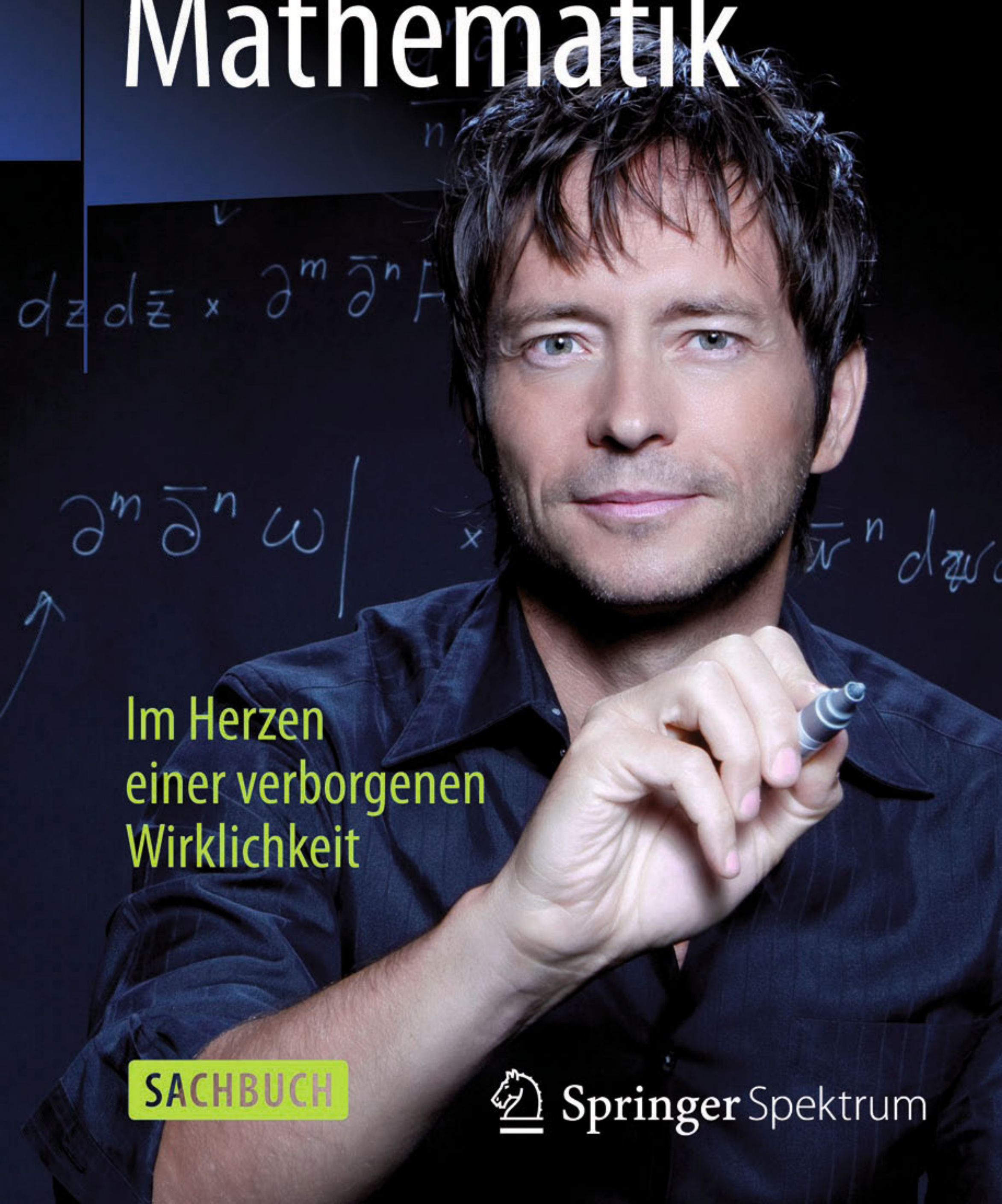
Edward Frenkel

Liebe und Mathematik



Im Herzen einer verborgenen Wirklichkeit

SACHBUCH

Springer Spektrum

Liebe und Mathematik

Edward Frenkel ist Professor für Mathematik an der University of California in Berkeley. Der russischstämmige Mathematiker hat an der Harvard University promoviert, ist 2002 mit dem renommierten Hermann-Weyl-Preis ausgezeichnet worden und zählt zu den treibenden Kräften des internationalen Langlands-Programms. Er ist Mitglied der American Academy of Arts and Sciences, hat Artikel unter anderem in der *New York Times,* im *Wall Street Journal* und im *Scientific American* veröffentlicht und mit der französischen Filmemacherin Reine Graves den Film *Rites of Love and Math* gedreht und produziert. Frenkel lebt in Berkeley.

Website zum Buch: http://loveandmathbook.com
Website des Autors: www.math.berkeley.edu/~frenkel
Facebook: www.facebook.com/loveandmath
Twitter: twitter.com/edfrenkel

Edward Frenkel

Liebe und Mathematik

Im Herzen einer verborgenen Wirklichkeit

Aus dem Englischen übersetzt
von Dr. Thomas Filk

Springer Spektrum

Edward Frenkel
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA,
USA

Aus dem Englischen übersetzt von Dr. Thomas Filk. Übersetzung der amerikanischen Ausgabe: Love and Math - The Heart of Hidden Reality von Edward Frenkel, erschienen bei Basic Books, A Member of the Perseus Books Group 2013,

ISBN 978-3-662-43420-8 ISBN 978-3-662-43421-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-43421-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Frank Wigger, Stella Schmoll
Redaktion: Bernhard Gerl
Einbandentwurf: deblik Berlin
Einbandabbildung: Elizabeth Lippman

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Da draußen gibt es eine geheime Welt. Ein verstecktes Paralleluniversum von Schönheit und Eleganz, das auf komplizierte Weise mit unserem Universum verwoben ist. Es ist die Welt der Mathematik, die aber für die meisten von uns unsichtbar ist. Dieses Buch möchte Sie einladen, diese Welt zu erkunden.

Denken Sie einmal über das folgende Paradoxon nach: Auf der einen Seite ist die Mathematik eng mit unserem Alltagsleben verknüpft. Jedes Mal, wenn wir im Internet einkaufen, eine E-Mail verschicken, einen Computer oder unser Navigationsgerät verwenden, spielen mathematische Formeln und Algorithmen eine Rolle. Auf der anderen Seite lassen sich die meisten Menschen von der Mathematik einschüchtern. Der Dichter Hans Magnus Enzensberger fragt in diesem Zusammenhang: „Woher kommt es, dass die Mathematik in unserer Zivilisation so etwas wie ein blinder Fleck geblieben ist, ein exterritoriales Gebiet, in dem sich nur wenige Eingeweihte verschanzt haben?" Es passiert selten, meint er, dass wir jemanden treffen, der uns mit Nachdruck versichert, dass allein schon der Gedanke daran, einen Roman zu lesen oder ein Gemälde zu betrachten oder einen Film anzuschauen, für ihn eine unerträgliche Qual bedeutet, doch selbst vernünftige und gebildete Leute behaupten oft mit einer beachtlichen Mischung aus Trotz und Stolz, dass Mathematik für sie „die reine Qual" oder „ein Albtraum" sei, bei dem sie gleich abschalten.

Wie ist eine solche Schieflage möglich? Ich sehe hauptsächlich zwei Gründe. Zum einen ist die Mathematik abstrakter als andere Gebiete und daher nicht so leicht zugänglich. Zum anderen ist das, was wir in der Schule lernen, nur ein winziger Teil der Mathematik, von dem sich das Meiste bereits vor über einem Jahrtausend etabliert hat. Seit damals hat die Mathematik einen gewaltigen Fortschritt gemacht, doch die Schätze moderner Mathematik wurden den meisten von uns vorenthalten.

Angenommen, Sie hätten in der Schule einen „Kunstunterricht" besucht, in dem Sie nur gelernt hätten, wie man einen Zaun anstreicht. Angenommen, Sie hätten niemals die Gemälde von Leonardo da Vinci oder Picasso gesehen. Hätten Sie unter diesen Umständen eine Vorliebe für die Kunst entwickelt? Hätten Sie den Wunsch gehabt, mehr darüber zu erfahren? Ich bezweifle das. Vermutlich würden Sie sagen „Der Kunstunterricht in der Schule war reine

Zeitverschwendung. Wenn ich jemals meinen Zaun streichen muss, lasse ich das einen Maler für mich machen“, oder so ähnlich. Natürlich klingt das lächerlich, doch genau so wird uns die Mathematik beigebracht, und daher erscheint die Mathematik für die meisten von uns todlangweilig. Während die Gemälde der großen Meister für uns leicht zugänglich sind, bleibt die Mathematik der großen Meister für uns verschlossen.

