RESEARCH

Carsten Rösnick

Parametrisierte uniforme Berechnungskomplexität in Geometrie und Numerik

Springer Spektrum

Parametrisierte uniforme Berechnungs-komplexität in Geometrie und Numerik

Carsten Rösnick

Parametrisierte uniforme Berechnungskomplexität in Geometrie und Numerik

Springer Spektrum

Carsten Rösnick
Technische Universität Darmstadt
Deutschland

Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Dissertation, u.d.T. Parametrisierte uniforme Komplexität geometrischer, topologischer und numerischer Operatoren im normierten Raum $\mathbb{R}^d$.

Referent: Prof. Dr. Martin Ziegler
Korreferent: Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Externer Korreferent: apl. Prof. Dr. Norbert Müller (Universität Trier)
Tag der mündlichen Prüfung: 7. Oktober 2014

D 17

ISBN 978-3-658-09658-8 ISBN 978-3-658-09659-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-09659-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Abstract

Dieser Arbeit liegt die Frage nach der algorithmischen Komplexität der approximativen Berechnung von Operatoren aus Geometrie, Topologie und Analysis zugrunde; Operatoren wie Mengendurchschnitt, Projektion, Maximierung, Integration und Funktionsinversion. Der Begriff der Komplexität ist hier im rigorosen Sinne von garantierten Laufzeitschranken und asymptotischen Optimalitätsbeweisen zu verstehen. Ein Turingmaschinenmodell zugrundelegend, liefert die *Berechenbare Analysis* Berechenbarkeitsergebnisse für derartige Operatoren in Abhängigkeit der gewählten Kodierungen ihrer Argumente und Werte. Die komplexitätstheoretische Verfeinerung dieser Ergebnisse gewinnt in letzter Zeit besonders an Interesse als quantitative Grundlage numerischer Praxis.

Gegenüber der klassischen (d. h. diskreten) Komplexitätstheorie entstehen hier zwei zusätzliche Herausforderungen: (1) In der diskreten Komplexitätstheorie stellen sich „sinnvolle" Kodierungen (im Weiteren: *Darstellungen*) von Objekten (bspw. Graphen und aussagenlogischen Formeln) typischerweise als polynomialzeitäquivalent heraus; und Polynomialzeitresultate damit als unabhängig von der Wahl der Darstellung. In der Berechenbaren Analysis hingegen hängt die Zeitkomplexität eines Operators, vielmehr noch als seine Berechenbarkeit, von der konkreten Wahl der Darstellung ab. Hier gilt es, die bekannten berechenbarkeitsäquivalenten Darstellungen unter dem verfeinerten Blickwinkel der Komplexitätstheorie zu klassifizieren. (2) Des Weiteren gilt es, geeignete Darstellungen vorausgesetzt, problemspezifische Parameter zu identifizieren (bspw. Lipschitz-Schranken an Funktionen oder Durchmesser kompakter Mengen) und darauf aufbauend *parametrisierte* Zeitschranken für Operatoren nachzuweisen; ein Ansatz nicht unähnlich dem der parametrisierten Komplexitätstheorie, die eine feinere Komplexitätsanalyse von im unparametrisierten Fall (vermutlich) nicht in Polynomialzeit berechenbaren Problemen erlaubt.

Das Bestreben, polynomialzeitäquivalente Darstellungen für Teilklassen abgeschlossener Mengen zu identifizieren, liefert eine von der Raumdimension und der gewählten Norm abhängige Klassifikation in Äquivalenzklassen. Mit Ausnahme einer Darstellung fällt diese Klassenstruktur jedoch bei Einschränkung auf konvexe reguläre Mengen und geeigneter Beigabe von Parametern zu einer Klasse polynomialzeitäquivalenter Darstellungen zusammen. Für die identifizierten Darstellungen analytischer Funktionen (via Kodierung lokaler Taylorentwicklungen, Cauchy-Folgen von Approximationspolynomen, resp. parametrisierter Wachstumsschranken an Ableitungen) und ihrer Verallgemeinerung auf Gevrey-Funktionen (eine echte Unterklasse der glatten Funktionen) ergibt sich ein ähnliches Bild: auch sie sind einander (parametrisiert) polynomialzeitäquivalent.

