei Pumpen A, B und C gefüllt werden. A benötigt allein 2400 Minuten, B allein 1500 und C allein 4000 Minuten. Wie lange benötigen alle drei Pumpen zusammen?

3.35 •• Betrachten Sie den inelastischen Stoß auf S. 65 und bestimmen Sie die Menge an kinetischer Energie, die bei diesem Prozess in andere Energieformen umgewandelt wird.

3.36 • Lösen Sie die folgenden wichtigen Formeln aus Physik und Technik jeweils nach allen vorkommenden Größen auf:

(a) Für den zurückgelegten Weg s einer Bewegung bei gleichmäßiger Beschleunigung a gilt nach der Zeit t:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 .$$

(b) Das *Aktionsprinzip* der Newton'schen Mechanik gibt zwischen der Kraft F, die auf einen Körper der Masse m wirkt, und der Beschleunigung, die dieser Körper erfährt, den Zusammenhang

$$F = m a$$

an.

(c) Das Newton'sche Gravitationsgesetz ergibt für die Kraft F zwischen zwei Punktmassen m_1 und m_2 im Abstand r

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} ,$$

wobei G die *Gravitationskonstante* ist.

(d) Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten t_1, t_2 zweier Planeten wie die Kuben der großen Halbachsen a_1, a_2 ihrer Umlaufbahnen,

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} .$$

(e) Die Gesamtenergie W eines harmonisch schwingenden Körpers der Masse m, der mit einer Feder der Federkonstante k eingespannt ist, beträgt

$$W = \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} x^2 ,$$

wobei x die Position und v die Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

(f) Brennweite f, Gegenstandweite g und Bildweite b einer Linse sind durch die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} .$$

verknüpft.

(g) Beim senkrechten Einfall eines Lichtstrahls auf die Grenzschicht zwischen zwei Medien mit Brechzahlen n_1 und n_2 gilt für das Reflexionsvermögen R

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 .$$

(h) Für den Wirkungsgrad η eines Carnot-Prozesses, der zwischen den beiden Temperaturniveaus T_1 und T_2 mit $T_1 > T_2 > 0$ läuft, gilt

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} .$$

(i) Zwischen Widerstand R, Stromstärke I und Spannung U besteht in einem Leiter der Zusammenhang

$$U = R \cdot I .$$

(j) Die Masse m eines Körpers der Ruhemasse m_0, der sich mit Geschwindigkeit v bewegt, ist nach der speziellen Relativitätstheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ,$$

wobei c die konstante Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet.

(k) Springt das Elektron des Wasserstoffatoms von einem Orbital der Hauptquantenzahl $m \in \mathbb{N}$ in eines mit Hauptquantenzahl $n \in \mathbb{N}$, $n < m$ zurück, so gilt für die Energie W des emittierten Photons

$$W = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) ,$$

wobei R die *Rydberg-Konstante* bezeichnet.

Hinweise

Verständnisfragen

3.1 • Ist der Schritt in der ersten Zeile für alle $x \in \mathbb{R}$ möglich? Wo geht eine implizite Annahme ein?

3.2 • Kann etwa das Verkehrsaufkommen auf einer Straße um 120% zunehmen?

3.3 • Welchen Effekt will man bei leeren Summen bzw. Produkten erreichen?

3.4 • Benutzen Sie die arithmetische Summenformel.

3.5 • Überprüfen Sie, ob sich der Induktionsschritt vollziehen lässt, ob also aus der Ungeradheit von $2n+1$ auch die Ungeradheit von $2(n+1)+1$ folgen würde. Ist die Aussage für $n = 100$ wahr?

3.6 • Schreiben Sie T_1, T_2, T_3 explizit an und versuchen Sie, ein Muster zu erkennen.

3.7 •• Sie können zum Beispiel eine gültige Summenformel so modifizieren, dass der Induktionsschritt unbeeinflusst bleibt.

3.8 •• Überlegen Sie, ob die so definierte Zahl p_n für beliebige $n \in \mathbb{N}$ prim sein kann.

3.9 •• Spielen Sie alle Möglichkeiten durch, mit $m = 3$ Zahlen $n_i \in \mathbb{N}_0$ in Summe $n = 2$ zu erhalten.

3.10 ••• Benutzen Sie nach geeigneter Indexverschiebung die Pascal'sche Formel (3.11) in der Form

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

3.11 ••• Lässt sich der Induktionsschritt für alle n durchführen?