Es ist jedoch nicht nur die ästhetische Schönheit der Mathematik, die einen gefangen nehmen kann. Schon Galileo schrieb: „Die Naturgesetze sind in der Sprache der Mathematik geschrieben.“ Mit der Mathematik lässt sich die Realität beschreiben und herausfinden, wie die Welt funktioniert. Sie ist eine Universalsprache, die zum höchsten Maßstab für Wahrheit wurde. In unserer zunehmend von Wissenschaft und Technik geprägten Welt wird die Mathematik immer mehr zur Quelle der Macht, des Wohlstands und des Fortschritts. Wer daher diese Sprache fließend beherrscht, befindet sich an der Spitze des Fortschritts.

Ein weitverbreitetes Missverständnis über die Mathematik ist das Vorurteil, sie könne nur als „Hilfsmittel“ verwendet werden: Ein Biologe beispielsweise nimmt irgendwelche Beobachtungen vor und sammelt Daten, dann kann er versuchen, ein mathematisches Modell zu diesen Daten zu basteln (vielleicht mit der Unterstützung eines Mathematikers). Das mag vielleicht eine wichtige Anwendung sein, doch die Mathematik gibt uns *wesentlich mehr*: Mit ihrer Hilfe können wir unsere grundlegenden Vorstellungen über die Natur anpassen oder auch verändern, wie es ohne sie nie möglich wäre. Als beispielsweise Albert Einstein erkannte, dass die Gravitation eine Krümmung unseres Raumes bewirkt, hat er nicht versucht, seine Gleichungen irgendwelchen Daten anzupassen. Tatsächlich gab es solche Daten noch nicht einmal. Niemand konnte sich damals auch nur im Entferntesten vorstellen, dass unser Raum gekrümmt sein könnte. Jeder „wusste“, dass unsere Welt flach ist! Doch zusammen mit seiner Einsicht, dass Gravitation und Beschleunigung dieselbe Wirkung haben, erkannte Einstein hierin die einzige Möglichkeit, seine spezielle Relativitätstheorie auch auf Nicht-Inertialsysteme zu verallgemeinern. Es war eine intellektuelle mathematische Leistung höchsten Grades, und Einstein stützte sich dabei entscheidend auf die knapp fünfzig Jahre alten Arbeiten des Mathematikers Bernhard Riemann. Das menschliche Gehirn ist so verdrahtet, dass wir uns gekrümmte Räume mit mehr als zwei Dimensionen einfach nicht vorstellen können. Der einzige Zugang zu ihnen ist für uns die Mathematik. Und Einstein hatte Recht: Unser Universum *ist* gekrümmt und es dehnt sich sogar aus. Das ist die Macht der Mathematik, die ich meine!

Es lassen sich viele Beispiele wie diese finden, nicht nur aus der Physik, sondern in vielen anderen Wissenschaften (einige davon werden wir später ansprechen). Die Geschichte lehrt, dass Wissenschaft und Technik in zunehmendem Maße von mathematischen Ideen geformt werden. Selbst mathematische Theorien, die zunächst als sehr abstrakt und ohne Bezug zur Realität galten, wurden später für bestimmte Anwendungen unverzichtbar. Auch wenn Charles Darwin sein Werk nicht auf der Mathematik aufbaute, schrieb er später in seiner Autobiographie: „Ich habe zutiefst bereut, dass ich nicht weit genug gekommen bin, um zumindest etwas von den wichtigsten Prinzipien der Mathematik zu verstehen, denn Menschen, die damit umgehen können, scheinen einen Extrasinn zu haben." Ich werte dies als einen weitsichtigen Rat an die kommenden Generationen, mehr auf das gewaltige Potenzial der Mathematik zu setzen.

Als Junge wusste ich nichts von der versteckten Welt der Mathematik. Wie die meisten Menschen hielt ich die Mathematik für ein fades und langweiliges Gebiet. Doch ich hatte Glück: Während meines letzten Schuljahrs lernte ich einen Berufsmathematiker kennen, der mir die magische Welt der Mathematik eröffnete. Ich erkannte nicht nur ihre unendlichen Möglichkeiten, sondern auch ihre Eleganz und Schönheit, ähnlich wie in der Lyrik, Kunst und Musik. Ich verliebte mich in die Mathematik.

Mit diesem Buch möchte ich dem Leser das weitergeben, was mir meine Lehrer und Mentoren vermittelt haben: Ich möchte das Schloss zur Macht und Schönheit der Mathematik für Sie öffnen und Ihnen den Eintritt in diese magische Welt ermöglichen, so wie es mir einst vergönnt war, selbst wenn Sie zu den Personen gehören sollten, welche die Worte „Mathematik" und „Liebe" nie in ein und demselben Satz verwendet haben. Die Mathematik wird Ihnen unter die Haut gehen, so wie mir, und Sie werden die Welt mit anderen Augen sehen.

Mathematisches Wissen unterscheidet sich von jeder anderen Art des Wissens. Unsere Wahrnehmung der physikalischen Welt kann verzerrt sein, nicht jedoch unsere Wahrnehmung mathematischer Wahrheiten. Es handelt sich um objektive, zeitlose und zwangsläufige Wahrheiten. Eine mathematische Formel oder ein mathematischer Satz bedeuten für alle und überall dasselbe – unabhängig von Geschlecht, Religion oder Hautfarbe; und sie werden auch in tausend Jahren noch für alle dasselbe bedeuten. Erstaunlich ist außerdem, dass uns allen diese Formeln und Sätze gehören. Niemand kann auf eine mathematische Formel ein Patent anmelden, wir alle können sie verwenden. Es gibt nichts derart Tiefgründiges und Erlesenes in der Welt, das uns allen so frei zur Verfügung steht. Es ist fast unglaublich, dass es ein solches Reservoir an Wissen überhaupt gibt. Es ist zu wertvoll, um es leichtfertig den „wenigen Eingeweihten" zu überlassen, denn es gehört uns allen.

Eine der Hauptaufgaben der Mathematik besteht in einer Strukturierung der vorhandenen Informationen. Das unterscheidet den Pinselstrich eines van Goghs von einem einfachen Farbklecks. Durch die zunehmenden Möglichkeiten des 3D-Drucks erfährt die uns vertraute Realität einen radikalen Wandel: Alles emigriert aus dem Bereich der physikalischen Gegenstände in die Welt der Information und Daten. Es wird nicht mehr lange dauern, und wir können mit Hilfe von 3D-Druckern ganz nach Belieben Information in Materie umsetzen, so wie wir heute schon eine PDF-Datei in ein Buch oder eine MP3-Datei in ein Musikstück umwandeln können. In dieser schönen neuen Welt wird die Rolle der Mathematik noch zentraler: Sie bietet die Möglichkeiten, Information zu verarbeiten und zu ordnen, sowie die Verfahren, mit denen wir die Übertragung von der Information zur physikalischen Wirklichkeit vereinfachen können.

In diesem Buch werde ich eine der größten Ideen aus der Mathematik der letzten fünfzig Jahren beschreiben: das Langlands-Programm. Es wird von vielen als die Große Vereinheitlichte Theorie der Mathematik bezeichnet. Es ist eine faszinierende Theorie, in der die erstaunlichen Verbindungen zwischen scheinbar Lichtjahre voneinander entfernten mathematischen Gebieten zu einem Ganzen zusammengefügt werden: Algebra, Geometrie, Zahlentheorie, Analysis und Quantenphysik. Wenn wir uns diese Gebiete wie die Kontinente der versteckten Welt der Mathematik vorstellen, dann ist das Langlands-Programm das ultimative Transportmittel, mit dem wir von einem Augenblick zum nächsten zwischen den Gebieten hin- und herspringen können.

Der Mathematiker Robert Langlands, der heute das ehemalige Büro von Albert Einstein am Institute for Advanced Study in Princeton benutzt, innitiierte dieses Programm in den späten 1960er Jahren. Die Wurzeln dieses Programms liegen in einer bahnbrechenden mathematischen Theorie der Symmetrie. Zwei Jahrhunderte zuvor wurden die Fundamente dieser Theorie von einem französischen Wunderkind im Alter von 20 Jahren gelegt – eine Nacht bevor er bei einem Duell ums Leben kam. Später wurde sie von einer weiteren erstaunlichen Entdeckung ergänzt, die schließlich nicht nur zum Beweis des großen Fermat'schen Satzes (den man manchmal auch den letzten Fermat'schen Satz nennt) führte, sondern auch unser ganzes Denken über Zahlen und Gleichungen veränderte. Und noch eine Einsicht trug wesentlich zu dieser Entwicklung bei: Auch die Mathematik hat ihren Rosetta-Stein voller geheimnisvoller Analogien und Metaphern. Man folgte diesen Analogien wie Bächen im gelobten Land der Mathematik, und schließlich ergossen sich die Ideen des Langlands-Programms in die Landschaften der Geometrie und der Quantenphysik, und schufen aus dem scheinbaren Chaos Ordnung und Harmonie.

