Christian van Randenborgh

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten

Springer Spektrum

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Christian van Randenborgh

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten

Springer Spektrum

Christian van Randenborgh
Zentrum f. schulprakt. Lehrerausbildung
Bielefeld, Deutschland

Dieses Buch wurde auf der Grundlage der Dissertation des Autors an der Universität Würzburg erstellt. Die Dissertation trägt den Titel:

„Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten zu Instrumenten der Wissensvermittlung (Untertitel: Die Bedeutung historischer Zeichengeräte für das Aufdecken verborgener Ideen im Mathematikunterricht)"

ISBN 978-3-658-07290-2 ISBN 978-3-658-07291-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-07291-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

Im Zeitalter von Smartphone und Computer, grafikfähigem Taschenrechner und Computer-Algebra-System, Tabellenkalkulation und dynamischer Geometriesoftware etc. bedarf es schon einer besonderen Rechtfertigung und guter Gründe, warum sich das Interesse am Einsatz historischer mathematischer Instrumente heute noch lohnt. Geht es darüber hinaus um den Einsatz derartiger Geräte im heutigen Mathematikunterricht, so gilt es auch didaktische Ziele zu benennen. Das hier vorliegende Buch beschäftigt sich mit realen und digitalen Nachbauten von historischen Zeichengeräten, speziell dem Parabelzirkel von Frans van Schooten und dem Pantographen von Christoph Scheiner. Es möchte einerseits gute Gründe für die Beschäftigung mit historischen mathematischen Instrumenten geben und andererseits Interesse an diesen Geräten wecken.

Bei Schülerinnen und Schülern, so zeigen es deren Rückmeldungen, wecken die hier vorgestellten Zeichengeräte Neugier, ihr Einsatz im Mathematikunterricht ermöglicht es ihnen, eigene Entdeckungen zu machen. Für den Mathematikunterricht lohnend ist die Beschäftigung mit historischen Zeichengeräten vor allem deshalb, weil Schülerinnen und Schüler die zugrundeliegende Mathematik aufdecken können. Jedes Zeicheninstrument beruht auf einer mathematischen Idee. Sichtbar wird diese Idee jedoch in der Regel erst nach einer genaueren Untersuchung des Geräts. Damit ist eine didaktische Idee angesprochen, die mit der Erforschung des Geräts verbunden werden kann.

Den Anstoß zu diesem Buch, dessen Grundlage meine Dissertation ist, habe ich aus den Beobachtungen und Erfahrungen erhalten, die ich selbst als Gymnasiallehrer mit dem Unterrichtseinsatz des Parabelzirkels gewonnen habe. Seit dieser Zeit begleitet mich mein Doktorvater, Herr Prof. Dr. Hans-Georg Weigand. Ich bin ihm für seine Unterstützung, seine freundliche und hilfsbereite Art und für seine vielen guten Worte sehr dankbar. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Anselm Lambert für sein Interesse und seinen genauen Blick und die konstruktive Kritik.

Darüber hinaus gilt mein Dank den Schülerinnen und Schülern, die meine Nachbauten der historischen Zeichengeräte erforscht und meine Arbeitsaufträge motiviert bearbeitet haben. Natürlich richtet sich der Dank auch an ihre Lehrerinnen und Lehrer, die mir die Unterrichtsdurchführung in ihren Kursen ermöglicht haben.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei meiner Familie für die erhaltene Unterstützung, die Zeit und das Verständnis bedanken. Damit meine ich meine Eltern, insbesondere meinen Vater für seine mathematische, didaktische und moralische Unterstützung. Ganz besonders bedanke ich mich für die erhaltenen Freiräume und das Ertragen meines Arbeitspensums bei meiner Frau und meinen Kindern Manuel und Alina.

Christian van Randenborgh, Bielefeld im September 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Menschheitsgeschichte spielen immer wieder Werkzeuge, ihre Erfindung und ihr Einsatz eine entscheidende Rolle. Diese Erkenntnis drückt sich selbst in der Einteilung der Geschichte aus.

> „Die Einteilung der Frühzeit der europäischen Menschheitsgeschichte in Steinzeit, Kupferzeit, Bronzezeit und Eisenzeit zeigt die zentrale Rolle von Werkstoffen für Mensch und Gesellschaft. Jede dieser Perioden ist mit der Entwicklung von Gegenständen und neuen Herstellungstechniken von Werkzeugen verknüpft, die zum Fortschritt des Menschen beigetragen haben ...“[1]

Daher hängen die Entwicklung des Menschen, seine Kultur und Denkweisen aufs Engste mit der Erfindung von Werkzeugen zusammen.

> „Man's use of mind is dependent upon his ability to develop and use »tools« or »instruments« or »technologies« that make it possible for him to express and amplify his powers.“[2]

Diese prägende Bedeutung der Werkzeugentwicklung und des Werkzeugeinsatzes wurde bereits von Ernst Kapp in seinem Werk „Grundlinien einer Philosophie der Technik. Zur Entstehungsgeschichte der Cultur aus neuen Gesichtspunkten“ aus dem Jahr 1877 vertreten. In dem folgenden Zitat von Edmund Reitlinger, das sich dort auf der Titelseite findet, ist eine Art Leitperspektive zu sehen, denn Kapp stellt es auf diese Weise seinem ganzen Buch voran:

> „Die ganze Menschengeschichte, genau geprüft, löst sich zuletzt in die Geschichte der Erfindung besserer Werkzeuge auf.“[3]

Auch in der Mathematik und für den Mathematikunterricht wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Zeichengeräte und gehen der Frage nach, welche Bedeutung historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben können. Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden und was und wie können Schüler dabei lernen?[4]

---

[1] Handge/Öttinger 2006, S. 123f.

[2] Bruner 1971, S. 24.

[3] Kapp 1877, Titelseite.

[4] Siehe auch van Randenborgh 2013b.

C. van Randenborgh, *Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht*,
DOI 10.1007/978-3-658-07291-9_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

J.S. Bruner formuliert mit Blick auf den Mathematikunterricht:

> „We would suggest that learning mathematics reflects a good deal about intellectual development. It begins with instrumental activity, a kind of definition of things by doing them.“[5]

Ein Beispiel für eine solche »instrumentale Aktivität« ist das Arbeiten mit einem Zeichengerät.