Für Operatoren ergeben sich die folgenden Schranken: Die betrachteten Mengenoperatoren (Durchschnitt und Vereinigung, abgeschlossenes Komplement sowie Projektion) sind parametrisiert polynomialzeitberechenbar, wobei wieder die Einschränkung auf konvexe Mengen wesentlich ist. Die numerischen Operatoren, Funktionsinversion zunächst ausgenommen, sind polynomialzeitberechenbar für jede Stufe der Gevrey-Hierarchie. Verallgemeinert auf die gesamte Gevrey-Hierarchie zeigt sich zudem eine (teils optimale!) exponentielle Abhängigkeit vom Stufenparameter. Funktionsinversion stellt sich für eindimensionale monotone Funktionen sowie ab Dimension zwei bei Einschränkung auf bi-Lipschitz-stetige Funktionen als polynomialzeitberechenbar heraus. Die Verallgemeinerung auf bi-Hölder Funktionen zeigt eine exponentielle Abhängigkeit von den Hölder-Exponenten – eine unter Annahme der Existenz bestimmter nicht in Polynomialzeit invertierbarer diskreter Funktionen zugleich optimale untere Schranke.

Ein paar Worte des Dankes

Herzlichst danke ich Prof. Dr. Martin Ziegler für das entgegengebrachte Vertrauen sowie die engagierte Begleitung meines Weges vom ersten Masterseminar über die fernbetreute Masterarbeit bis hin zur nun vorliegenden Doktorarbeit. Weit über die inhaltliche Betreuung hinaus hat er mir stets mit Rat und Beispielen die didaktische Komponente des Vermittelns wissenschaftlicher Ergebnisse ans Herz gelegt, wofür ich überaus dankbar bin. Zum wissenschaftlichen Austausch durch aktive Teilnahme an internationalen Konferenzen hat er mich stets ermuntert, finanzielle Unterstützung meiner täglichen Arbeit sowie bei Konferenzbesuchen erfuhr ich durch das DFG-Projekt `Zi 1009/4`. Dankbar bin ich zudem für die finanzielle Unterstützung und damit Ermöglichung zweier Forschungsaufenthalte in Japan und Südafrika durch das *Marie Curie International Research Staff Exchange Scheme Fellowship* `294962` im Rahmen des *7th European Community Framework Programs*.

Für die Übernahme des Korreferats danke ich Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach sehr herzlich, durch dessen kritische Auseinandersetzung mit meinen Ergebnissen und den daraus resultierten Diskussionen sowie Verbesserungsvorschlägen diese Arbeit weitere inhaltliche Breite gewonnen hat. Recht herzlich danke ich auch apl. Prof. Dr. Norbert Müller für die Übernahme des externen Korreferats.

Meinem guten Freund Tim danke ich für sein trotz großer Entfernung stets offenes Ohr für all meine Fragen, für aufmunternde Worte während meiner Motivationstiefs, für seine Diskussionsfreude, vor allem aber für seine schier unendlich fröhliche Art, die es noch immer geschafft hat, mich aufzuheitern.

Meiner geliebten Julia danke ich für ihr geduldiges Ertragen meiner ständigen Erklärungen zu verschiedensten Themen rund um diese Arbeit und meiner steten Versuche, ihr theoretische Informatik und insbesondere die Schönheit der Komplexitätstheorie nahezubringen. Ihr zudem immer wiederkehrendes Erinnern an die Welt abseits von Whiteboard, Papern und LaTeX sorgte für die nötige Zerstreuung, die hin und wieder auch zu Lösungsansätzen führte, die sich mir zuvor verschlossen hatten.

