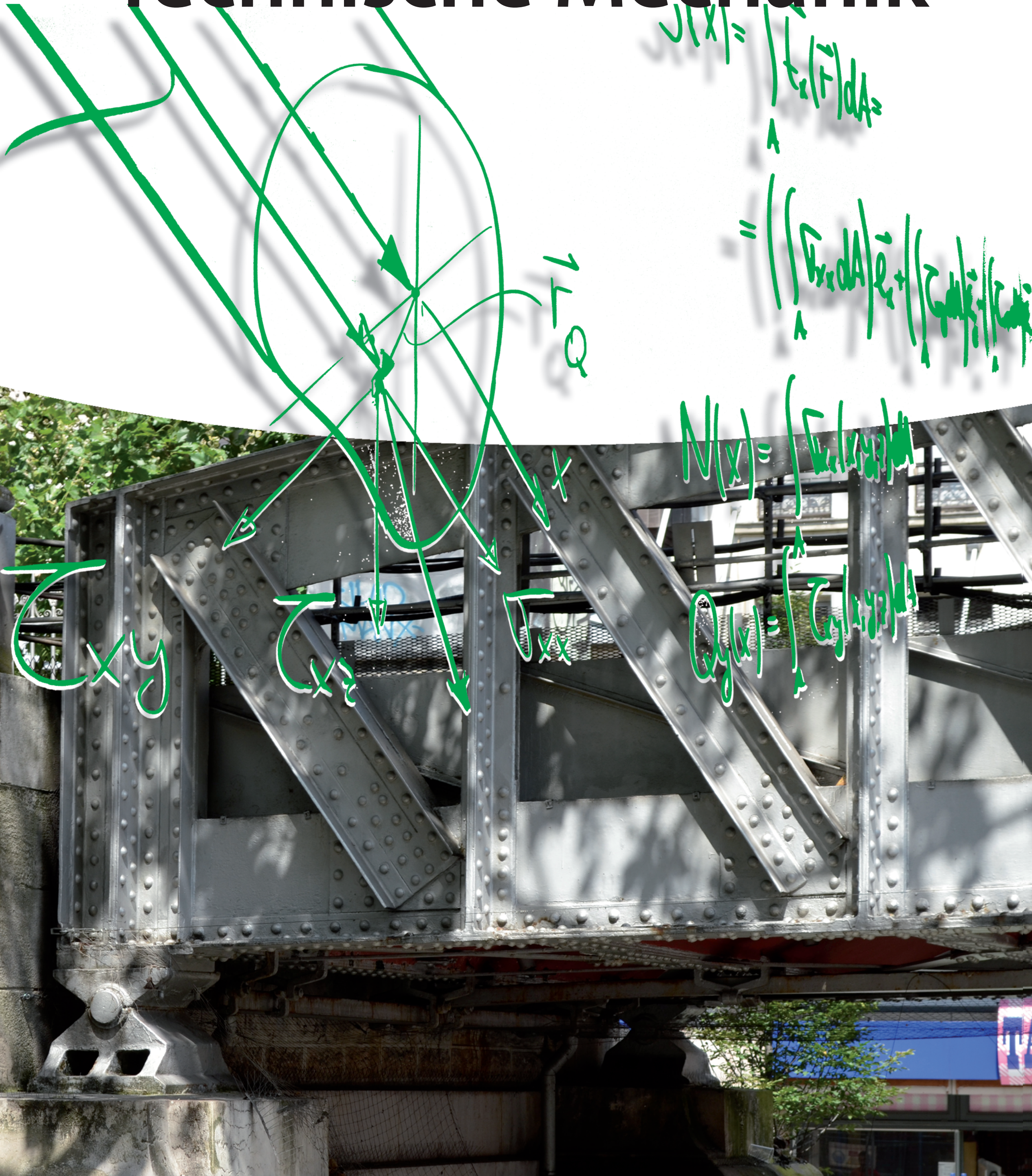
WILEY-VCH

Stefan Hartmann

Technische Mechanik



Stefan Hartmann

Technische Mechanik

Beachten Sie bitte auch weitere interessante Titel zu diesem Thema

Oettel, H., Schumann, H. (Hrsg.)