Eine neue, weiterführende Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als ***Ideenkonglomerat*** unterschiedlicher Ideen, wie z.B. der mechanischen oder der mathematischen Idee, verstanden wird. Diese Perspektive wird in **Kapitel 1** näher erläutert.[6]

In der hier vorliegenden empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von Frans van Schooten (1615–1660) und des Pantographen von Christoph Scheiner (1573–1650) im Mathematikunterricht untersucht. Den Schülerinnen und Schülern[7] standen zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden im Rahmen der *Instrumentellen Genese* und der *Semiotischen Vermittlung* analysiert und interpretiert. Diese grundlegenden theoretischen Ansätze sind in **Kapitel 2** dargestellt. Der Ablauf der empirischen Untersuchung, die eingesetzten Materialien, Beobachtungen und Interpretationen finden sich in **Kapitel 3**. Dort werden auch die Lernprozesse und Wege der Instrumentellen Genese beim Einsatz eines realen Modells mit denen beim Einsatz eines digitalen Nachbaus verglichen. Dieses ist auch mit Blick auf das in den *NCTM Principles and Standards for School Mathematics* formulierte „Technology Principle“ interessant. Dieses richtet sich auf den Einsatz von neuen Medien, gilt aber sicherlich nicht nur für diese.

> **„The Technology Principle**
>
> > *Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning.*
>
> Electronic technologies – calculators and computers – are essential tools for teaching, learning, and doing mathematics. They furnish visual images of mathematical ideas, they facilitate organizing and analyzing data, and they compute efficiently and accurately. They can support investigation by students in every area of mathematics, including geometry, statistics, algebra, measurement, and number. When technological tools are available, students can focus on decision making, reflection, reasoning, and problem solving.“[8]

---

5 Bruner 1971, S. 68.

6 Vgl. auch van Randenborgh 2012a.

7 Im Folgenden wird – aus Gründen der besseren Lesbarkeit – nur noch von Schülern gesprochen. Damit sind weibliche und männliche Personen gemeint.

8 NCTM 2000, S. 24.

Die hier angesprochenen Möglichkeiten sind aber nur gegeben, wenn das Werkzeug im Unterricht entsprechend eingesetzt wird. Mit Blick auf einen solchen Einsatz hebt WEIGAND zwei Dinge hervor:

> „Für den adäquaten Werkzeugeinsatz bedarf es sowohl der Kenntnisse der Funktionsweise des Werkzeugs als auch Vorstellungen darüber, wie sich die zu bearbeitende Situation verändern soll.“[9]

Bei der Erforschung eines historischen Zeichengeräts können Schüler sowohl die Funktionsweise des Geräts aufdecken, als auch Vorstellungen über seine Einsatzmöglichkeiten entwickeln. Allerdings liegt der Schwerpunkt unserer Untersuchung auf dem Entdecken des Zeichengeräts und der in ihm enthaltenen Ideen – insbesondere der mathematischen Idee. Es geht also nicht oder nur in zweiter Linie um den praktischen Einsatz des Geräts selbst.

Bei der Gestaltung der Lernumgebung, der Arbeitsaufträge und des Unterrichts wurde darauf geachtet, entdeckendes – ja geradezu forschendes – Lernen zu ermöglichen. Hier stellt das zu untersuchende Zeichengerät selbst die zu entdeckende Mathematik bereit, und es kann daher als *äußerer Impuls* im Sinne WINTERS verstanden werden.

> „Entdeckendes Lernen ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen, sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, daß Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse.“[10]

In unserer empirischen Untersuchung ließen sich dabei bestimmte Prozesse und Lernwege feststellen. Auf diese Weise gelang es, eine Zuordnung der Schüler nach bestimmten ***Instrumentalisationstypen*** vorzunehmen.

Auf Grund dieser Ergebnisse wurde das Modell der ***Instrumentellen Wissensaneignung***[11] entwickelt und in den mathematik-didaktischen Kontext eingeordnet.

Die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die theoretischen Modelle sowie didaktischen Ideen und Ziele des Einsatzes von historischen Zeichengeräten im Mathematikunterricht werden in **Kapitel 4** thematisiert.

Insgesamt zeigt das vorliegende Buch, dass für den Prozess der Instrumentellen Genese das Aufdecken, Erforschen und Erklären von *Grenzen, Zwängen und Möglichkeiten* des Geräts entscheidend ist. Diese besonderen Eigenschaften leiten die Untersuchung des Zeichengeräts durch die Schüler und bestimmen so deren Lernprozess. Mit Hilfe der Semiotik lassen sich dabei *unterschiedliche Zeichenkategorien* feststellen, die für bestimmte Bearbeitungsphasen der Schüler charakteristisch waren. Eine besondere Bedeutung kam dabei den ***Trägerzeichen*** zu. Diese weiterführenden Zeichen bestimmten die darauffolgende Schülertätigkeit. Die Entstehung der verschiedenen Zeichen und Zeichenkategorien sowie

---

9 Weigand 2004, S. 5.

10 Winter 1991, S. 1. Zitiert nach: http://madipedia.de/wiki/Entdeckendes_Lernen

11 Vgl. auch van Randenborgh 2012b.

der Prozess der Instrumentellen Genese konnte mit dem in diesem Buch entwickelten Verständnis eines Zeichengeräts als Ideenkonglomerat erklärt werden. Diese Auffassung war auch zentral bei der Erklärung von – bei der empirischen Untersuchung festgestellten – Gemeinsamkeiten und Unterschieden beim Einsatz eines realen bzw. digitalen Nachbaus eines Zeichengeräts.

Wird im Mathematikunterricht aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung, dann findet ein Prozess der Instrumentellen Wissensaneignung statt. Die hier gewonnenen Einsichten zeigen Bezüge zu den bekannten Modellierungskreisläufen bzw. *Modellierungsabläufen*. Sie werfen auch neue Untersuchungsfragen z.B. mit Blick auf den Einsatz von mathematikhaltigen Medien und einer entsprechenden *Medialen Wissensaneignung* auf.

1 Was sind historische Zeicheninstrumente?

Als historische Instrumente bezeichnen wir Instrumente, die aus der Vergangenheit stammen. An dieser Stelle soll nicht eingehend diskutiert werden, wann ein Instrument als historisch anzusehen ist. Es geht vielmehr darum, Kriterien dafür zu entwickeln, wann man von einem *Instrument* sprechen kann.