Ich danke vor allem Vince Bárány, Vassilios Gregoriades, Arno Pauly, Robert Rettinger und Florian Steinberg für die zahlreichen Diskussionen und das geduldige Ertragen meiner Fragen; Davorin Lešnik für das Näherbringen seiner typographischen Liebe zum Detail; und nicht zuletzt den (freiwilligen!) Korrekturlesern Daniel Günzel, Daniel Körnlein, Julia Neugebauer, Rebecca Pfündl, Tim Schmidt und Florian Steinberg.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Seit ihrer Begründung[1] hat sich der Bereich der Komplexitätstheorie in viele interessante Richtungen verzweigt.[2] Diese Arbeit ist fokussiert auf die Betrachtung und Verbindung von Ideen zweier spezieller Bereiche: der parametrisierten diskreten auf der einen Seite und der kontinuierlichen Komplexitätstheorie auf der anderen Seite.[3] Erstgenannte studiert Aufteilungen von Komplexitätsschranken von als „schwer“ eingestuften Problemen in einen „einfachen“ und in einen von Parametern abhängigen „schwierig“ zu lösenden Teil (Stichwort *Problemkern*). Die Identifikation geeigneter Parameter, die Einblick in die Struktur des betrachteten Problems gewähren, ist dabei eine der Herausforderungen. Die Kontinuierliche Komplexitätstheorie hingegen beschäftigt sich mit der Klassifikation von Problemen und Funktionen der Analysis in Komplexitätsklassen und verbindet damit Grundlagen und Ideen der diskreten Komplexitätstheorie mit der Numerik. Sind wir nun aber an der praktischen Lösbarkeit – und damit an Polynomialzeitalgorithmen – interessiert, liefert eine Einordnung in Komplexitätsklassen zwar eine für die Theorie interessante Erkenntnis, jedoch selten eine Antwort darauf, was genau Familien von Instanzen eines Problems schwierig erscheinen lässt.

Ziel dieser Arbeit ist es, problemspezifische Parameter zu identifizieren, die, wenn fixiert, Polynomialzeitalgorithmen für im allgemeinen Fall schwierige Probleme liefern – und damit eine quantitative Feinanalyse der Komplexität ermöglichen.

---

[1] Fortnow und Homer [FH03, §2] datieren die Begründung des Gebiets der Komplexitätstheorie auf die frühen Sechszigerjahre des letzten Jahrhunderts und schreiben sie speziell Hartmanis und Stearns zu.

[2] u. a. zur Schaltkreiskomplexität (TC^0, NC^i, AC^i), zur Kryptokomplexität (PP, BPP), Quantenkomplexität (BQP), algebraischen (VP vs. VNP) und geometrischen Komplexität.

[3] Der Ansatz, Parametrisierungen in die *Berechenbare Analysis* zu tragen, wurde bereits von [Ret08] verfolgt, allerdings nicht mit dem Ziel dieser Arbeit: der Skalierbarkeit von Komplexitätsschranken.

C. Rösnick, *Parametrisierte uniforme Berechnungskomplexität in Geometrie und Numerik,*
DOI 10.1007/978-3-658-09659-5_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Hintergrund