Metallografie
Mit einer Einführung in die Keramografie, 15. Auflage

2011
Print ISBN: 978-3-527-32257-2

Worch, H., Pompe, W., Schatt, W. (Hrsg.)

Werkstoffwissenschaft
10. Auflage

2011
Print ISBN: 978-3-527-32323-4

Callister, W.D., Rethwisch, D.G.

Materialwissenschaften und Werkstofftechnik
Eine Einführung

2012
Print ISBN: 978-3-527-33007-2

Fischer, K., Günther, W.

Technische Mechanik
2. Auflage

2013
Print ISBN: 978-3-527-33381-3; auch in elektronischen Formaten verfügbar

Helm, D.

Einführung in die Kontinuumsmechanik

2014
Print ISBN: 978-3-527-33597-8

de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J., Verhoosel, C.V.

Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von Festkörpern und Strukturen

2014
Print ISBN: 978-3-527-33660-9; auch in elektronischen Formaten verfügbar

Hartmann, S.

Technische Mechanik Prüfungstrainer

2014
Print ISBN: 978-3-527-33700-2; auch in elektronischen Formaten verfügbar

Stefan Hartmann

Technische Mechanik

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autor

Stefan Hartmann
TU Clausthal
Festkörpermechanik
Adolph-Roemer-Str. 2a
38678 Clausthal-Zellerfeld
Germany

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlaggestaltung Adam Design, Weinheim
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland
Druck und Bindung Markono Print Media Pte Ltd, Singapore

Print ISBN 978-3-527-33699-9
ePDF ISBN 978-3-527-68162-4
ePub ISBN 978-3-527-68167-9
Mobi ISBN 978-3-527-68166-2

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Beschreibung der Einflüsse von Kräften auf technische Strukturen bzw. dem *Fluss* der Kräfte durch ein Bauteil sowie dessen Deformation tritt in allen Bereichen der Ingenieurwissenschaften auf. Dies betrifft nicht nur das mit seiner Vielzahl an Bauwerken geprägte Bauingenieurwesen oder den Maschinenbau und den darin zu konstruierenden Bauteilen, sondern insbesondere auch die Luft- und Raumfahrttechnik, die Verfahrenstechnik, die Mechatronik, die Werkstofftechnik, die Materialwissenschaften sowie viele weitere kleinere Studiengänge. Jeder Student sowie der später im Berufsleben tätige Ingenieur ist mit der Technischen Mechanik mehr oder weniger konfrontiert. Auch wenn es manchmal lediglich die Berechnung der *mechanischen* Spannung in einer Zugprobe ist. Auf die Mechanik, welche von Studenten schon immer als das Fach mit den höchsten Ansprüchen im Grundstudium (neben der Mathematik) angesehen wird, greifen die Konstruktionstechnik, die Regelungstechnik, die Betriebsfestigkeit, die Werkstofftechnik, die Behandlung tribologischer Systeme (Lager), die Baustatik, der Stahl- und Holzbau, der Stahl- und Spannbetonbau, und eine Reihe weiterer Fächer zurück. Unterschwellig lernt man zudem die Fähigkeit zur Problemlösung. Die Technische Mechanik Ausbildung ist daher kein Selbstzweck, sondern wesentliche Voraussetzung für das weitere Studium, auch wenn schon immer suggeriert wurde, dass man mit erheblich weniger Kenntnissen auskommt.