1.1 Was ist ein Instrument?

Zunächst ist es sinnvoll und üblich, Instrumente nach ihrem *Verwendungs**bereich*** zu unterteilen. Beispielsweise kann man von Musikinstrumenten sprechen und diese weiter einteilen nach ihrer *Verwendungs**art*** oder ihrem Verwendungs***zweck***. So gibt es Blasinstrumente, Streichinstrumente etc. Auch im Bereich der Medizin kann man medizinische Instrumente unterteilen, z.B. in chirurgische Instrumente, HNO-Instrumente etc.

Für ***mathematische Instrumente*** gibt es entsprechende Einteilungen. So ist es gebräuchlich von Instrumenten zum Rechnen und Instrumenten zum Zeichnen zu sprechen.[12] Außerdem kann man noch Instrumente zum Messen unterscheiden.[13]

Darüber hinaus kann man dann – je nach Verwendungsart – weitere Spezifizierungen vornehmen (s.u. *Einsatzidee*).

In der vorliegenden Untersuchung geht es um ***Zeicheninstrumente***. Daher beziehen sich die weiteren Ausführungen auch nur auf diese.

1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können?

In Anlehnung an Vollrath[14] können die folgenden sechs Kriterien bzw. Ideen aufgeführt werden.

1. Einsatzidee:

Besteht ein wesentliches Ziel der Anwendung des Instruments darin, dass es zum Zeichnen eingesetzt werden kann, dann ist seine Einsatzidee das Zeichnen. Eine feinere Unterteilung dieser Instrumente nach dem „Wie" und dem „Was" des Zeichnens ergibt etwa[15]:

12 Vgl. z.B. Vollrath/Weigand/Weth 2000, S. 123f.

13 Vgl. auch Vollrath 2013.

14 Vollrath 2003, S. 256ff. Vgl. auch van Randenborgh 2012b.

15 Vgl. dazu auch Bartolini Bussi/Pergola 1996, S. 45: „pantographs" und „curvigraphs".

C. van Randenborgh, *Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht*,
DOI 10.1007/978-3-658-07291-9_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

a) Lineale und Schablonen;
b) Pantographen und
c) Kurvenzeichner.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird auf Pantographen und Kurvenzeichner eingegangen. Weitere Ideen dieser Instrumente sollen im Folgenden kurz benannt und anschließend am Beispiel des Parabelzirkels von VAN SCHOOTEN (1615–1660) und des Pantographen von SCHEINER (1575–1650) exemplarisch erläutert werden.

2. Mechanische Idee:

Ein Zeicheninstrument ist (zunächst)[16] ein materieller Gegenstand. Er besitzt eine bestimmte *Bauweise*, enthält also eine mechanische Idee. VOLLRATH spricht von technischer Idee und erläutert dieses am Beispiel des Zirkels:

> „Mit dem Zirkel kann man seit jeher Kreise verschiedener Radien zeichnen, denn die Schenkel des Zirkels wurden bereits im Altertum über ein Gelenk drehbar miteinander verbunden. Das war die entscheidende *technische Idee* dieses Instruments."[17]

Ein Zeicheninstrument ist daher stets Träger einer mechanischen Idee.

3. Mathematische Idee:

Diese ist die für uns entscheidende Idee. Die von uns analysierten Instrumente beruhen auf einer mathematischen bzw. geometrischen Eigenschaft, einerseits bezüglich der erzeugten Kurve (*Funktionsweise*) und andererseits bezüglich des Instruments selbst (*Bauweise*). Diese Idee ist die gedankliche Grundlage des Instruments. Sie stellt die Verbindung von Funktions- und Bauweise her.

In dem *wechselseitigen Zusammenspiel* zwischen Bau- und Funktionsweise wird die mathematische Idee[18] sichtbar!

Die geometrische Eigenschaft der Kurve ermöglicht und bestimmt – oder anders ausgedrückt – beinhaltet die Idee für die Bauweise des Zeicheninstruments. Die Bauweise, also die zugrundeliegende geometrische Konstruktion des Instruments, ermöglicht und bestimmt ihrerseits wiederum die Funktionsweise.

4. Didaktische Idee:

Dieses w*echselseitige Zusammenspiel* zwischen Bau- und Funktionsweise, also die mathematische Idee, die das Zeicheninstrument ermöglicht, kann aufgedeckt und entdeckt werden. Wird ein Zeichengerät mit diesem Ziel im Mathematikunterricht eingesetzt, so kann das Zeicheninstrument auch Träger einer didaktischen Idee sein.[19]

---

16 Auf die Möglichkeiten einer Simulation von Zeichengeräten mit Hilfe einer DGS wird später noch eingegangen werden (s.u. S. 16ff., S. 102ff., S. 164ff.).

17 Vollrath 2003, S. 256.

18 Es kann bei einem Instrument auch mehrere Ideen geben.

19 Vgl. auch Weigand/Weth 2002; Bartolini Bussi 2001.

5. Nutzungsidee:

Wird ein Zeichengerät untersucht, z.B. von Schülern[20] im Mathematikunterricht, so entsteht eine Nutzungsidee, wie und wozu das Gerät eingesetzt werden kann.[21]

6. Kulturell-historische Idee:

Ein Zeicheninstrument sollte schließlich auch als Träger einer kulturell-historischen Idee betrachtet werden.[22] Denn das Zeicheninstrument ist in einer ganz bestimmten historischen Situation entstanden und ist Bestandteil und Ausdruck eines ganz bestimmten Interesses an Geometrie und einer bestimmten Perspektive auf Mathematik.