Rechenaufgaben

3.12 • Es handelt sich um eine geometrische Summe, für die man nur die entsprechende Summenformel anwenden muss.

3.13 • Benutzen Sie die Rechenregeln für Brüche, Potenzen und Beträge, wie sie in den Abschn. 3.1 und 3.3 angegeben sind.

3.14 •• Gehen Sie wie bei den Beispielen auf S. 69 vor. Welche Bereiche sind hier zu unterscheiden?

3.15 • Schreiben Sie die Voraussetzung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ in bruchfreier Form und addieren Sie einen Term, der Ihnen erlaubt, auf der linken Seite a und auf der rechten c herauszuheben. Sie können auch mit der zu beweisenden Gleichung $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ beginnen und diese durch Äquivalenzumformungen zu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vereinfachen.

3.16 • Das Vorgehen erfolgt analog zu dem auf S. 81 für die arithmetische Summenformel.

3.17 • Induktionsbeweis mit Induktionsanfang bei $n = 2$ oder Beweis per Indexverschiebung.

3.18 •• Gehen Sie wie bei den Beispielen auf S. 69 vor. Welche Bereiche sind hier zu unterscheiden?

3.19 •• Spalten Sie die Binomialkoeffizienten gemäß Definition in Quotienten von Fakultäten auf. Beginnen Sie mit $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ und heben Sie aus der Summe so viele gemeinsame Faktoren wie möglich heraus.

3.20 •• Es handelt sich in beiden Fällen um Standard-Induktionsbeweise, wie sie in Abschn. 3.5 behandelt werden.

3.21 •• Orientieren Sie sich am Beispiel auf S. 83. Eine Fallunterscheidung oder die Anwendung einer binomischen Formel kann unter Umständen notwendig sein.

3.22 •• Bestimmen Sie die Ausdrücke für $p_2(x)$, $p_3(x)$ und $p_4(x)$, und versuchen Sie, ein Muster zu erkennen.

3.23 •• Hier ist es besonders hilfreich, die Induktionsbehauptung so umzuschreiben, dass bei den später notwendigen Umformungen klar ist, worauf diese abzielen.

3.24 •• Mit den gemachten Annahmen ist $1 + x_k > 0$.

3.25 •• Setzen Sie in die binomische Formel (3.10) geeignete Werte ein.

3.26 •• Schreiben Sie im ersten Teil die Ungleichung auf ein vollständiges Quadrat um und beweisen Sie den zweiten Teil mittels vollständiger Induktion unter Zuhilfenahme des ersten.

3.27 ••• Spalten Sie im Produkt in der Induktionsbehauptung den letzten Faktor ab, benutzen Sie die Induktionsannahme und vereinfachen Sie das Ergebnis.

3.28 ••• Bei diesem Induktionsbeweis ist es günstig, mit der linken Seite der Behauptung zu beginnen und die Summe so aufzuspalten, dass man einerseits die linke Seite der Annahme erhält, andererseits nur Summen, die sich leicht auswerten lassen. Man beachte insbesondere, dass Summen, in deren Summanden der Summationsindex nicht vorkommt, einfache Produkte sind.

Anwendungsprobleme

3.29 • Es sind nicht hundert; hier liegt wieder ein doppelter Dreisatz vor.

3.30 • Die Prozentangaben sind jeweils auf den neuen Ausgangswert zu beziehen.

3.31 • Kann sich die Prozentangabe realistischerweise auf den Ausgangsverbrauch beziehen?

3.32 • Die Prozentangaben sind jeweils auf den letzten Wert zu beziehen.

3.33 • Der Induktionsanfang ist schon gemacht; für den Induktionsschritt fassen Sie jeweils n Widerstände zu einem zusammen, dessen Widerstand Sie nach Induktionsannahme bereits kennen.

3.34 •• Betrachten Sie Füllraten (Volumen pro Zeit); die Gesamtfüllrate ist die Summe der drei einzelnen Füllraten. Es kann hilfreich sein, das unbekannte Gesamtvolumen V explizit einzuführen.

3.35 •• Die kinetische Energie des Stoßprodukts ist durch $E = (m_1 + m_2)\, w^2/2$ gegeben. Bestimmen Sie die Differenz ΔE zwischen der ursprünglichen kinetischen Energie und diesem Ausdruck.