Als theoretisches Fundament des Rechnens mit kontinuierlichen Objekten (u. a. reellen Zahlen, Teilmengen eines normierten Raumes, stetigen Funktionen) wählen wir das in der Berechenbaren Analysis etablierte *Typ-2 Modell* [Wei00] – eine Erweiterung des klassischen Turigmaschinenmodells, gewählt auch mit Blick auf die praktische Realisierbarkeit der in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse (bspw. im iRRAM-Paket von Norbert Müller [Mül00]). Die in der diskreten Berechenbarkeit oft *implizit* angenommenen Kodierungen[4] werden im Typ-2 Modell *explizit* durch die Formulierung sog. *Darstellungen* angegeben. Ein wichtiges Beispiel ist die Cauchy-Darstellung reeller Zahlen: Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird durch eine *Approximationsfunktion* vom Typ $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kodiert, die zu gegebener Genauigkeit $n \in \mathbb{N}$ die Kodierung einer dyadisch rationalen Näherung an x mit absolutem Fehler 2^{-n} liefert. Der Berechenbarkeitsbegriff reeller Zahlen in Cauchy-Darstellung folgt damit ganz natürlich: Berechne eine Näherung an x mit gegebener Genauigkeit. Analog ist eine stetige Funktion f über den reellen Zahlen berechenbar bzgl. der Cauchy-Darstellung reeller Zahlen, wenn es eine Turingmaschine gibt, die, gegeben eine Approximationsfunktion ϕ von x, den Funktionswert $f(x)$ aus ϕ mit *beliebiger*[5] *vorgegebener*[6] Genauigkeit berechnen kann. Eine solche Maschine hat also *Black-Box Zugriff* auf das Argument x durch die Approximationsfunktion ϕ; in einer praktischen Umsetzung entspräche dies bspw. einem Unterprogrammaufruf. Die in der Numerik üblicherweise durch Prozessorprimitiven unterstützen Berechnungen über Fließkommazahlen (`float`, `double`), rechtfertigen durch damit *festen* Genauigkeiten Komplexitätsbetrachtungen im *Einheitskostenmaß* (wie bspw. in der *Informationsbasierten Komplexität* [TWW88]). Durch Typ-2 Maschinen wird der Numerik mit

[4] Ein Graph beispielsweise kann sowohl als Liste von Knoten und Kanten, jedoch auch als Inzidenzmatrix kodiert werden. Die Berechnungskomplexität von Graphalgorithmen ändert sich durch einen Wechsel zwischen diesen Darstellungen lediglich (aus theoretischer Sicht) um einen polynomiellen Faktor.

[5] im Gegensatz zu Berechnungen in bspw. `float` oder `double` Arithmetik; d. h. mit *fester* Genauigkeit.

[6] Zu gegebener Genauigkeit $n \in \mathbb{N}$ ist ein Index $m = m(n) \in \mathbb{N}$ zu berechnen, ab dem alle Folgenglieder den Grenzwert mit Fehler 2^{-n} approximieren. Eine derartige Funktion der Form $\mu\colon n \mapsto m$ heißt auch *Konvergenzmodul*; näheres dazu ab Abschnitt 5.2.

Beachte: Es gibt berechenbare, monotone und beschränkte Folgen rationaler Zahlen in $[0, 1]$, sogenannte *Specker-Folgen* [Spe49], die *keinen* berechenbaren Konvergenzmodul besitzen (und äquivalent dazu: *keinen* berechenbaren Grenzwert). Konkret lässt sich aus dem Halteproblem eine Specker-Folge konstruieren, so dass diese genau dann einen berechenbaren Konvergenzmodul besitzt, wenn das Halteproblem entschieden werden kann.

obiger Semantik von Berechnungen mit *vorgegebener beliebiger* Genauigkeit ein weiteres und zugleich für die Komplexitätstheorie zugängliches Modell zur Seite gestellt, welches typische Probleme der Numerik (Rundungsfehler und Fehlerfortpflanzung, Auslöschung) durch Korrektheitsbeweise von Algorithmen mit einbezieht.