Die einzelnen Ideen sind eng und auf vielfältige Weise miteinander verbunden. Dieses „Ineinander-verwoben-sein“ macht das Gesamtbild des historischen Zeichengerätes aus. Um dieses deutlich zu machen, werden wir von einem ***Ideenkonglomerat*** des Geräts sprechen (siehe Abbildung 1.1).[23]

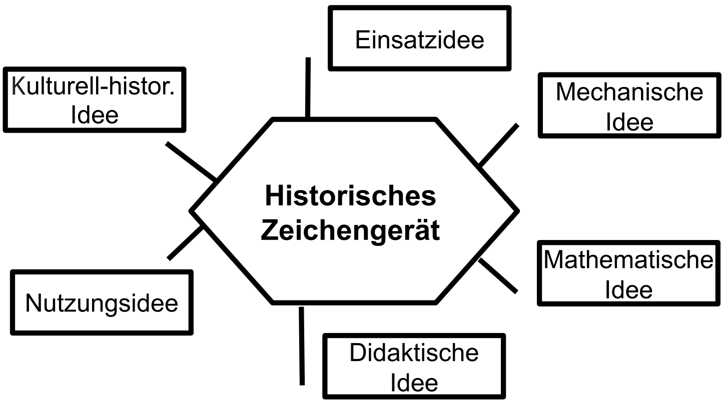

Abb. 1.1 Historische Zeichengeräte als Ideenkonglomerate verstehen

1.2.1 Der Parabelzirkel von VAN SCHOOTEN als Ideenkonglomerat

Der Parabelzirkel und andere Zeichengeräte von VAN SCHOOTEN finden sich als Abbildungen in den folgenden beiden Veröffentlichungen von VAN SCHOOTEN:

Zum einen in dem **1646** erschienen Werk *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* und als Wiederabdruck im vierten Teil des Buches *Exercitationvm Mathemati-*

20 Mit Blick auf eine bessere Lesbarkeit wird in unserer Arbeit die Bezeichnung „Schüler“ als Sammelbezeichnung für weibliche und männliche Schüler verwendet. Gemeint sind also immer Schülerinnen und Schüler.

21 Genaueres dazu siehe Kapitel 3, vor allem S. 120ff.

22 Vgl. auch Vollrath 1999; Bartolini Bussi 2001; Vollrath 2003.

23 Vgl. van Randenborgh 2012b.

carum libri quinque von **1657** bzw. in der niederländischen Version dieser Schrift aus dem Jahr **1660**, die den Titel *Mathematische Oeffeningen* hat.[24]

In die Wissenschaftsgeschichte ist van Schooten allerdings vor allem wegen seiner lateinischen Übersetzungen und anschließenden Kommentierung der *Géométrie* von Descartes (1637) eingegangen.[25] Seine kommentierten Übersetzungen (*Geometria* 1649; zweite erweiterte Auflage in zwei Bänden 1659–1661 und erneut 1683 und noch einmal 1695) waren wesentlich bekannter als das französische Original.[26] Sie trugen entscheidend zur Verbreitung der »cartesischen Sichtweise« bei, wie sie in der *Géométrie* beschrieben wird. Daher wurde van Schooten von van Maanen sogar als „the great propagator of Cartesian mathematics"[27] bezeichnet. Persönlich lernte van Schooten Descartes vermutlich im Jahr 1635 kennen.[28] Außer den Kommentaren sind in den lateinischen Ausgaben auch noch die Forschungsergebnisse von van Schooten-Schülern enthalten, deren berühmtester Schüler wohl Christiaan Huygens (1629–1695) war.

Frans van Schooten (1615–1660) lehrte Mathematik an der Ingenieurschule, die zur Universität Leiden gehörte und im Jahre 1600 gegründet wurde. Dort wurde zunächst sein Vater Frans van Schooten der Ältere (1581?–1645) der Nachfolger von Ludolph van Ceulen (1540–1610). Von 1610 bis zu ihrer Schließung 1679 wurde an der Ingenieurschule Mathematik von den van Schootens unterrichtet. Denn nach dem Tod von Frans van Schooten Jr. 1660 folgte noch sein Bruder Pieter van Schooten (1634–1679).

Abbildung 1.2 ist die Originalabbildung von van Schooten aus seinem Werk von 1646.[29]

Bemerkenswert ist, dass außer dem Gerät selbst noch zwei Hände, die erzeugte Parabel und einige Hilfslinien eingezeichnet sind. Die Hände[30] machen deutlich, an welcher Stelle das Gerät zu halten ist und wo es zu bewegen ist. Mit Hilfe dieser Art der Darstellung ist es wesentlich leichter, sich die Bewegung des Geräts vorzustellen.

> „The figures from van Schooten's work (1657) include drawings of human hands manipulating the devices. On paper, this is as close as possible to physicality."[31]

---

24 Diese Schrift von 1646 enthält – anders als Weigand 1997, S. 14 es darstellt – die Abbildungen der Zeichengeräte und nicht etwa die von ihm kommentierte und übersetzte lateinische Ausgabe der *Géométrie* von Descartes aus dem Jahre 1649.

25 Zur Würdigung von van Schooten siehe auch van Randenborgh 2012c

26 Vgl. van Maanen 1992. Zur Wirkungsgeschichte siehe Scriba/Schreiber 2010, S. 331ff.

27 Van Maanen 1992, S. 225. Zu dieser Einschätzung siehe auch Hofmann 1962, S. 1 und Becker/Hofmann 1951, S. 179.

28 So auch Hofmann 1962, S. 1 und van Maanen 1987, S. 37. Vgl. hierzu und zu weiteren biographischen Begebenheiten auch Becker/Hofmann 1951, S. 179f.

29 Van Schooten 1646, S. 74.

30 Allerdings sind beide Hände rechte Hände. Eventuell deutet das darauf hin, dass zur Nutzung des Parabelzirkels zwei Personen optimal sind. So könnte die eine Person den Parabelzirkel festhalten und die andere diesen bewegen.

31 Dennis 1995, S. 40. Bei dem angegebenen Werk von 1657 handelt es sich um den Wiederabdruck von 1646 (s.o.).

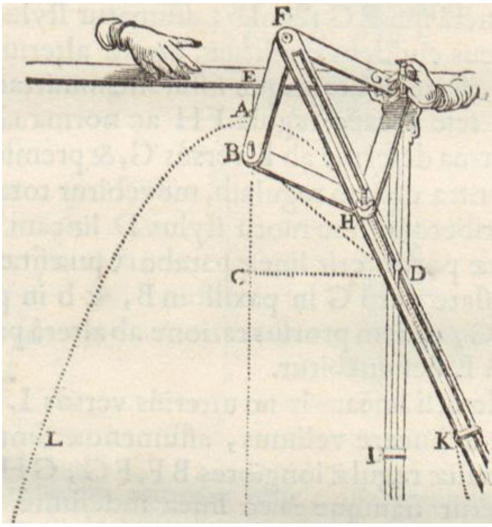

Abb. 1.2 van Schooten, De organica conicarum, Leiden 1646, S. 74: Parabelzirkel

Es ist deutlich erkennbar, dass es bei B und G eine Fixierung gibt. Gut ersichtlich ist auch, dass bei H eine Flügelmutter benutzt wurde und die Schienen FK und GI geschlitzt sind. Die – mechanisch gesehen – schwierige und bei Bewegungen anfällige Befestigung ist bei G erkennbar. Dort scheint es eine kunstvolle breitere Einfassung als orthogonale Befestigung der Schiene GI an die Schiene GE zu geben. Die technisch besonders schwierige Befestigung des Stiftes an D ist aber nicht besonders gestaltet.