Ziel des Buches ist es daher die Technische Mechanik grundlegend zu vermitteln, wobei damit offensichtlich nicht dem heutigen Trend der Vermittlung oberflächlichen Wissens, sondern insbesondere der Aufarbeitung fundierter Kenntnisse gefolgt wird. Die Didaktik zur Vermittlung dieses Wissens könnte entweder deduktiv erfolgen, d. h. man würde von den allgemeinen Naturgesetzen ausgehen und mit einer erforderlichen mathematischen Tiefe die Theorie der Technischen Mechanik vorstellen. Da üblicherweise hierzu die mathematische Sprache in den ersten Semestern des Ingenieurstudiums fehlt, ist die klassische Dreiteilung der Technischen Mechanik in die Gebiete *Statik*, *Elastostatik* und *Dynamik* gewählt worden. In diesem Sinne grenzt sich das Buch nicht von den klassischen Lehrbüchern ab. Der Verfasser hat jedoch auf einige Themen einen größeren Wert gelegt, wie zum Beispiel eine konsistent eingeführte Vektorrechnung, die allgemeine Bestimmung der Hauptspannungen, zweiachsige Biegung sowie eine konsequente Herleitung der Schubspannungsverteilung bei Balken, um nur einige Themen zu nennen. Auch wird ein spezieller Wert auf den Bezug zu experimentellen Beobachtungen gelegt. Für vereinzelte Beispiele sind daher Laborexperimente herangezogen worden, um zu verdeutlichen, dass die doch eher theoretischen Betrachtungen mit den Beobachtungen etwas zu tun haben und die hergeleiteten Formeln zur Prognose praktischer Anwendungen geeignet sind.

Das Buch wird auch nicht in drei einzelne Bücher zerlegt, sondern es beschränkt sich auf die Darstellung der drei Teilgebiete der Technischen Mechanik in einem kompakten Werk. Je nach Umfang einer Vorlesung kann man sich die erforderlichen Abschnitte in den einzelnen Teilen des Buches heraussuchen und nacharbeiten.

Im Folgenden seien einige Anmerkungen an die Lernenden gerichtet: Es gibt mehrere Stufen des Lernens. Zunächst geht es in jeder Vorlesung um das Aneignen von *Wissen*, welches wiedergegeben werden muss. Diese Fähigkeit reicht jedoch nicht für eine Lehrveranstaltung wie die der Technischen Mechanik aus. Darüber hinaus müssen die Lernenden *Verständnis* entwickeln und die Sachverhalte selbständig erklären und interpretieren können (dies kann sehr gut mit einer Kommilitonin oder einem Kommilitonen geübt werden).

Wenn man diese Stufe erreicht hat, sollten die gewonnenen Vorgehensweisen und Konzepte *angewendet* werden, indem man Aufgaben selbständig berechnet und löst. Nach dieser dritten Lernstufe müssen die Ergebnisse *analysiert* oder verglichen werden, d. h. die in den Gleichungen auftretenden „Buchstaben" sowie die Gleichungen selbst müssen erläutert werden. Es treffen daher zwei Probleme in der Mechanik aufeinander: Einerseits die Verwendung der Mathematik als Sprache und andererseits die Problemstellung der Physik, die es zu beschreiben gilt. Dabei ist bekannt, dass meist die mangelnden Kenntnisse der Mathematik die eigentlichen Ursachen von entstehenden Lernproblemen darstellen. Hierzu wird probiert die Grundlagen auf sehr engem Raum bereitzustellen. Darauf aufbauend kommt in der *Synthese* die Fähigkeit selbst zu entwerfen und zu entwickeln hinzu (d. h. hier Aufgaben und Fragen für mechanische Probleme). Die sechste und letzte Lernetappe stellt die *Bewertung* dar, in der man entscheiden, bewerten und beurteilen lernt. Ein Ziel des Studierenden muss es daher sein, möglichst die „höchste" Stufe der Ausbildung zu erreichen. Zumeist glaubt man im Bereich der Technischen Mechanik, dass die Lernetappe *Wissen wiederzugeben* ausreichend ist. Dies ist leider nicht der Fall. Wünschenswert ist es mindestens Ergebnisse analysieren zu können.