3.36 • In allen Fällen sind einfache Umformungen ausreichend. Manchmal ergibt sich durch Wurzelziehen ein Doppelvorzeichen, dann ist zu überlegen, ob negative Werte für die entsprechende Größe sinnvoll sind.

Lösungen

Verständnisfragen

3.1 • Die Lösung $x = 0$ geht verloren.

3.2 • Ja.

3.3 • Um sie „wirkungslos“ zu machen.

3.4 • 500 500.

3.5 • Am Induktionsanfang.

3.6 • $T_n = a_n - a_1$

3.7 •• Ein Beispiel wäre die Gültigkeit der Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = 42 + \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.8 •• Die Zahl p_n ist nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ prim.

3.9 •• $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

3.10 ••• –

3.11 ••• Im Induktionsschritt $n \to n + 1$ wird implizit $n \geq 2$ vorausgesetzt.

Rechenaufgaben

3.12 • $s = 127/64$

3.13 • $A_1 = 4$, $A_2 = x - 1$, $A_3 = |(x - 1)/(x + 1)|$, $A_4 = 258\,048$, $A_5 = 3 + x$.

3.14 •• $L = (-4, 2) \setminus \{-2\} = (-4, -2) \cup (-2, 2)$

3.15 • Wenn a, b, c und d alle positiv sind, folgt aus $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ völlig analog zum Gleichungsfall $\frac{a}{a+b} < \frac{c}{c+d}$.

3.16 • –

3.17 • –

3.18 •• $L = \{x \,|\, x < 0 \vee x > \sqrt{2}\}$

3.19 •• –

3.20 •• –

3.21 •• –

3.22 •• $p_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k$

3.23 •• –

3.24 •• –

3.25 •• –

3.26 •• –

3.27 ••• –

3.28 ••• –

Anwendungsprobleme

3.29 • Sie fangen tausend Mäuse.

3.30 • Nein, bestenfalls auf 28%.

3.31 • Die Lampe würde Energie liefern, statt sie zu verbrauchen!

3.32 • Für die Umsätze U gilt $U_B = U_C = 0.75\, U_A$.

3.33 • –

3.34 •• 750 Minuten.

3.35 •• $\Delta E = m_1 m_2/(m_1 + m_2) \cdot (v_1 - v_2)^2/2$.

3.36 • Zum Beispiel erhält man:

(a) $a = 2\,s/t^2$, $t = \sqrt{2s/a}$

(b) $m = F/a$, $a = F/m$

(c) $G = F\,r^2/(m_1\,m_2)$, $r = \sqrt{G\,m_1\,m_2/F}$, $m_1 = F\,r^2/(G\,m_2)$, $m_2 = F\,r^2/(G\,m_1)$

Lösungswege

Verständnisfragen

3.1 • Im ersten Schritt geht eine Lösung verloren. Statt durch x zu dividieren, sollte man es ausklammern und im entstandenen Produkt jeden Faktor getrennt null setzen:

$$x\,(x^2 - 2x + 1) = 0$$

Zusätzlich zur Doppellösung $x = 1$ erhält man dann noch die einfache Lösung $x = 0$.

Des Weiteren wird in der beim Ziehen der Wurzel implizit $x - 1 \geq 0$ vorausgesetzt; dabei geht allerdings keine Lösung verloren.

3.2 • In bestimmten Fällen machen Prozentangaben von über 100% durchaus Sinn, etwa bei besonders drastischen Zunahmen. Für einen Anteil (oder eine Abnahme) hingegen sind 100% die absolute Obergrenze.

3.3 • In beiden Fällen möchte man erreichen dass eine derartige *leere* Konstruktion „nichts tut". Bei einer Summe ist es klar: Wenn zu einem beliebigen Ausdruck null addiert wird, ändert sich nichts. Das *neutrale Element* der Multiplikation ist aber die Eins – damit ein leeres Produkt so wenig Schaden wie möglich anrichtet, setzt man es definitionsgemäß gleich eins.

3.4 • Wir erhalten mit der arithmetischen Summenformel

$$\sum_{k=1}^{1000} = 1 + 2 + \ldots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500.$$

3.5 • 201 ist ungerade, womit der Induktionsanfang nicht gegeben ist, der Induktionsschritt hingegen lässt sich vollziehen:

$$2\,(n+1) + 1 = \underbrace{2n+1}_{\text{gerade nach Annahme}} + 2$$

wäre gerade.