Für den Raum stetiger Funktionen $f\colon [-1,1]^d \to \mathbb{R}^e$ (allgemeiner: mit fixiertem, kompaktem berechenbaren Definitionsbereich) impliziert obige Berechenbarkeitssemantik einen natürlichen Komplexitätsbegriff: Gegeben ein dyadisch rationales Argument $q \in \mathrm{Dom}(f)$ der Genauigkeit n, berechne $f(q)$ mit Fehler 2^{-n} in Zeit beschränkt in einer Funktion von n. Die Verallgemeinerung auf Operatoren stellte sich jedoch als nicht offensichtlich heraus: Ko und Friedman [KF82] definierten Operatoren über dem Raum stetiger Funktionen $f\colon [-1,1]^d \to \mathbb{R}^e$ zunächst als in Polynomialzeit berechenbar, wenn sie polynomialzeitberechenbare Funktionen auf polynomialzeitberechenbare Funktionen abbilden – ein *nicht-uniformer* Ansatz. Die Komplexität einer Funktion hängt dabei, mehr noch als ihre Berechenbarkeit, von der gewählten Darstellung ab. Eine Grundlage für einen *uniformen* Komplexitätsbegriff für Operatoren – die wir später als *Stufe-2 Komplexität* bezeichnen wollen – legten Mehlhorn [Meh76] sowie Kapron und Cook [KC96] durch Definition höherstufiger Pendants „klassischer“ Polynomialzeitschranken. Kawamura und Cook [KaC12] erweiterten diesen Ansatz um die Formulierung von Stufe-2 Komplexitätsklassen und – noch wichtiger – um den Nachweis vollständiger Operatoren für diese Klassen. Die uniformen Schranken verallgemeinern dabei einige der nicht-uniformen Resultate von Ko und Friedman [KF82, Fri84, Ko91].

Das ausgegebene Ziel der quantitativen Feinanalyse von Komplexitätsschranken von Operatoren teilen wir in vier aufeinander aufbauende Schritte ein. Diese Schritte sollen es uns schlussendlich erlauben zwischen effizienten Einschränkungen einer Problemformulierung (bspw. Riemann-Integration über glatten oder gar analytischen Funktionen) und dem allgemeinen Pendant (bspw. Riemann-Integration über stetigen Funktionen) die Komplexität durch Änderungen der Parameter zu skalieren.

I Klassen. Identifiziere zuerst Klassen von Objekten, auf denen Operatoren definiert und ihre Komplexität betrachtet werden soll; bspw. stetiger/mehrfach differenzierbarer/glatter Funktionen, oder abgeschlossener/kompakter/kompakt konvexer Mengen. Im diskreten Fall entspricht das z. B. der Einschränkung auf die Klasse aller Graphen, aller planaren Graphen oder aber aller Bäume. Motivation dahinter: Viele Graphenprobleme werden einfacher, je „baumähnlicher“ ein Graph (d. h. je kleiner seine sog. Baumweite[7]) ist.

II Darstellungen. Bestimme (geeignete) Darstellungen zu jeder der im vorigen Schritt identifizierten Klassen. In diesem Schritt fließen auch sich durch die Eigenschaften betrachteter Klassen ergebende Parameter ein: bspw. Lipschitz-Konstanten, innere/äußere Durchmesser kompakter Mengen, oder Konstanten, die das Wachstumsverhalten von Ableitungen bestimmter (Klassen) glatter Funktionen charakterisieren. Für die im diskreten Fall benannte Klasse von Graphen wäre die Baumweite ein solcher Parameter.

III Darstellungsvergleich. Ebenso wie es nicht nur einen sinnvollen Parameter für ein Problem in der parametrisierten Komplexität gibt, kann es auch mehrere natürliche Darstellungen pro in Schritt I identifizierter Klasse geben: Kompakte nicht-leere Mengen bspw. können äquivalent durch Näherungen ihrer Abstandsfunktion, endliche Überdeckungen beliebiger Genauigkeit, Kodierung des Randes oder mittels ihrer charakteristischen Funktion mit Fehlern beliebig nahe des Randes dargestellt werden. Untersuche daher Darstellungen auf Polynomialzeitäquivalenz – Berechenbarkeitsäquivalenz vorausgesetzt. Äquivalenz von Darstellungen ist insbesondere wichtig für den letzten Schritt.