All dies möchte ich Ihnen vermitteln, um Ihnen eine Seite der Mathematik nahezubringen, die wir selten zu sehen bekommen: Inspiration, tiefgründige Ideen und erstaunliche Enthüllungen und Einsichten. Die Mathematik schafft Möglichkeiten, die Schranken von Konventionen niederzureißen und auf der Suche nach Wahrheit einer grenzenlosen Phantasie Ausdruck zu verleihen. Der Schöpfer der Theorie des Unendlichen, Georg Cantor, schrieb einmal: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit." Die Mathematik lehrt uns, die Realität mit aller Strenge zu analysieren, die Fakten zu untersuchen und ihnen zu folgen, wo auch immer sie uns hinführen. Sie befreit uns von Dogmen und Vorurteilen und schafft so den Nährboden für Neues. Sie liefert uns Werkzeuge, die weit über die ursprünglichen Anwendungen hinausreichen.

Diese Werkzeuge lassen sich im Guten wie im Schlechten einsetzen, was uns dazu zwingt, uns auch mit den Auswirkungen der Mathematik auf unsere Welt auseinanderzusetzen. Zum Beispiel wurde die ökonomische Krise der letzten Jahre unter anderem auch durch den weitverbreiteten Gebrauch unangebrachter mathematischer Modelle in den Finanzmärkten ausgelöst. Viele der Entscheidungsträger haben diese Modelle aufgrund ihrer fehlenden mathematischen Kenntnisse nicht richtig verstanden, waren jedoch – meist aus Gier – selbstherrlich genug, sie trotzdem anzuwenden, bis diese Praxis das ganze System beinahe zum Zusammenbruch gebracht hätte. Sie nutzen den ungleichen Zugang zu Informationen und hofften, dass niemand ihren Bluff bemerkt, weil auch andere sich nicht die Mühe machten, die Anwendbarkeit der mathematischen Modelle zu hinterfragen. Hätten mehr Menschen diese Modelle und die Zusammenhänge des Systems wirklich verstanden, hätte man uns nicht so lange an der Nase herumführen können.

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel: Im Jahre 1996 berief die amerikanische Regierung eine Kommission, die weitgehend unter Ausschluss der Öffentlichkeit die Formel zur Berechnung des Verbraucherpreisindex abänderte. Dieser Index ist ein Maß für die Inflation und dient in den Vereinigten Staaten zur Einteilung der Steuerklassen, Festlegung von Sozialleistungen und medizinischen Zuwendungen und Ähnlichem. Viele Millionen Amerikaner waren davon betroffen, doch in der Öffentlichkeit wurde kaum über diese neue Berechnungsformel und ihre Auswirkungen diskutiert. Und vor kurzem wurde ein ähnlicher Versuch unternommen, diese obskure Formel als Hintertür zur Stützung der amerikanischen Wirtschaft zu missbrauchen.[1]

In einer mathematisch gebildeten Gesellschaft käme es zu deutlich weniger krummen Geschäften dieser Art. Die Mathematik ist gleich der Summe von mathematischer Strenge und intellektueller Ehrlichkeit multipliziert mit dem Vertrauen auf Fakten. Wir alle sollten Zugang zu dem mathematischen Wissen und den Hilfsmitteln haben, mit denen wir uns in einer zunehmend mathematisch getriebenen Welt vor den willkürlichen Entscheidungen der wenigen Machthaber schützen können. Wo es keine Mathematik gibt, gibt es auch keine Freiheit.

Mathematik gehört ebenso zu unserem kulturellen Erbe wie Kunst, Literatur und Musik. Als Menschen drängt es uns, Neues zu entdecken, neue Bedeutungen zu finden und unser Universum und unseren Platz in ihm besser zu verstehen. Wir können heute leider keinen neuen Kontinent mehr entdecken, wie einst Kolumbus, oder als erster Mensch unseren Fuß auf den Mond setzen. Doch ich behaupte, wir müssen nicht erst über einen Ozean segeln oder in den Weltraum fliegen, um die Wunder dieser Welt entdecken zu können. Sie liegen direkt vor uns, verwoben mit unserer heutigen Wirklichkeit – mit anderen Worten: unmittelbar in uns. Die Mathematik lenkt den Lauf des Universums, sie steckt hinter seinen Formen und Kurven, und sie herrscht über alles, angefangen bei winzigen Atomen bis hin zu den größten Sternen.

Mit diesem Buch möchte ich Sie in diese reiche und verblüffende Welt einladen, und Sie benötigen keinerlei mathematischen Hintergrund. Wenn Sie befürchten, die Mathematik sei zu schwer, dass Sie das alles nicht verstehen werden, wenn Sie Respekt vor der Mathematik haben, aber trotzdem neugierig sind, ob es hier nicht doch etwas Interessantes zu verstehen gibt – dann ist dieses Buch genau für Sie gemacht.

Es gibt den weitverbreiteten Irrtum, man müsse erst jahrelang Mathematik studiert haben, bevor man sie versteht. Manche meinen sogar, wenn es um Mathematik geht, hätten sie eine angeborene Lernschwäche. Das glaube ich nicht: Die meisten von uns haben schon von Dingen wie dem Sonnensystem, Atomen und Elementarteilchen, der Doppelhelix DNA etc. gehört und sogar ein vages Verständnis davon entwickelt, ohne deswegen Physik- oder Biologievorlesungen besucht zu haben. Und niemand ist überrascht, dass diese anspruchsvollen Konzepte zu einem Teil unserer Kultur, unseres kollektiven Bewusstseins geworden sind. Ganz ähnlich kann jeder die wesentlichen mathematischen Konzepte und Ideen verstehen, wenn sie uns nur in der richtigen Weise vermittelt werden. Dazu muss man nicht Jahre lang Mathematik studieren. In vielen Fällen kann man gleich zum Kern der Sache vorstoßen und viele langweilige Schritte überspringen.

Das Problem ist oft Folgendes: Alle Welt spricht ständig von Planeten, Atomen oder der DNA, doch mit großer Wahrscheinlichkeit hat Ihnen noch niemand von den faszinierenden Ideen moderner Mathematik erzählt, z. B. von Symmetriegruppen, neuen Zahlensystemen, in denen 2 plus 2 nicht immer 4 ist, und wunderbaren geometrischen Formen wie den Riemann'schen Flächen. Es ist so, als ob jemand auf eine kleine Katze zeigt und erklärt: so sieht ein Tiger aus. Doch tatsächlich ist ein Tiger ein ganz anderes Tier. Ich zeige Ihnen den Tiger in all seiner Schönheit, und Sie werden Gelegenheit haben, seine „Ehrfurcht gebietende Symmetrie“, wie William Blake es in einem Gedicht von 1794 ausdrückte, zu bewundern.

Verstehen Sie mich nicht falsch: Durch das Lesen dieses Buches werden Sie nicht zu einem Mathematiker. Ich behaupte auch nicht, jeder solle Mathematiker werden. Sehen Sie es so: Mit nur wenigen Griffen können Sie auf einer Gitarre schon ziemlich viele Lieder spielen. Sie werden dadurch nicht zum besten Gitarrenspieler der Welt, aber es wird Ihr Leben bereichern. In diesem Buch zeige ich Ihnen einige Akkorde der modernen Mathematik, die Ihnen bisher vorenthalten wurden. Und ich verspreche Ihnen, dass dies Ihr Leben bereichern wird.

Einer meiner Lehrer, der große Israel Gelfand, sagte immer: „Die Leute glauben, sie verstünden keine Mathematik, doch es geht nur darum, wie man es ihnen erklärt. Wenn du einen Betrunkenen fragst, welche Zahl größer ist, 2/3 oder 3/5, wird er es dir vermutlich nicht sagen können. Doch wenn du die Frage anders stellst: Was ist besser, 2 Flaschen Wodka für 3 Personen oder 3 Flaschen Wodka für 5 Personen, dann wird er dir sofort antworten: Natürlich 2 Flaschen für 3 Personen."

Es ist mein Ziel, Ihnen die Dinge so zu erklären, dass Sie sie verstehen.