3.6 • In dieser Summe kommen alle Beiträge bis auf den ersten und den letzten zweimal mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen vor. Diese Terme fallen weg und man erhält $T_n = a_n - a_1$.

Das lässt sich formal am einfachsten mittels Indexverschiebung zeigen:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=2}^{n-1} a_k + a_n - a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k \\ &= a_n - a_1 \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Formel lässt sich auch mittels vollständiger Induktion beweisen. Für den Induktionsanfang erhalten wir bei $n = 1$ die wahre Aussage $0 = a_1 - a_1$. Der Induktionsschritt $n \to n + 1$ ergibt nun:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_{n+1} - a_n \stackrel{\text{Ann.}}{=} \\ &= a_n - a_1 + a_{n+1} - a_n = \\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

Kapitel 3

3.7 ●● Für

$$\sum_{k=1}^{n} k = 42 + \frac{n\,(n+1)}{2}$$

schlägt der Induktionsanfang klarerweise fehl. Für den Induktionsschritt hingegen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &\overset{\text{Ann.}}{=} \\ &= 42 + \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 42 + \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\end{aligned}$$

3.8 ●● Betrachten Sie zum Beispiel $n = 41$. Dafür erhalten wir

$$p_{41} = 41^2 - 41 + 41 = 41 \cdot 41$$

was keine Primzahl sein kann.

3.9 ●● Wir erhalten

$$\begin{aligned}\tbinom{2}{\{2,0,0\}} &= \tbinom{2}{\{0,2,0\}} = \tbinom{2}{\{0,0,2\}} = \tfrac{2!}{2!\,0!\,0!} = 1 \\ \tbinom{2}{\{1,1,0\}} &= \tbinom{2}{\{1,0,1\}} = \tbinom{2}{\{0,1,1\}} = \tfrac{2!}{1!\,1!\,0!} = 2\,,\end{aligned}$$

und damit ergibt sich für $(a+b+c)^2$:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \tbinom{2}{\{2,0,0\}} a^2\, b^0\, c^0 + \tbinom{2}{\{0,2,0\}} a^0\, b^2\, c^0 \\ &\quad + \tbinom{2}{\{0,0,2\}} a^0\, b^0\, c^2 + \tbinom{2}{\{1,1,0\}} a^1\, b^1\, c^0 \\ &\quad + \tbinom{2}{\{1,0,1\}} a^1\, b^0\, c^1 + \tbinom{2}{\{0,1,1\}} a^0\, b^1\, c^1 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

3.10 ●●●

1. $n = 0$: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0\, b^0$ ist richtig.
2. Induktionsschluss:

2. a Induktionsannahme:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

2. b Induktionsbehauptung:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

2. c Beweis der Behauptung. Dabei benutzen wir die Aufspaltung von Summen, eine Indexverschiebung, den Umstand, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $k > n$ oder $n < 0$ gleich null gesetzt wird, und die Pascal'sche Formel:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\ &\overset{\text{lt. Ann.}}{=} (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}\end{aligned}$$

3.11 ●●● Betrachtet man den Induktionsschritt genauer, so fällt auf, dass diese Argumentation nur für $n \geq 2$ möglich ist. Schließt man bei $n \to n+1$ für $n = 1$ aus einer Menge von $n + 1 = 2$ Planeten einen aus, so bleibt nur einer übrig. Bei Ausschluss des nach Voraussetzung bewohnten Planeten bleibt nur der unbewohnte übrig. Man müsste den Induktionsanfang demnach bei $n = 2$ setzen – „Wenn von einer Menge von zwei Planeten einer bewohnt ist, sind beide bewohnt". Das ist offensichtlich falsch.