Von der eingezeichneten Parabel lässt sich aber in einer Bewegung nur ein Parabelast zeichnen und dieser auch nur bis der Zeichenstift die Rautenecke H erreicht. Das Parabelstück von H bis A lässt sich nur nach einem entsprechenden Umbau zeichnen.

Warum ist in der Abbildung mehr zu sehen als nur das Gerät, oder anders gefragt: Was wird durch die zusätzlichen Einzeichnungen deutlich? Wir denken, dass auf Grund dieser Art der Abbildung besonders die Einsatzidee, die mechanische Idee und die mathematische Idee des Parabelzirkels deutlich hervortreten.

Die Ideen sollen nun exemplarisch anhand eigener Nachbauten des Parabelzirkels aufgezeigt werden.[32]

Betrachten wir dazu den Holznachbau (Foto und Bezeichnungen siehe Abbildung 1.3).

Die ***Einsatzidee des Parabelzirkels*** ist das Zeichnen von Parabeln (Punkt P = Stift). Der Parabelzirkel zeichnet eine bestimmte Parabel. Erst wenn Veränderungen vorgenommen werden, können weitere Parabeln gezeichnet werden. Dieses gelingt, wenn entweder der Punkt F (= Brennpunkt) oder die Schiene Ls (= Leitlinie) oder beide in ihrer Lage zueinander verändert werden. Der wesentliche Zweck oder das Verwendungsziel dieses Geräts ist also das Zeichnen von Parabeln.

[32] Vgl. auch van Randenborgh 2012a.

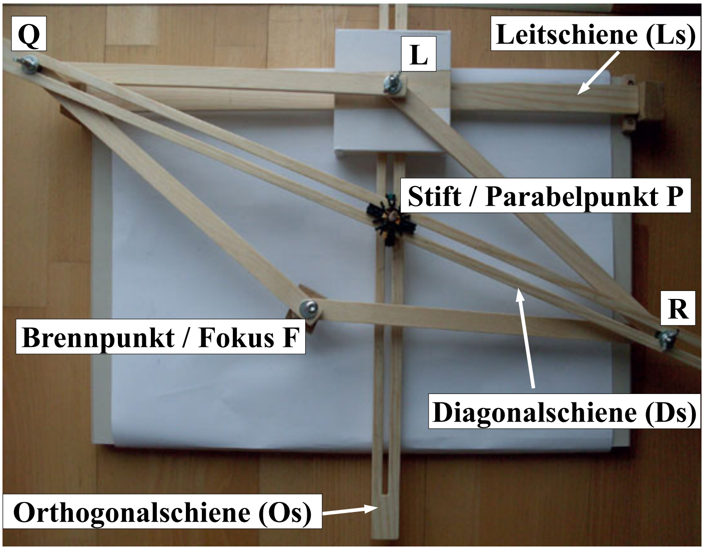

Abb. 1.3 Parabelzirkel, Holznachbau und Foto: Christian van Randenborgh 2010

An dem Holznachbau wird ersichtlich, dass die wesentliche ***mechanische Idee*** des Parabelzirkels die *Gelenkraute* (FRLQ) ist. Die mathematischen Eigenschaften dieser Raute spielen – wie wir noch sehen werden – eine entscheidende Rolle.

Beim Parabelzirkel kann man die ***mathematische Idee*** in der Bau- und in der Funktionsweise wiederfinden. So ist für die *Bauweise* fundamental, dass die Diagonalschiene die Mittelsenkrechte zur Strecke [FL] ist. Bezogen auf die *Funktionsweise* ist die mathematische Idee die geometrische Definition der Parabel – beim Nachbau sichtbar als Abstandsgleichheit von [PF] und [PL].

Die ***didaktische Idee*** wird später noch ausführlicher erörtert werden.[33] Zunächst sei nur darauf hingewiesen, dass beim Parabelzirkel das wechselseitige Zusammenspiel zwischen Bau- und Funktionsweise und der Bezug zwischen mechanischer und mathematischer Idee vor allem in der Aufdeckung der Rolle der Raute und der Diagonalschiene liegt. Um die Entdeckung dieser Zusammenhänge wird es beim Einsatz des Parabelzirkels im Unterricht gehen.

Bei einem entsprechenden Einsatz im Unterricht entsteht bei den Schülern eine ***Nutzungsidee***, wie man mit dem Parabelzirkel zeichnen und wofür man ihn benutzen kann. Eine genauere Herausarbeitung dieser Idee erfolgt im Zuge einer empirischen Untersuchung (siehe Kapitel 3 (S. 85ff.)).

Im 17. Jahrhundert ist ein wachsendes Interesse an neuen Instrumenten zu erkennen (s.u. S. 22ff.). Auch in der *Géométrie* DESCARTES kommen Zeichengeräte vor.[34] Der Parabelzirkel ist weder eine zufällige Entdeckung noch ist er aus dem praktischen Interesse des Zeichnens von Parabeln entstanden. Vielmehr stand das theoretische Interesse an der

33 Siehe z.B. S. 99ff., S. 151ff., S. 169., S. 179ff., S. 196ff.

34 So z.B. *Géométrie* 1637, S. 318.

Erkenntnis von Eigenschaften geometrischer Objekte – wie der Parabel – im Vordergrund (s.u. S. 26f.).

Darüber hinaus ist der Parabelzirkel nicht das einzige Zeichengerät, das VAN SCHOOTEN präsentiert.[35]

All dieses spricht dafür, dass der Parabelzirkel auch ein bestimmtes Interesse an Mathematik und einen bestimmten Blick auf die Geometrie verkörpert, kurz: eine ***kulturell-historische Idee*** in sich trägt.