Ich werde auch über meine persönlichen Erfahrungen sprechen: Was es heißt, in der früheren Sowjetunion aufgewachsen zu sein, wo die Mathematik inmitten eines Unterdrückerregimes zu einer Insel der Freiheit wurde. Die diskriminierende Politik in der Sowjetunion verwehrte mir ein Studium an der staatlichen Universität von Moskau. Man versperrte mir die Türen; ich war ein Ausgestoßener. Doch ich gab nicht auf. Ich schlich mich in die Universität und hörte Vorlesungen und Seminare. Ich las Mathematikbücher, manchmal bis spät in die Nacht. Und am Ende konnte ich das System austricksen. Durch die Vordertüre ließ man mich nicht hinein, also flog ich durch ein Fenster. Wenn man verliebt ist, wer kann einen dann aufhalten?

Zwei brillante Mathematiker nahmen mich unter ihre Fittiche und wurden meine Mentoren. Mit ihrer Hilfe begann ich meine mathematische Forschung. Ich war damals noch Student, und doch verschob ich bereits die Grenzen des Unbekannten. Es war die aufregendste Zeit meines Lebens, und ich machte es, obwohl mir klar war, dass ich aufgrund der diskriminierenden Politik niemals eine Stelle als Mathematiker in der Sowjetunion bekommen würde.

Doch es gab eine Überraschung: Meine ersten mathematischen Artikel wurden ins Ausland geschmuggelt und dort bekannt, und mit 21 Jahren erhielt ich eine Einladung an die Harvard Universität als Gastprofessor. Glücklicherweise hatte zur selben Zeit die Perestroika in der Sowjetunion den eisernen Vorhang gelüftet und Bürger durften das Land verlassen. Und so war ich plötzlich, ohne jemals promoviert zu haben, ein Professor in Harvard, und ich hatte das System wieder einmal ausgetrickst. Ich setzte meine akademische Laufbahn fort und so forschte ich schließlich an den Grenzen des Langlands-

Programms. Während der letzten zwanzig Jahre hatte ich die Gelegenheit, an einigen der wichtigsten Entwicklungen auf diesem Gebiet mitzuwirken. Im Folgenden werde ich über die spektakulären Ergebnisse einiger brillanter Wissenschaftler berichten, aber auch über einige der Dinge, die sich hinter den Kulissen ereigneten.

In diesem Buch geht es auch um Liebe. Ich hatte einmal die Vorstellung von einem Mathematiker, der eine „Formel der Liebe“ entwickelt, und diese Idee wurde die Grundlage für den Film *Rites of Love and Math*, über den ich später in diesem Buch noch sprechen werde. Immer, wenn ich diesen Film zeige, fragt mich irgendjemand: „Gibt es wirklich eine Formel der Liebe?“

Meine Antwort lautet: „Jede Formel, die wir entdecken, ist eine Formel der Liebe.“ Die Mathematik ist die Quelle eines zeitlosen und tiefgründigen Wissens. Sie trifft ins Herz aller Materie und vereint uns über alle Kulturen, Kontinente und Zeitalter hinweg. Mein Traum ist, dass wir alle irgendwann in der Lage sind, die geheimnisvolle Schönheit und die außergewöhnliche Harmonie dieser Ideen, Formeln und Gleichungen zu erkennen, zu begreifen und zu bewundern, denn dadurch gewänne unsere Liebe zu dieser Welt und zueinander sehr viel mehr an Bedeutung.

Danksagungen

Ich danke DARPA und der National Science Foundation, die einen Teil der in diesem Buch beschriebenen Forschung gefördert haben. Zur Zeit der Fertigstellung dieses Buches war ich ein Miller-Professor am Miller Institute for Basic Research in Science an der University of California in Berkeley.

Ich danke meinem Herausgeber T. J. Kelleher und meiner Projektredakteurin Melissa Veronesi von Basic Books für ihre professionelle Anleitung.

Während ich an dem Buch arbeitete, profitierte ich von fruchtbaren Diskussionen mit Sara Bershtel, Robert Brazell, David Eisenbud, Marc Gerald, Masako King, Susan Rabiner, Sasha Raskin, Philibert Schogt, Margit Schwab, Eric Weinstein und David Yezzi.

Ich danke Alex Freedland, Ben Glass, Claude Levesque, Kayvan Mashayekh und Corinne Trang, die Teile des Buches während unterschiedlicher Entstehungsphasen gelesen und mir hilfreiche Ratschläge gegeben haben. Ich danke ebenfalls Andrea Young für ihre Fotos vom „Bechertrick“ in Kap. 15.

Mein besonderer Dank gilt Thomas Farber für unzählige Einsichten und fachliche Ratschläge und Marie Levek, die das Manuskript gelesen und durch ihre gezielten Fragen die Darstellung an vielen Stellen verbessert hat. Mein Vater Wladimir Frenkel hat sämtliche Entwürfe für das Buch gelesen, und seine Anmerkungen waren von unschätzbarem Wert.

In erster Linie geht mein Dank jedoch an meine Eltern, Lidia und Wladimir Frenkel, deren Liebe und Unterstützung all das, was ich erreicht habe, erst möglich machten. Ihnen widme ich dieses Buch.

Anleitung für den Leser

Ich habe mich sehr bemüht, die mathematischen Konzepte in diesem Buch in sehr einfacher und intuitiver Weise darzustellen. Trotzdem bin ich mir bewusst, dass einige Teile dieses Buches mathematisch etwas anspruchsvoller sind (insbesondere einige Teile aus den Kap. 8, 14, 15 und 17). Es ist *überhaupt kein Problem*, die möglicherweise verwirrend oder schwierig erscheinenden Teile zunächst zu überspringen (das mache ich auch oft). Wenn man später mit neu erworbenem Wissen zu diesen Teilen zurückkehrt, kann man sie oft wesentlich leichter verstehen. Doch das ist normalerweise gar nicht notwendig, um den weiteren Text verstehen zu können.

Wichtiger ist vielleicht sogar, dass es *vollkommen in Ordnung ist, wenn etwas unklar ist*. So geht es mir in 90 % der Zeit, in der ich mich mit Mathematik beschäftige, also – willkommen in meiner Welt! Dieses Gefühl der Verwirrung (manchmal sogar Frustration) ist ein wesentlicher Teil des Mathematikerlebens. Betrachten Sie es einmal von der anderen Seite: Wie langweilig wäre unser Leben, wenn wir alles ohne jeden Aufwand verstehen könnten? Unser Leben als Mathematiker wird gerade dadurch so aufregend, weil wir diese Verwirrung klären wollen – die Dinge verstehen und das Unbekannte aufdecken wollen. Und dieses Gefühl des persönlichen Erfolgs, wenn wir die Dinge schließlich verstanden haben, ist all den Aufwand wert.

In diesem Buch konzentriere ich mich auf das Gesamtbild und die logischen Beziehungen zwischen verschiedenen Konzepten und Bereichen der Mathematik, nicht auf die technischen Einzelheiten. Vertiefende Zusatzinformationen habe ich oft auf die Anmerkungen am Ende des Buches verschoben. Dort findet der Leser auch Literaturangaben, die ein tieferes Verständnis ermöglichen. Doch obwohl diese Anmerkungen dem Verständnis dienen sollen, können sie (zumindest in einem ersten Durchgang) ohne Probleme übergangen werden.

Ein Warnung zu mathematischen Fachausdrücken: Als ich dieses Buch schrieb, musste ich zu meiner eigenen Überraschung feststellen, dass die Mathematiker viele Ausdrücke in einer speziellen Weise verwenden, die sich manchmal vollkommen von dem üblichen Gebrauch unterscheidet: Ausdrücke wie Korrespondenz, Darstellung, Abbildung, Schleife, Mannigfaltigkeit und Theorie. Wo mir solche Unterschiede aufgefallen sind, habe ich eine Erläuterung eingefügt. An manchen Stellen habe ich sogar besonders eigenartige mathematische Ausdrücke durch Begriffe mit einer offensichtlicheren Bedeutung ersetzt (beispielsweise spreche ich von der „Langlands-Beziehung" statt von der „Langlands-Korrespondenz"). In manchen Fällen, wenn ein Begriff unklar ist, hilft vielleicht auch in Blick in die Sammlung der Fachbegriffe oder das Register am Ende des Buches.

Auf meiner Webseite http://edwardfrenkel.com finden Sie neuere Informationen und weiteres Material. Scheuen Sie sich bitte auch nicht, mir eine E-Mail mit Ihren Eindrücken von diesem Buch zu schicken (meine E-Mail-Adresse finden Sie auf der Internetseite). Über Rückmeldungen freue ich mich sehr.

Inhalt

1
Ein geheimnisvolles Ungeheuer

Wie wird man Mathematiker? Es gibt viele Möglichkeiten, doch lassen Sie mich erzählen, wie es bei mir war.