IV Komplexität von Operatoren. Wähle aus der Menge der polynomialzeitäquivalenten Darstellungen eine aus und bestimme die Komplexität bzgl. dieser Darstellung. Dabei gilt: Je mehr „natürliche“ äquivalente Darstellungen es gibt, desto robuster (weil invariant unter Darstellungswechseln) ist die gewonnene Komplexität eines Operators.

Aufbau und Ergebnisse

Dieser Arbeit liegt die folgende Struktur zugrunde.

Kapitel 2. Die für diese Arbeit grundlegenden Begriffe und Konzepte (Rechenmodell, Darstellungen, Berechnung kontinuierlicher Objekte, Zeitkomplexität im Kontinuierlichen) werden eingeführt und durch einige Beispiele illustriert. Ein Fokus wird dabei auf der Formulierung parametrisierter Komplexität, d. h. Zeitschranken in Abhängigkeit von zu gegebenem Problem geeigneten Zusatzinformationen, liegen.

[7] Ein Baum mit n Knoten hat minimale Baumweite 1, ein vollständig verbundener Graph mit n Knoten die maximale Baumweite $n-1$.

Kapitel 3. Die Betrachtung der Klasse $\mathcal{A}^{(d)}$ abgeschlossener Teilmengen des normierten Raumes $\mathbb{R}^d$ wird erste Beispiele von als „natürlich“ zu bezeichnenden Darstellungen liefern. Darstellungen für Teilmengen eines normierten Raumes sind jedoch stets abhängig von der Wahl der Norm – eine Abhängigkeit, die bisher in der Literatur zu Berechenbarkeits- und Komplexitätsresultaten noch nicht betrachtet wurde. Allerdings wird es sich als nicht wesentlich herausstellen, welche konkrete Norm zur Definition einer Darstellung verwendet wird: Zu gegebener Darstellung ist der Austausch zweier berechenbarkeitsäquivalenter Normen eine berechenbare Operation. Aus Komplexitätssicht gilt dieser Zusammenhang i. Allg. jedoch *nicht* und wird sich auch nur für manche Darstellungen durch das Hinzufügen geeigneter Parameter wiederherstellen lassen.

Ein zweiter das Verhältnis von Darstellungen beeinflussender Aspekt ist die Dimension des betrachteten Raumes. Obwohl alle in diesem Kapitel betrachteten Darstellungen über einer Teilklasse von $\mathcal{A}$ in beliebiger Dimension einander berechenbarkeitsäquivalent sind [Zie02, Cor. 4.13], zerfällt dieses Ergebnis über der feineren Betrachtung von Polynomialzeitäquivalenz in zwei Teile: In Dimension 1 ist sie weiterhin korrekt, ab Dimension 2 bilden sich jedoch drei Äquivalenzklassen heraus – eine Polynomialzeitverfeinerung von [Zie02, Thm. 4.11].

Kapitel 4. Unter Verwendung der diskutierten Mengendarstellungen und ihrer Äquivalenzen identifizieren wir (notwendige) Einschränkungen auf Teilklassen von $\mathcal{A}$ und Parameter, für die Mengendurchschnitt und -vereinigung sowie das abgeschlossene Komplement und die Projektion auf Unterräumen von $\mathbb{R}^d$ in Polynomialzeit berechenbar sind. Insbesondere die Einschränkung auf konvexe Mengen wird sich – wie auch in der Algorithmischen Geometrie und Optimierung – als wichtige Eigenschaft in der Formulierung von Polynomialzeitalgorithmen herausstellen.

Kapitel 5. Kapron und Cook [KC96] verallgemeinerten das Konzept von Polynomialzeit durch sog. *Stufe-2 Polynome*. In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Abriss zur historischen Entwicklung und Diskussion dieser Erweiterung.