1.2.2 Der Pantograph von SCHEINER als Ideenkonglomerat

Pantographen werden zu Beginn des 17. Jahrhunderts zum ersten Mal erwähnt, der genaue Ursprung dieser Geräte lässt sich aber nicht vollständig rekonstruieren. Bei späteren Bezugnahmen auf Pantographen wurde oft SCHEINER als Entdecker angegeben.[36] Als Erfindungsjahr wird dann das von SCHEINER selbst in seiner Veröffentlichung (1631) genannte Jahr 1603 angegeben.[37] Dieses mag auch der Grund dafür sein, dass die beiden früheren Werke über Pantographen dann nicht als ursprünglicher angesehen wurden.[38]

SCHEINERS Buchtitel lautet:

Pantographice, seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile; libellis duobus explicata, & demonstrationibus geometricis illustrata: quorum prior epipedographicen, sive planorum, posterior stereographicen, seu solidorum aspectabilium vivam imitationem atque proiectionem edocet.

Abb. 1.4 Scheiner, Pantographice, Rom 1631, Titelblatt

Bereits hier wird eine ***zweifache Verwendungsmöglichkeit*** des Pantographen genannt:

1. Er spricht einerseits von „*prior* ***epipedographicen****, sive planorum*". Dieses ist der Einsatz des Pantographen, der hier thematisiert werden wird.
2. Weiter heißt es in dem Titel: „*posterior* ***stereographicen****, seu solidorum aspectabilium vivam imitationem atque proiectionem edocet*". Damit ist der Einsatz des Geräts als ein *Perspektograph* gemeint.[39]

[35] Auch die anderen Kegelschnitte werden in van Schooten (1646) mit Zeichengeräten erzeugt.

[36] So z.B. in Lexika, wie Brockhaus' Kleines Konversations-Lexikon 1911, Bd. II, S. 347 (siehe: www.zeno.org/Brockhaus-1911/A/Pantograph?hl=pantograph). Vgl. auch Goebel et al. 2003, S. 9.

[37] Scheiner 1631, S. 4.

[38] Bramer 1617 und Schwenter 1617/18. Zu beiden s.u. S. 42f und S. 44f.

[39] Zu dem Begriff „Perspektograph" und zu didaktischen Erfahrungen damit siehe Bartolini Bussi 2000, S. 346ff.

Beide Einsatzmöglichkeiten werden auch auf dem Titelblatt (siehe Abbildung 1.4) dargestellt. Für die erste benötigt man einen Zeichentisch, und für die zweite Verwendung wird eine Zeichenleinwand auf einem Stativ gebraucht (siehe Titelbild unten in der Mitte).

Den Anstoß zur Entwicklung eines derartigen Geräts hat SCHEINER nach eigenen Angaben durch eine Begegnung mit dem Maler GREGORIUS erhalten.[40] Dieser soll behauptet haben, ein derartiges Gerät zu haben, wollte es SCHEINER jedoch nicht zeigen. Damit war die Neugier von SCHEINER geweckt, der nun *seinen* Pantographen entwickelte.[41]

Eine Abbildung seines Zeichengeräts wird in dieser Schrift gegeben (siehe Abbildung 1.5).

Auch hier werden – wie bei VAN SCHOOTENS Parabelzirkel – außer dem Gerät selbst, eine damit durchgeführte Zeichnung und Hilfslinien abgebildet. Allerdings sind die erforderliche Fixierung des Geräts und die durchzuführenden Bewegungen bzw. die Möglichkeiten, wo man das Gerät anfassen und bewegen kann, hier nicht erkennbar.

Dennoch wird mehr als das bloße Zeichengerät dargestellt, und damit werden wiederum die Einsatzidee, die mechanische Idee und die mathematische Idee des Pantographen deutlich.

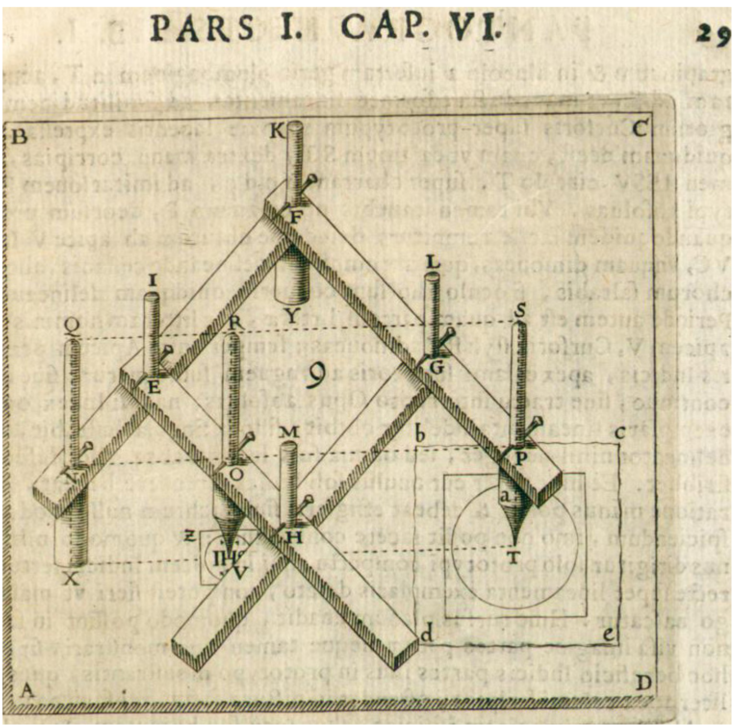

Abb. 1.5 Scheiner, Pantographice, Rom 1631, S. 29: Pantograph

[40] Siehe Scheiner 1631, S. 3ff. Bei dem dort erwähnten Maler Gregorius handelt es sich vermutlich um Gregorius Sickinger (1558–1631).

[41] Dieser Anspruch wird von ihm durch den doppelten, griechischen Ausruf Heureka (siehe Scheiner 1631, S. 5) unterstrichen.

Die Ideen sollen nun anhand der folgenden Holz-Pantographen (Fotos und Bezeichnungen siehe Abbildungen 1.6 und 1.7) kurz aufgezeigt werden.