Es wird Sie vielleicht überraschen, aber in der Schule habe ich Mathe gehasst. Nun, „gehasst“ geht vielleicht etwas zu weit. Also sagen wir, ich mochte es nicht. Für mich war Mathe langweilig. Ich hatte keine Probleme mit den Hausaufgaben, doch ich wusste nicht, wofür das Ganze gut sein sollte. Die Themen im Unterricht erschienen mir sinnlos und irrelevant. Außerdem war ich überzeugt, dass es keine andere Form von Mathematik gibt als die, die wir in der Schule behandeln.

Wirklich begeistert hat mich die Physik, insbesondere die Quantenphysik. Ich habe jedes allgemeinverständliche Buch, das mir zu diesem Thema in die Hände fiel, verschlungen. In Russland, wo ich aufwuchs, kam man leicht an solche Bücher.

Die Quantenwelt faszinierte mich. Seit dem Altertum haben Wissenschaftler und Philosophen davon geträumt, die unserem Universum zugrundeliegende Natur beschreiben zu können – und einige von ihnen haben sogar vermutet, sämtliche Materie bestünde aus winzigen Teilen, die sie Atome nannten. Die Existenz der Atome wurde zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts nachgewiesen, doch ungefähr zur selben Zeit entdeckten die Wissenschaftler, dass sich ein Atom noch weiter teilen lässt. Es zeigte sich, dass jedes Atom aus einem Atomkern in der Mitte und um diesen Kern kreisenden Elektronen besteht. Der Kern wiederum besteht aus Protonen und Neutronen, wie in Abb. 1.1 dargestellt ist.[1]

Und was ist mit den Protonen und Neutronen? Meine populärwissenschaftlichen Bücher sagten mir, dass sie aus Elementarteilchen bestehen, die man „Quarks“ nennt.

Ich mochte den Namen Quarks, und besonders gefiel mir, wo der Name herkam. Erfunden wurden diese Teilchen von dem Physiker Murray Gell-

E. Frenkel, *Liebe und Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-662-43421-5_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

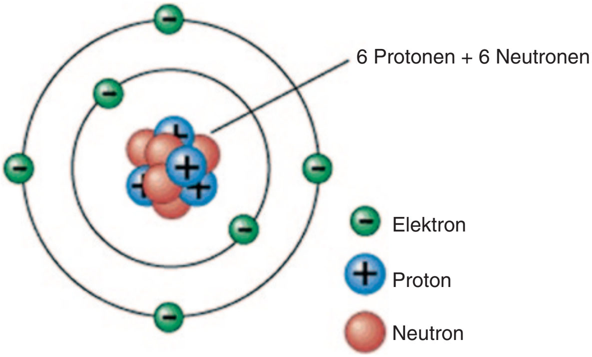


Abb. 1.1 Ein Kohlenstoffatom. © siehe Anm. 1

Mann und er entnahm diesen Namen dem Buch *Finnegans Wake* von James Joyce, wo es den folgenden Scherzreim gibt:

> Three quarks for Muster Mark!
> Sure he hasn't got much of a bark
> And sure any he has it's all beside the mark.

Ich fand es ziemlich cool, dass ein Physiker ein Teilchen nach einem Roman benennt, besonders nach einem so komplexen und schwierigen Roman wie *Finnegans Wake*. Ich war um die dreizehn, doch schon damals wusste ich, dass Wissenschaftler im Allgemeinen als eigenbrötlerische, weltfremde Wesen gelten, die so tief in ihrer Arbeit versunken sind, dass sie überhaupt kein Interesse an anderen Dingen im Leben wie Kunst oder den Geisteswissenschaften haben. So war ich nicht. Ich hatte viele Freunde, las gerne und interessierte mich außer für die Wissenschaft noch für viele andere Dinge. Ich spielte gerne Fußball und verbrachte unzählige Stunden mit meinen Freunden auf dem Fußballplatz. Ungefähr zur selben Zeit entdeckte ich die Gemälde der Impressionisten (es begann mit einem dicken Band über Impressionismus, den ich unter den Büchern meiner Eltern fand). Mein Lieblingsmaler war van Gogh. Seine Gemälde begeisterten mich, und ich begann sogar selbst zu zeichnen. Bei all diesen Interessen hatte ich große Zweifel, ob ich wirklich als Wissenschaftler geeignet war. Als ich dann las, dass Gell-Mann, ein großer Physiker und Nobelpreisträger, unzählige verschiedene Interessen hatte (nicht nur Literatur, sondern auch Linguistik, Archäologie und vieles mehr), war ich sehr glücklich.

Nach Gell-Mann gibt es zwei verschiedene Arten von Quarks, „Up" und „Down", und in unterschiedlichen Zusammensetzungen geben diese den Neutronen und Protonen ihre charakteristischen Eigenschaften. Ein Neutron

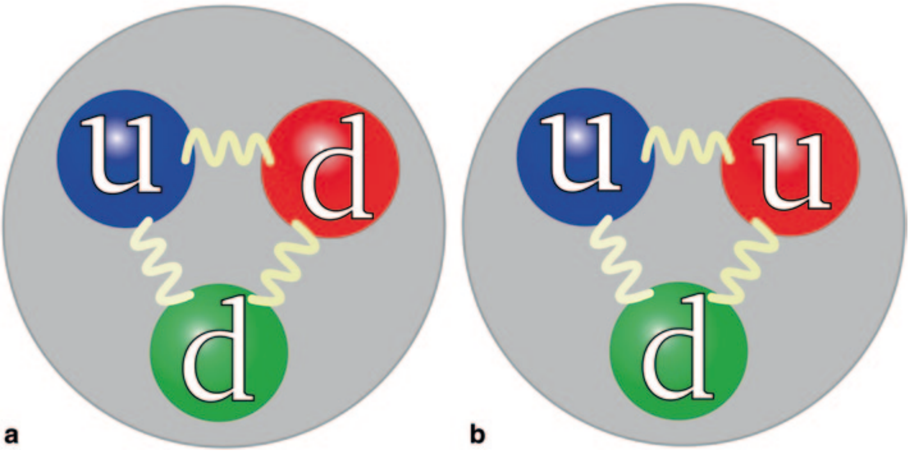


Abb. 1.2 Ein Neutron (**a**) besteht aus zwei Down- und einem Up-Quark, ein Proton (**b**) aus zwei Up- und einem Down-Quark. © siehe Anm. 2

besteht aus zwei Down- und einem Up-Quark und ein Proton besteht aus zwei Up- und einem Down-Quark, wie in Abb. 1.2 gezeigt.[2]

Das war soweit alles klar. Unklar war jedoch, wie die Physiker darauf kamen, dass Protonen und Neutronen keine unteilbaren Teilchen sind, sondern aus noch kleineren Objekten bestehen.

Gegen Ende der 1950er Jahre hatte man eine Reihe von scheinbar elementaren Teilchen entdeckt, die man Hadronen nannte. Neutronen und Protonen sind solche Hadronen, und natürlich spielen sie als Bausteine der Materie eine wichtige Rolle im Leben. Was die anderen Hadronen betraf, so hatte niemand eine gute Idee, weshalb es sie überhaupt gab („Wer hat die denn bestellt? soll ein Wissenschaftler gesagt haben). Es waren so viele, dass der einflussreiche Physiker Wolfgang Pauli gewitzelt hat, die Physik würde langsam zur Botanik. Die Physiker versuchten verzweifelt, die Hadronen unter Kontrolle zu bringen und die Prinzipien zu finden, auf denen ihr Verhalten beruhte und durch die sich ihre verrückte Vermehrung erklären ließ.

Gell-Mann und unabhängig von ihm Juval Ne'eman schlugen ein neuartiges Klassifikationsschema vor. Beide zeigten sie, dass sich Hadronen auf natürliche Weise in Familien aufteilen lassen, von denen jede acht oder zehn Teilchen enthält. Sie nannten diese Familien Oktetts und Dekupletts. Die Teilchen innerhalb einer Familie hatten ähnliche Eigenschaften.

In meinen allgemeinwissenschaftlichen Büchern fand ich Oktett-Diagramme wie in Abb. 1.3.

In dieser Abbildung wurde das Proton durch p gekennzeichnet, das Neutron durch n, und dann gibt es noch sechs weitere Teilchen mit seltsamen Namen, die durch griechische Buchstaben bezeichnet werden.