Rechenaufgaben

3.12 ● Die geometrische Summenformel liefert:

$$\begin{aligned}s &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^6} = \sum_{k=0}^{6} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}.\end{aligned}$$

3.13 ●

$$\begin{aligned}A_1 &= \big|5 - |-1|\big| = |5-1| = |4| = 4 \\ A_2 &= \frac{(x+1)\,(x-1)}{x+1} = x - 1 \\ A_3 &= \left|\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\right| = \left|\frac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)^2}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \\ A_4 &= 4^9 - 4^6 = 258\,048 \\ A_5 &= \frac{9+6x+x^2}{3+x} = \frac{(3+x)^2}{3+x} = 3 + x\end{aligned}$$

3.14 •• Zunächst heben wir mit

$$|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$$

auf der linken Seite der Ungleichung den Faktor $|x+2|$ heraus,

$$|x+2|\,\{|x-2| - (x^2 + x - 6)\} > 0\,.$$

Für $x = -2$ ist die linke Seite gleich null, die Ungleichung ist dort nicht erfüllt. Diesen Punkt müssen wir entsprechend aus der Lösungsmenge ausnehmen. Für $x \neq -2$ hingegen ist $|x{+}2|$ stets positiv und wir können die Ungleichung durch diesen Ausdruck dividieren. Zu lösen bleibt damit nur noch die Ungleichung

$$|x-2| - \left(x^2 + x - 6\right) > 0\,.$$

Hier treffen wir eine Fallunterscheidung:

- $x \geq 2$: In diesem Bereich gilt die Ungleichung

  $$(x-2) - \left(x^2 + x - 6\right) > 0\,,$$

  die sich umformen lässt zu $x^2 < 4$, also $|x| < 2$. Das ist im betrachteten Bereich nie möglich, es gibt demnach keine Lösungen für $x \geq 2$.
- $x < 2$: Hier erhält die Ungleichung die Gestalt

  $$\begin{aligned} -(x-2) - \left(x^2 + x - 6\right) &> 0 \\ -x^2 - 2x + 8 &> 0 \\ x^2 + 2x + 1 - 9 &< 0 \\ (x+1)^2 &< 9\,, \end{aligned}$$

  also $|x+1| < 3$, $x \in (-4,\,2)$.

Wir erhalten nur eine Lösung im zweiten Bereich, müssen dabei aber noch berücksichtigen, dass wir ja den Punkt $x = -2$ aus unserer Betrachtung ausnehmen mussten. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist damit

$$L = (-4,\,2) \setminus \{-2\} = (-4,\,-2) \cup (-2,\,2)\,.$$

3.15 • Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist äquivalent zu $ad = bc$. Nun addieren wir auf beiden Seiten den Term ac und heben links a, rechts c heraus,

$$a\,(c+d) = c\,(a+b)\,.$$

Nun dividieren wir durch $(c{+}d)(a{+}b)$, was nach Voraussetzung ungleich Null ist, und erhalten

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}\,.$$

[Wir erinnern daran, dass es allgemein als „schöner" gilt, von der Voraussetzung auszugehen und durch geschickte Umformung zu der Beziehung zu kommen, die man zeigen möchte. Oft ist das allerdings schwierig, und dann wird man eher mit dem gewünschten Resultat beginnen und dieses durch Umformungen auf die Voraussetzung zurückführen. Solange dabei nur Äquivalenzumformungen benutzt werden, ist dieser Weg legitim und kann, wenn einmal gefunden, auch jederzeit in der anderen Richtung beschritten werden. Auch in diesem Fall ist es vermutlich einfacher, mit $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ zu beginnen und die Äquivalenz mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ zu zeigen.]

Auf analogem Weg kann man

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

herleiten. Eine verwandte Beziehung gilt auch für Ungleichungen. Um Komplikationen mit Vorzeichen zu vermeiden, gehen wir davon aus, dass a, b, c und d alle positiv sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Multiplikation mit $bd > 0$ liefert

$$ad < bc\,.$$

Nun addieren wir wieder ac auf beiden Seiten, heben a bzw. c heraus, dividieren durch $(c+d)(a+b) > 0$ und erhalten

$$\frac{a}{a+b} < \frac{c}{c+d}\,.$$

Wenn nicht alle Größen positiv (oder alle negativ) sind, werden Fallunterscheidungen notwendig, ebenso wenn man den Term ac nicht addiert, sondern subtrahiert.

3.16 • Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion:

1. Induktionsanfang, $n = 1$:

   $$\sum_{k=1}^{1}(2k+1) = 3 = 1 \cdot 3$$

   ist eine wahre Aussage.
2. Induktionsschritt:
   - Induktionsannahme: $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = n\,(n+2)$
   - Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) = (n+1)\,(n+3)$
   - $n \to n+1$:

   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k+1) + 2\,(n+1) + 1 \overset{\text{Ann.}}{=} \\ &= n\,(n+2) + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+1)\,(n+3) \end{aligned}$$