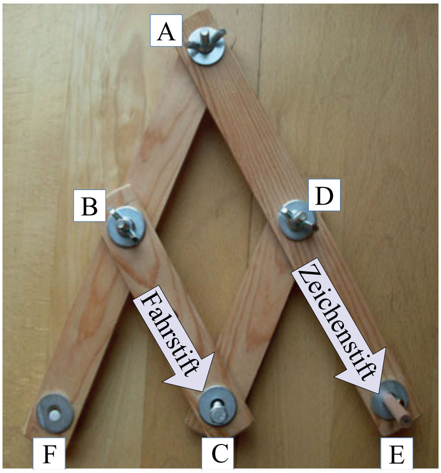

Abb. 1.6 Eigener Pantograph (Foto: van Randenborgh)

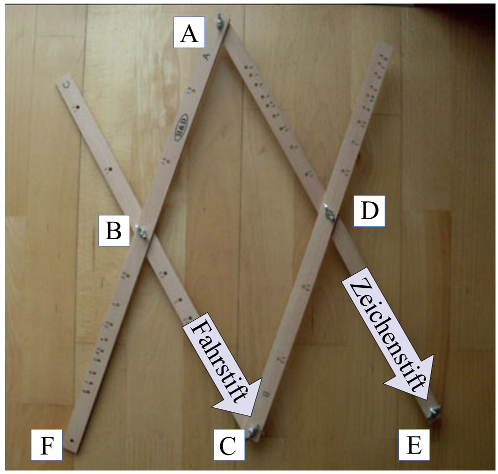

Abb. 1.7 Pantograph der Firma H&D (Foto: van Randenborgh)

Die ***Einsatzidee*** des Pantographen ist das Zeichnen einer Kopie bzw. das Herstellen einer Verkleinerung oder Vergrößerung eines Originals. Da das Ausgangsbild weitgehend beliebig ist, wurde der Name *Pantograph* gewählt. Das Wort setzt sich aus den beiden griechischen Worten παν und γραφϖ zusammen. Das erste bedeutet »alles, alles mögliche« und das zweite heißt »zeichnen, etwas beschreiben im Sinne von konstruieren, schreiben«. Es ist also ein *Alleszeichner*.[42]

Ist der Punkt F (Pol) am Zeichentisch fixiert, kann man den Pantographen am Fahrstift C anfassen und bewegen (z.B. entlang eines vorgegebenen Originalbildes). Der Zeichenstift E zeichnet dann – je nach Einstellung – die gewünschte Abbildung. Die entsprechende Einstellung wird über das Parallelogramm ABCD gesteuert. Es lässt sich bei B und D „umschrauben".

Am Holznachbau wird erkennbar, dass die wesentliche ***mechanische Idee*** des Pantographen das *Gelenkparallelogramm* (ABCD) ist.

Auch beim Pantographen kann man in der Bau- und in der Funktionsweise die ***mathematische Idee*** wiederfinden. Für die *Bauweise* ist entscheidend, dass das Viereck ABCD immer ein Parallelogramm ist. Darüber hinaus ist wichtig, dass F, C, E immer auf einer Geraden liegen.

Mit Blick auf die ***didaktische Idee*** kommt es auch beim Pantographen auf das wechselseitige Zusammenspiel zwischen Bau- und Funktionsweise an. Zentral sind hier die Beziehung zwischen mechanischer und mathematischer Idee und insbesondere das Aufdecken der Funktion des Parallelogramms sowie die Erkenntnis, dass F, C, E auf einer Geraden liegen. Insbesondere lässt sich das Vergrößerungsverhältnis „in dem Gerät wiederfinden".

[42] Zu weiteren Bezeichnungen, wie z.B. Storchenschnabel, siehe Goebel et al. 2003.

Diese Entdeckungen stehen im Untersuchungszentrum beim Unterrichtseinsatz des Pantographen. So entstehen bei den Schülern ***Nutzungsideen***, was man mit dem Pantographen machen und wie man mit ihm zeichnen kann.

Der Pantograph stammt aus dem 17. Jahrhundert, und schenkt man der von Scheiner berichteten Motivation für die Erfindung seines Pantographen Glauben, dann ist dieses Zeichengerät zunächst aus Neugier am praktischen Einsatz entstanden. Sein Buch ist allerdings ein Lehrbuch, das insbesondere die mathematischen Grundlagen thematisiert. Daher steht dann auch bei Scheiner das theoretische Interesse im Vordergrund.

Die weitere Entwicklung (s.u. S. 42ff.) zeigt, dass Pantographen – anders als der Parabelzirkel – bis auf den heutigen Tag[43] gebaut werden und ein großes Spektrum an praktischen Einsatzmöglichkeiten erfahren haben. Der Pantograph trägt damit eine ***kulturell-historische Idee*** in sich.

Nachdem nun die Kriterien dafür benannt und an Beispielen erläutert wurden, die ein mathematisches Instrument zu einem Zeichengerät machen, soll nun umgekehrt gefragt werden, wie aus einem Instrument, das zum Zeichnen genutzt wird, ein mathematisches Instrument entsteht.

1.3 Wann ist ein Instrument, das zum Zeichnen genutzt werden kann, ein mathematisches Instrument?

Ein Zeicheninstrument zu benutzen, bedeutet nicht zwangsläufig, es als *mathematisches Instrument* zu betrachten. Denkbar ist durchaus, dass jemand ein Zeicheninstrument, wie etwa den Zirkel, benutzt, um damit (geometrische) Figuren, wie Kreise, z.B. als Ornamente herzustellen. Dieser künstlerische Gebrauch setzt nicht voraus, dass die mathematische Idee, also die geometrische Definition (Ortslinie) des Kreises[44], bekannt ist, und auch der Bezug zur Kreisgleichung ist nicht unmittelbar gegeben.[45] Entscheidend ist vielmehr, dass die *mathematische Idee* des Instruments beim Zeichnen eine Rolle spielt.

Für einen (rein) praktischen bzw. künstlerischen Gebrauch genügt es vermutlich, dass die mit dem Gerät erzeugte Figur augenscheinlich so aussieht wie z.B. ein Kreis. Bei einer mathematischen Betrachtung ist aber das *theoretische Interesse leitend*. Das Zeicheninstrument muss so konstruiert und gebaut sein, dass es *theoretisch* eine exakte Lösung liefert. Damit ist die mathematische Idee eine Art Leitidee für die mechanische Idee.