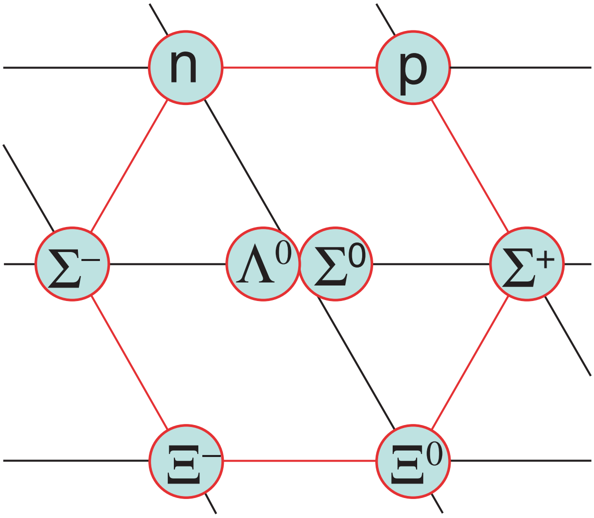


Abb. 1.3 Ein Oktett aus Hadronen. © in the public domain

Doch weshalb 8 und 10 und nicht beispielsweise 7 und 11? In meinen Büchern fand ich keine zufriedenstellende Antwort. Dort wurde eine geheimnisvolle Idee von Gell-Mann erwähnt, die „der achtfache Weg“ genannt wurde (mit Bezug auf den „Edlen Achtfachen Pfad“ von Buddha). Doch nirgends wurde der Versuch unternommen zu erklären, was das Ganze soll.

Diese fehlenden Erklärungen empfand ich als zutiefst unbefriedigend. Die wichtigsten Teile der Geschichte blieben verborgen. Ich wollte dieses Geheimnis lüften, wusste jedoch nicht wie.

Glücklicherweise erhielt ich Hilfe von einem Freund unserer Familie. Ich wuchs in einer kleinen Industriestadt namens Kolomna auf. Die Stadt zählt rund 150.000 Einwohner und liegt ungefähr 110 km südöstlich von Moskau; etwas mehr als zwei Stunden mit dem Zug. Meine Eltern arbeiteten dort als Ingenieure in einer großen Firma, die Schwermaschinen herstellte. Kolomna ist eine alte Stadt am Zusammenfluss zweier Ströme und wurde 1177 gegründet (nur dreißig Jahre nach der Gründung Moskaus). Es gibt immer noch einige hübsche Kirchen und eine Stadtmauer, die von der bewegten Vergangenheit Kolomnas zeugen. Es handelt sich jedoch nicht gerade um ein Zentrum für Bildung und Kultur. Es gab nur ein kleines College, das Lehrer ausbildete. Einer der dortigen Professoren, ein Mathematiker namens Jewgeni Jewgenjewitsch Petrow, war jedoch ein Freund meiner Eltern. Und eines Tages traf ihn meine Mutter nach langer Zeit mal wieder auf der Straße, und sie unterhielten sich. Meine Mutter erzählte ihren Freunden gerne von mir, und so kam das Thema schließlich auch auf mich. Als er hörte, dass ich naturwissenschaftlich interessiert sei, meinte Jewgeni Jewgenjewitsch: „Ich muss ihn treffen. Ich werde ihn für die Mathematik begeistern."

„Oh, nein", sagte meine Mutter, „er mag keine Mathematik. Er findet sie langweilig. Er will Quantenphysik machen."

„Keine Angst", meinte Jewgeni Jewgenjewitsch, „ich glaube, ich weiß, wie ich ihn überzeugen kann."

Es wurde ein Treffen vereinbart. Ich war nicht gerade begeistert von der Idee, trotzdem besuchte ich Jewgeni Jewgenjewitsch in seinem Büro.

Es war kurz vor meinem fünfzehnten Geburtstag am Ende meines neunten Schuljahres, dem letzten der Oberstufe. (Ich war ein Jahr jünger als meine Klassenkameraden, weil ich die sechste Klasse übersprungen hatte.) Jewgeni Jewgenjewitsch war damals Anfang vierzig, und er begrüßte mich freundlich und bescheiden. Mit seiner Brille und einem Stoppelbart sah er genauso aus, wie ich mir einen Mathematiker vorgestellt hatte, und doch hatte der forschende Blick seiner großen Augen etwas Einnehmendes. Sie strahlten eine grenzenlose Neugier in Bezug auf alles aus.

Es zeigte sich, dass Jewgeni Jewgenjewitsch tatsächlich einen sehr geschickten Plan hatte, wie er mich zur Mathematik bewegen wollte. Als ich sein Büro betreten hatte, fragte er mich: „Ich habe gehört, dass dich die Quantenphysik interessiert. Hast du schon von dem achtfachen Weg von Gell-Mann und dem Quarkmodell gehört?"

„Ja, ich habe darüber in mehreren allgemeinwissenschaftlichen Büchern gelesen."

„Aber weißt du auch, was dem Modell zugrunde liegt? Wie ist er auf diese Ideen gekommen?"

„Nun…"

„Hast du schon von der Gruppe *SU(3)* gehört?"

„S-U was?"

„Wie willst du das Quarkmodell verstehen, wenn du nicht weißt, was die Gruppe *SU(3)* ist?"

Er zog einige Bücher aus seinem Bücherregal, öffnete sie und zeigte mir Seiten mit Formeln. Ich konnte die vertrauten Oktett-Diagramme wiedererkennen, ähnlich wie in Abb. 1.3, doch diese Diagramme waren nicht einfach nur nette Bilder. Sie waren offensichtlich Teil einer ausführlichen und exakten Erklärung.

Obwohl ich damals mit den Formeln überhaupt nichts anfangen konnte, wurde mir sofort klar, dass hier die Antworten auf meine Fragen lagen. Es war der Augenblick der Erleuchtung. Ich war wie gebannt von dem, was ich sah und hörte; ergriffen in einer noch nie gekannten Weise; unfähig, diese Empfindungen in Worte zu fassen, und trotzdem spürte ich die Energie und die Begeisterung, die einen befällt, wenn man ein Musikstück hört oder ein

Gemälde sieht, das einen unvergesslichen Eindruck hinterlässt. „Toll!“, war alles, was mir dazu noch einfiel.

„Du glaubtest vermutlich, Mathematik sei das, was man euch in der Schule beibringt“, meinte Jewgeni Jewgenjewitsch. Er schüttelte seinen Kopf und sagte: „Nein, das hier“, und dabei zeigte er auf die Formeln in dem Buch „ist Mathematik. Und wenn du die Quantenphysik wirklich verstehen möchtest, dann musst du hier anfangen. Gell-Mann gelangte zu seiner Vorhersage der Quarks mithilfe einer wunderbaren mathematischen Theorie. Eigentlich handelte es sich um eine mathematische Entdeckung.“

„Aber wo soll ich bei all dem denn überhaupt anfangen?“

Das sah alles irgendwie erschreckend aus.

„Keine Angst. Zunächst solltest du lernen, was das Konzept einer ‚Symmetriegruppe‘ ist. Das ist die Grundidee. Auf ihr beruht ein großer Teil der Mathematik wie übrigens auch der theoretischen Physik. Ich gebe dir hier einige Bücher. Fang einfach mal an, sie zu lesen, und markiere die Sätze, die du nicht verstehst. Wir können uns hier jede Woche treffen und darüber reden.“

Er gab mir ein Buch über Symmetriegruppen und noch einige andere über verschiedene Themen: über sogenannte *p*-adische Zahlen (ein Zahlensystem, das sich vollkommen von den Zahlen, wie wir sie kennen, unterscheidet) und über Topologie (hier geht es um grundlegende geometrische Formen). Jewgeni Jewgenjewitsch hatte einen unfehlbaren Geschmack: Er fand die perfekte Mischung von Themen, mit denen ich dieses geheimnisvolle Ungeheuer – die Mathematik – aus verschiedenen Seiten betrachten und mich dafür begeistern konnte.

In der Schule beschäftigten wir uns mit quadratischen Gleichungen, etwas Differenzial- und Integralrechnung, grundlegender euklidischer Geometrie und Trigonometrie. Ich war davon ausgegangen, dass die gesamte Mathematik sich mehr oder weniger um diese Themen drehte, dass die Probleme vielleicht etwas komplizierter wurden, aber letztendlich in demselben allgemeinen Rahmen blieben, den ich kannte. Doch die Bücher von Jewgeni Jewgenjewitsch erlaubten mir Einblicke in eine vollkommen andere Welt, deren Existenz ich mir bis dahin nicht einmal hatte vorstellen können.

Ich war sofort begeistert.

2
Das Wesen der Symmetrie

In der Vorstellung der meisten Menschen handelt die Mathematik ausschließlich von Zahlen. Für sie sind Mathematiker Menschen, die den ganzen Tag rechnen: mit großen Zahlen und noch größeren Zahlen, alle mit exotischen Bezeichnungen. Ich hatte das auch geglaubt, zumindest bis Jewgeni Jewgenjewitsch mich in die Konzepte und Ideen der modernen Mathematik eingeführt hatte. Eines davon erwies sich als der Schlüssel für die Entdeckung der Quarks: das Konzept der Symmetrie.