Kapitel 6. Wir untersuchen die Komplexität von Integration und Differentiation, Maximierung und des Reziproken $f \mapsto 1/f$ sowie der Komposition von Funktionen. Insbesondere die Integration und Maximierung von Funktionen werden in der Numerik als einfach zu berechnende Operationen angesehen[8] – eine Sicht, die zumindest im Typ-2 Modell nicht gerechtfertigt werden kann: Selbst eingeschränkt auf glatte Funktionen auf $[-1, 1]$ können exponentielle untere Schranken bewiesen werden [Ko91, KaC12]. Nicht-uniform jedoch sind diese Operationen polynomialzeitberechenbar [LLM01] bei Einschränkung auf glatte Funktionen mit fixierten Wachstumsschranken der Ableitungen. Zur Uniformisierung vorgenannter Ergebnisse kodieren wir die verwendeten Parameter in Darstellungen für Unterräume glatter Funktionen: den *Gevrey-Funktionen* mit Spezialfall der komplex-analytischen Funktionen. Integration bspw. ist offensichtlich polynomialzeitberechenbar, wenn der Integrand $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ als Cauchy-Folge von Approximationspolynomen *linear wachsenden Grades* gegeben ist: integriere das $(n + 1)$-te Polynom p_{n+1} und nutze $\|f - p_{n+1}\| < 2^{-(n+1)}$. Diese informell beschriebene Darstellung $\boldsymbol{\alpha}$ wird sich für analytische Funktionen als polynomialzeitäquivalent zu den anderen beiden betrachteten Darstellungen, $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\beta}$, herausstellen – und parametrisiert polynomialzeitäquivalent über Gevrey-Funktionen. Diese Darstellungen werden uns die Uniformisierung der Resultate von Labhalla et al. [LLM01] erlauben – und damit eine Skalierung in der *Gevrey-Stufe* zwischen Polynomialzeit- für analytische Funktionen und Exponentialzeitberechenbarkeit für glatte Funktionen.

Kapitel 7. In Kapitel 6 wird die Diskussion um Voraussetzungen und Komplexität von Funktionsinversion (Umkehrfunktion „f^{-1}“) bewusst ausgelassen. Die Gründe sind mannigfaltig: Für eindimensionale injektive Funktionen ist Funktionsinversion einfach, ab Dimension zwei steht die Komplexität jedoch mit der Existenz schwer invertierbarer diskreter Funktionen[9] in Verbindung. Durch Einschränkung auf Lipschitz-stetige Funktionen mit Lipschitz-stetiger Umkehrfunktion (bi-Lipschitz Funktionen) kann diese Verbindung umgangen werden – und liefert für diesen Fall sogar einen Polynomialzeitalgorithmus. Für allgemeinere bi-Hölder Funktionen jedoch ergibt sich eine Skalierung zwischen dem Polynomialzeitfall und den (vermutlich) exponentiellen unteren Schranken nach Ko [Ko91, §4]. Globale bi-Lipschitz-Stetigkeit ist jedoch eine sehr starke Voraussetzung an Funktionen. Ergebnisse von Ziegler [Zie06] und McNicholl [McN08] zur Berechenbarkeit von

[8] Insbesondere Maximierung und Integration stetiger eindimensionaler Funktionen sind Grundoperationen in allen Softwarepaketen (z. B. Matlab, Scilab) und Bibliotheken (z. B. nag) der angewandten Numerik.

[9] Derartige Funktionen, sogenannte *Einwegfunktionen*, finden Verwendung in der Kryptografie, ihre Existenz würde $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ implizieren und ist damit insbesondere Forschungsgegenstand der diskreten Komplexitätstheorie.

Umkehrfunktionen legen zusammen mit der Erweiterbarkeit der Skalierungsergebnisse aus Kapitel 6 auf ein- und mehrdimensionale Funktionen jedoch die Vermutung nahe, dass die lokale Funktionsinversion über Teilklassen von Gevrey-Funktionen parametrisiert polynomialzeitberechenbar ist.