Dieses theoretische Interesse lässt sich in der Mathematikgeschichte immer wieder nachweisen. Hierzu ist die Analyse von zwei wichtigen Stationen in der Geschichte der Geometrie und ihrer Zeicheninstrumente wichtig. Diese sind eng mit den Namen Euklid und Descartes bzw. ihren Werken „Die Elemente" (Στοιχεῖα) und „Die Geometrie" (*La Géométrie*) verbunden.

[43] Siehe z.B.: www.gravograph.com.

[44] Ein Kreis verstanden als Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt (=Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben.

[45] Vgl. auch Bartolini Bussi/Mariotti 2008, S. 748.

1.4 Die zwei wichtigsten Stationen von Zeicheninstrumenten in der Mathematikgeschichte

Betrachtet man die Anzahl der in der Geometrie verwandten Kurven, so muss man Bartolini Bussi zustimmen, die die Meinung vertritt, dass es in der Zeit von Euklid bis ins 17. Jahrhundert keinen wesentlichen Zuwachs an neuen Kurvenarten gab.

> „The situation remained the same until the 17th century, when the group was vastly expanded and new methods of either generating or describing the known curves were added to the old ones.“[46]

Daher kann man für Zeicheninstrumente als markanten Einschnitt das 17. Jahrhundert betrachten. In der Zeit davor ist besonders die Antike, verkörpert durch Euklid, interessant. Im 17. Jahrhundert beginnt eine neue Entwicklung, die durch Descartes verkörpert wird. Diese setzt sich im 18. Jahrhundert fort, bis es dann im 19. Jahrhundert eine wichtige Weiterentwicklung gibt (s.u. S. 34ff.).[47]

1.4.1 Zeichengeräte in der Antike

1.4.1.1 Euklids Elemente

Spätestens seit Euklid (ca. 300 v. Chr.) haben Zirkel und Lineal für die Geometrie eine große Bedeutung.

> „The ruler and the compass are built into the axioms at the foundation of Euclidean geometry. Euclidean geometry can be defined as the science of ruler-and-compass constructions."[48]

Zwar wird in Euklids Elementen davon gesprochen, dass man einen Kreis zeichne (κύκλος γεγράφθω),[49] *wie* man einen Kreis zeichnet, wird von Euklid aber nicht thematisiert. Betrachtet man die ersten drei Postulate, so kann man sagen, dass diese so formuliert sind, dass Zirkel und Lineal als die (einzigen) in der Geometrie zulässigen Zeicheninstrumente implizit festgelegt werden[50]:

46 Bartolini Bussi 2001, S. 29.

47 Bartolini Bussi (2005) teilt die Geschichte der Kegelschnitte in vier Hauptphasen ein: 1) Griechische Mathematik, 2) 17. Jahrhundert, 3) 18. und 19. Jahrhundert, 4) 20. Jahrhundert. Siehe Bartolini Bussi 2005, S. 40f.

48 Davis/Hersh 1981, 13.

49 So z.B. Buch I, §2 (A.2).

50 Zu dieser Interpretation vgl. auch Bartolini Bussi 1998, S. 738. Vgl. auch Artmann 1999.

„Αἰτήματα ε΄.	Postulate (5).
α΄ [1]. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	(1) Ich fordere, von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie zu führen,
β΄ [2]. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.	(2) und eine begrenzte gerade Linie entlang der Verbindung gerade zu verlängern,
γ΄ [3]. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.“[51]	(3) und einen Kreis mit jedem Mittelpunkt und Radius zu zeichnen. [52]

Die ersten beiden Postulate lassen sich mit einem Lineal durchführen. Jedoch schließt seine Formulierung „von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie“ zeichnen zu können, Fälle ein, die jenseits der praktischen Durchführung liegen. Denn es ist durchaus so zu verstehen, dass man dieses – theoretisch – auch bei Punkten durchführen kann, die sehr weit, d.h. – praktisch – unerreichbar für ein reales Lineal, auseinander liegen. Entsprechend ist auch das 3. Postulat zu interpretieren. „Einen Kreis zu jedem Mittelpunkt und Radius“ zeichnen zu können, schließt ebenso Fälle ein, bei denen der Radius so groß ist, dass es keinen realen Zirkel gibt, mit dem man einen entsprechenden Kreis – praktisch – zeichnen kann. Die theoretische Möglichkeit ist somit bei Euklid das Entscheidende!

Es wird auch an keiner Stelle von Euklid gesagt, wo und wie man einen Zirkel benutzen soll oder welche praktischen Einsatzmöglichkeiten es gibt. Der Einsatz von Zeicheninstrumenten wird von Euklid – auch bei seinen vielen Konstruktionsbeschreibungen – niemals direkt beschrieben. Erst recht gibt es keine Beschreibung von Näherungslösungen durch einen Instrumenteneinsatz, die vielleicht für die Bewältigung in der Praxis ausreichend wären. Das *Interesse Euklids ist rein theoretisch*.[53] Die mathematische Idee des Zirkels ist das Kriterium für den zumindest theoretisch denkbaren Einsatz bei Euklid.[54] Man könnte auch sagen, dass der Zirkel das Instrument ist, mit dem das geometrische Objekt Kreis sichtbar und die geometrische Definition[55] des Kreises zugänglich wird. Ob Euklid noch andere Zeichengeräte kannte, lässt sich allerdings nicht mit Sicherheit beantworten.[56]

---

51 Quelle: http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/book1/elements1.html#a.

52 Eigene Übersetzung.

53 So auch Bartolini Bussi 2001, S. 29.

54 Vgl. auch die Argumentation bei Bartolini Bussi 2001, S. 28f; Bartolini Bussi 1998, S. 738.

55 Gemeint ist der Kreis als Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben.

56 Kegelschnitte kannte Euklid sicherlich. So hat er ein Buch mit den Titel Konika verfasst, das jedoch verschwunden ist (vgl. Becker/Hoffman 1951, S. 69). Bartolini Bussi 2001, S. 29 behauptet, dass andere Zeicheninstrumente zur Zeit des Euklid bekannt gewesen seien und nennt die Konchoide des Nikomedes. Dieses kann aber so nicht stimmen, da Nikomedes (um 180 v. Chr.) deutlich nach Euklid (um 300 v. Chr.) lebte.