Was ist Symmetrie? Wir alle haben eine intuitive Vorstellung – wir erkennen sie, wenn wir sie sehen. Wenn ich Bekannte bitte, mir Beispiele von symmetrischen Gegenständen zu nennen, dann zeigen sie auf Schmetterlinge, Schneeflocken oder den menschlichen Körper (Abb. 2.1).

Doch wenn ich sie frage, was eigentlich mit der Symmetrie eines Körpers gemeint sei, können sie es nicht sofort beantworten.

Jewgeni Jewgenjewitsch erklärte mir die Sache folgendermaßen: „Betrachten wir einmal diesen runden Tisch und diesen quadratischen Tisch“, dabei zeigte er auf zwei Tische in seinem Büro. „Welcher von beiden ist symmetrischer?“

„Natürlich der runde Tisch, ist das nicht offensichtlich?“

„Doch weshalb? Als Mathematiker sollte man ‚offensichtliche‘ Dinge nie als selbstverständlich hinnehmen, sondern seine Meinung begründen. Oft ist man überrascht, dass die offensichtlichste Antwort in Wirklichkeit falsch ist.“

Als Jewgeni Jewgenjewitsch die Verwirrung in meinem Gesicht bemerkte, gab er mir einen Hinweis: „Welche Eigenschaft des runden Tisches macht ihn symmetrischer?“

Ich dachte eine Weile nach und dann kam es mir: „Ich vermute, die Symmetrie eines Gegenstands hat damit zu tun, dass er seine Form und Lage behält, selbst wenn wir irgendwelche Veränderungen an ihm vornehmen.“

Jewgeni Jewgenjewitsch nickte.

„Ganz genau. Betrachten wir einmal alle Transformationen der beiden Tische, bei denen sie ihre Form und Stellung behalten“, meinte er. „Bei dem runden Tisch –“

E. Frenkel, *Liebe und Mathematik,*
DOI 10.1007/978-3-662-43421-5_2,

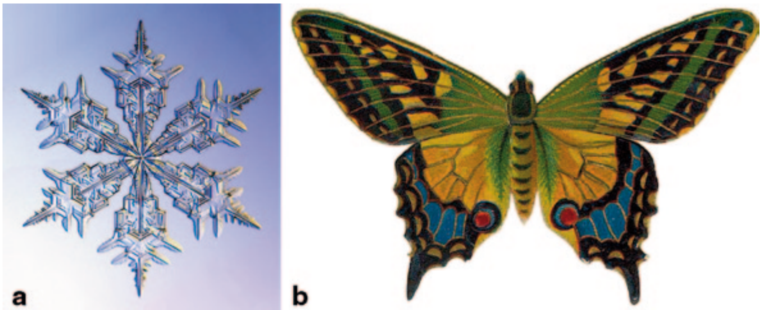


Abb. 2.1 Beispiele für Symmetrien: eine Schneeflocke (**a**) und ein Schmetterling (**b**). (a: © Foto von K.G. Libbrecht, b: © in the public domain)

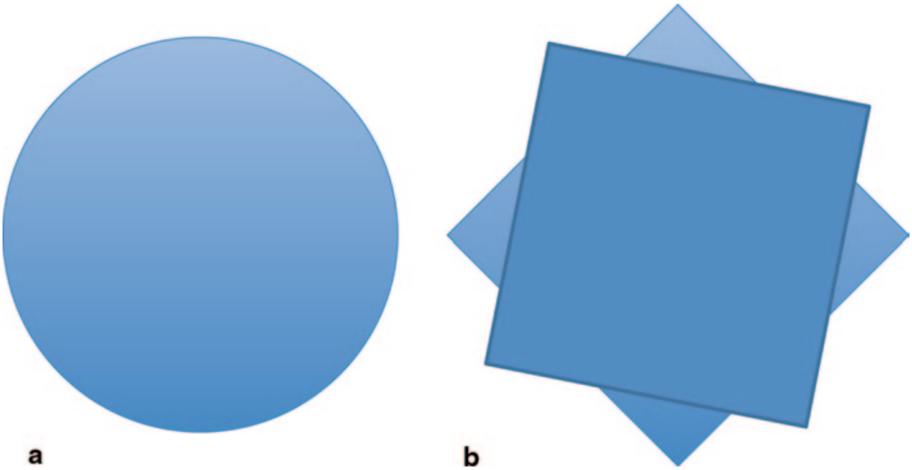


Abb. 2.2 Dreht man einen runden Tisch (**a**) um einen beliebigen Winkel, so ändert sich seine Stellung nicht, doch dreht man einen quadratischen Tisch (**b**) um einen beliebigen Winkel, der nicht ein Vielfaches von 90° ist, dann ändert er seine Stellung. (Beide Tische sind hier von oben gezeichnet). © Frenkel

Ich unterbrach ihn: „Jede Drehung um den Mittelpunkt macht das. Der Tisch bleibt dabei immer in derselben Stellung. Doch wenn wir den quadratischen Tisch drehen, kommt er im Allgemeinen in eine andere Stellung. Nur Drehungen um 90° und Vielfache davon lassen seine Stellung unverändert.“

„Richtig! Wenn du das Zimmer für einen Augenblick verlässt und ich drehe den runden Tisch um einen beliebigen Winkel, wirst du den Unterschied kaum bemerken. Doch wenn ich dasselbe mit dem quadratischen Tisch mache, siehst du es, es sei denn, ich drehe ihn um 90°, 180° oder 270° (Abb. 2.2).“

Er fuhr fort: „Solche Transformationen bezeichnet man als Symmetrien. Du siehst also, dass der quadratische Tisch nur vier Symmetrien besitzt, wo-

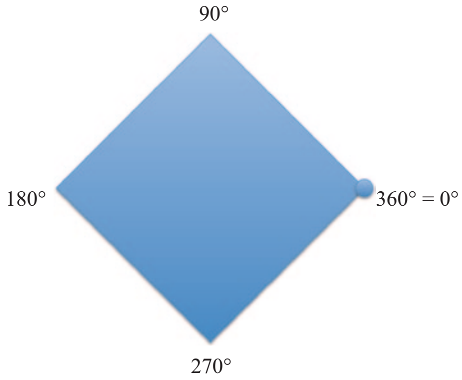


Abb. 2.3 Die Symmetrien eines quadratischen Tisches. Eine Ecke wurde mit einem Kreis markiert, um die Transformationen zu verdeutlichen. © Frenkel

gegen der runde Tisch sehr viele hat – tatsächlich sogar unendlich viele. Deshalb sagen wir, der runde Tisch sei symmetrischer."

Das erschien mir einleuchtend.

„Das ist eine recht naheliegende Feststellung", fuhr Jewgeni Jewgenjewitsch fort. „Man muss kein Mathematiker sein, um das einzusehen. Doch wenn man Mathematiker ist, stellt man sich die nächste Frage: Was sind *sämtliche* Symmetrien eines bestimmten Gegenstands?"

Betrachten wir nochmals den quadratischen Tisch. Seine Symmetrien[1] bestehen aus den folgenden vier Drehungen um den Mittelpunkt des Tisches: Drehung um 90°, 180°, 270° und 360°, jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn.[2] Ein Mathematiker würde sagen, die *Menge* der Symmetrien des quadratischen Tisches besteht aus vier Elementen, entsprechend den Winkeln 90°, 180°, 270° und 360°. Jede dieser Drehungen verlegt eine bestimmte Ecke (die in Abb. 2.3 mit einem kleinen Kreis markiert wurde) zu einer der vier Ecken.

Eine dieser Drehungen ist besonders: Die Drehung um 360° hat denselben Effekt wie eine Drehung um 0°, d. h. überhaupt keine Drehung. Dies ist eine besondere Symmetrie, weil sie den Gegenstand überhaupt nicht verändert: Jeder Punkt des Tisches befindet sich anschließend an genau derselben Stelle wie vorher. Wir nennen dies die *identische Symmetrie* oder einfach die *Identität*.[3]

Eine Drehung um einen Winkel größer als 360° hat denselben Effekt – der Mathematiker sagt dann *ist äquivalent* – wie eine Drehung um einen Winkel zwischen 0° und 360°. Beispielsweise ist eine Drehung um 450° äquivalent zu einer Drehung um 90°, denn $450 = 360 + 90$. Aus diesem Grund betrachten wir nur Drehungen um Winkel zwischen 0° und 360°.

Nun kommt die wichtige Feststellung: Wenn wir zwei Drehungen aus der Liste {90°, 180°, 270°, 360°} hintereinander ausführen, erhalten wir wieder eine Drehung aus derselben Liste. Diese neue Symmetrie bezeichnen wir als die *Hintereinanderausführung* oder auch Verknüpfung der beiden anderen.

Das ist natürlich offensichtlich, denn jede der beiden Symmetrien lässt das Aussehen des Tisches unverändert, und damit ändert auch die Verknüpfung der beiden Symmetrien nichts. Also muss auch die Verknüpfung wieder eine Symmetrie sein. Drehen wir beispielsweise den Tisch zunächst um 90° und anschließend nochmals um 180°, dann ist das Ergebnis eine Drehung um 270°.

Schauen wir uns an, was mit dem Tisch unter diesen Symmetrien passiert. Bei einer Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um 90° geht die rechte Ecke des Tisches (die mit dem Kreis gekennzeichnet wurde) in die obere Ecke über. Drehen wir nun nochmals um 180°, so geht die obere Ecke in die untere Ecke über. Insgesamt geht also die rechte Ecke in die untere Ecke über. Das ist aber auch genau das Ergebnis einer Drehung um 270° entgegen dem Uhrzeigersinn.

Wir betrachten noch ein Beispiel:

$$90^\circ + 270^\circ = 0^\circ$$

Durch zwei Drehungen um zunächst 90° und anschließend 270° erhalten wir insgesamt eine Drehung um 360°. Doch wir hatten schon gesehen, dass eine Drehung um 360° dieselbe Wirkung hat wie eine Drehung um 0° – dies ist die *identische Symmetrie*.

Mit anderen Worten, die zweite Drehung um 270° macht die ursprüngliche Drehung um 90° wieder rückgängig. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig: Jede Symmetrie lässt sich *rückgängig* machen; d. h., für jede Symmetrie S gibt es eine andere Symmetrie S', sodass ihre Hintereinanderausführung die Identität ist. Man bezeichnet S′ als das *Inverse* der Symmetrie S. Eine Drehung um 270° ist also das Inverse zu einer Drehung um 90°. Entsprechend ist das Inverse zu einer Drehung um 180° wieder eine Drehung um 180°.

Wir sehen also, dass die zunächst sehr einfach erscheinende Liste von Symmetrien des quadratischen Tisches – die vier Drehungen {90°, 180°, 270°, 0°} – in Wirklichkeit sehr viel innere Struktur besitzt, also Regeln, wie die Mitglieder dieser Menge zusammenwirken können.

Zunächst können wir je zwei Symmetrien hintereinanderschalten, also eine nach der anderen ausführen.

Zweitens gibt es eine besondere Symmetrie, nämlich die Identität. In unserem Beispiel ist das eine Drehung um 0°. Wenn wir die Identität mit irgendeiner anderen Symmetrie verbinden (also eine hinter der anderen ausführen), ist das Ergebnis wieder diese Symmetrie, z. B.

$$90^\circ + 0^\circ = 90^\circ, \quad 180^\circ + 0^\circ = 180^\circ \quad \text{usw}$$

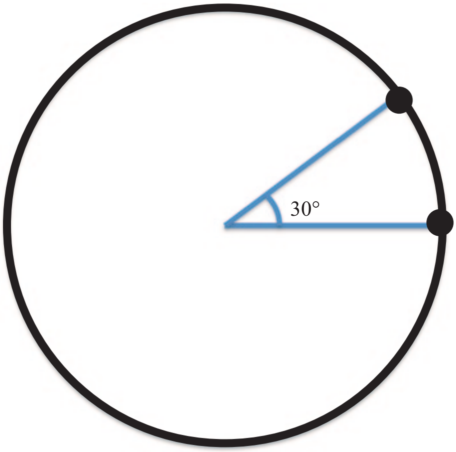


Abb. 2.4 Die Menge aller Drehungen entspricht einem Kreis. © Frenkel

Und drittens gibt es zu jeder Symmetrie *S* eine inverse Symmetrie *S′*, sodass die Hintereinanderausführung von *S* und *S′* die Identität ist.

Und nun kommen wir zum wichtigsten Punkt: Die Menge der Drehungen bildet zusammen mit diesen drei Strukturen ein Beispiel für das, was der Mathematiker eine *Gruppe* nennt.

Die Symmetrien von jedem anderen Gegenstand bilden ebenfalls eine Gruppe, die in vielen Fällen aus mehr Elementen besteht – manchmal sogar aus unendlichen vielen.[4]

Betrachten wir dazu das Beispiel des runden Tisches. Mit der gesammelten Erfahrung sehen wir sofort, dass die Menge der Symmetrien des runden Tisches aus der Menge aller möglichen Drehungen (nicht nur Vielfache von 90°) besteht, und diese können wir uns wiederum als die Menge aller Punkte eines Kreises vorstellen.

Jeder Punkt auf diesem Kreis entspricht einem Winkel zwischen 0 und 360° und repräsentiert daher eine Drehung des runden Tisches entgegen dem Uhrzeigersinn um diesen Winkel. Insbesondere gibt es einen besonderen Punkt, der einer Drehung um 0° entspricht. In Abb. 2.4 wurden dieser Punkt sowie der Punkt zu einer Drehung um 30° besonders gekennzeichnet.

Wir sollten allerdings bei den Punkten dieses Kreises nicht an die Punkte des runden Tisches denken, sondern jeder Punkt dieses Kreises entspricht eher einer bestimmten Drehung des runden Tisches. Der runde Tisch hat im Gegensatz zu unserem Kreis keinen ausgezeichneten Punkt. Auf unserem Kreis ist jedoch der Punkt zu einer Drehung um 0° ausgezeichnet.[5]

Nun untersuchen wir, ob sich die drei oben erwähnten Strukturen auch auf die Menge der Punkte auf dem Kreis übertragen lassen.

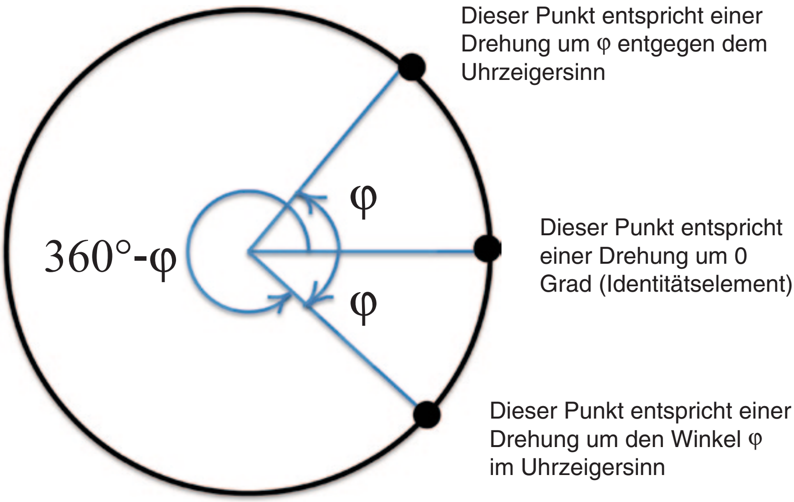


Abb. 2.5 Die Identität und das Inverse der Gruppe der Drehungen. © Frenkel

Zunächst führt die Hintereinanderausführung zweier Drehungen um φ_1 und φ_2 Grad zu einer Drehung um $\varphi_1 + \varphi_2$ Grad. Sollte $\varphi_1 + \varphi_2$ größer als 360° sein, subtrahieren wir einfach 360° von der Summe. In der Mathematik spricht man in diesem Fall von einer *Addition modulo* 360. Sind beispielsweise $\varphi_1 = 195°$ und $\varphi_2 = 250°$, dann ist die Summe der beiden Winkel gleich 445°, und eine Drehung um 445° ist dasselbe wie eine Drehung um 85°. Für die Gruppe der Drehungen eines runden Tisches gilt somit:

$$195^\circ + 250^\circ = 85^\circ$$

Zweitens gibt es einen besonderen Punkt auf dem Kreis, der einer Drehung um 0° entspricht. Hierbei handelt es sich um das Identitätselement unserer Gruppe.

Und drittens ist das Inverse einer Drehung um einen Winkel φ entgegen dem Uhrzeigersinn gleich einer Drehung um den Winkel (360° – φ) entgegen dem Uhrzeigersinn – oder einfacher: einer Drehung um den Winkel φ im Uhrzeigersinn (Abb. 2.5).

Damit haben wir die Gruppe der Drehungen eines runden Tisches beschrieben. Wir werden sie im Folgenden die *Kreisgruppe* nennen. Während die Symmetriegruppe des quadratischen Tisches nur vier Elemente hatte, besitzt diese Gruppe unendlich viele Elemente, denn es gibt unendlich viele Winkel zwischen 0° und 360°.

Unser intuitives Verständnis einer Symmetrie wurde nun auf einen festen theoretischen Boden gestellt – wir haben es in ein mathematisches Konzept