Die Technische Mechanik ist keine Vorlesung in der man alles auswendig lernen kann. Es werden Konzepte an die Hand gegeben, mit denen man viele grundlegende Fragestellungen lösen kann. Auch ist der Übergang von der Schule an eine Universität zu berücksichtigen, d. h. das Begreifen des Stoffes während der Vorlesung ist nicht immer für jeden möglich. Man muss sich also den Stoff aneignen und erarbeiten, was als *Studium* bezeichnet wird. Aus eigener Erfahrung kann ich sagen, dass Lernen auch schmerzen kann. Es fällt nur den Allerwenigsten zu, dass dies einfach ist. Dem Leser wird daher empfohlen das Angebot aufzugreifen, sich die Theorie in diesem Buch und der darin zitierten Literatur zu erarbeiten.

Das in diesem Lehrbuch aufbereitete Wissen entstammt dem Werdegang des Verfassers, welcher einerseits durch ein praxisorientiertes Bauingenieurstudium sowie einer vertiefenden Lehre seines Lehrers und Freundes Professor Peter Haupt geschuldet ist. Diesbezüglich sind die Kenntnisse durch die Lehrjahre an der Universität Kassel und der Technischen Universität Clausthal geprägt.

Bei der Entstehung eines jeden Buches wirken unterschiedliche Personen mit. Zunächst sei dem Verlag für das Interesse an dem Buch sowie der Unterstützung während des Produktionsprozesses Dank ausgesprochen. Unterstützt haben mich zudem meine Töchter und meine Frau beim Korrekturlesen, wobei meine Familie viel Entbehrung beim Entstehen des Werkes auf sich genommen hat. Ihnen sei besonders gedankt.

Clausthal-Zellerfeld, 28. Februar 2014 *Stefan Hartmann*

Einführung

Die *Mechanik* ist ein Teilgebiet der Physik, bei der die Beschreibung der Bewegung und Deformation von gasförmigen, flüssigen und festen Körpern unter äußeren Einwirkungen im Vordergrund steht. Die Spezialisierung auf technische Systeme und feste Körper beschreibt die *Technische Mechanik*. In traditionellen Darstellungen an deutschen Hochschulen, denen wir uns hier anschließen wollen, unterscheidet man drei Teile der Technischen Mechanik, d. h. die *Statik*, die *Elastostatik* und die *Dynamik*. Darüber hinaus werden im weiteren Studium noch die Spezialgebiete der *Schwingungslehre*, der *Strömungsmechanik*, der *Höheren Technischen Mechanik*, der *Elastizitätstheorie*, der *Strukturmechanik*, der *Kontinuumsmechanik* und der *Experimentellen Mechanik* gelehrt, auf die immer wieder hingewiesen wird.

In der *Statik starrer Körper*, d. h. Teil I des Buches, welche man theoretisch als Spezialfall der Dynamik betrachten sollte, werden die Grundlagen der Begriffsbildung von Kräften eingeführt und dies an Beispielen von Kraftsystemen einfachster Strukturelemente, sogenannter Zug-Druckstäbe, Balken oder Seile, sowie der Haftreibung von sich nicht bewegenden materiellen Körpern erläutert. Neben den aus der physikalischen Beschreibung resultierenden Begriffen, benötigen wir die Mathematik als Sprache zur Quantifizierung.

Da eine Kraft eine Intensität und eine Richtung aufweist, ist die mathematische Sprache die Vektorrechnung (Kapitel 1). Die Voraussetzung der Kenntnis dieser mathematischen Disziplin ist sehr unterschiedlich erfüllt, wozu sie bewusst in die Darstellung mit eingebunden wird. Die Vektorrechnung wird das Buch kontinuierlich begleiten. Daher sollte man sich intensivst damit beschäftigen. Es hat sich herausgestellt, dass die Schwierigkeit der Technischen Mechanik bei den Studierenden gerade in der Unterscheidung zwischen der mathematischen Sprache und den zu beschreibenden physikalischen Vorgängen liegt. Versteht man Ersteres nicht, so wird auch die Beschreibung der Vorgänge nicht verstanden. Neben der Vektorrechnung werden die Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung wiederholt und erweitert. Differenziationsprozesse liefern uns Auskünfte über die Änderung (Steigung) einer physikalischen Größe, welche Aufschlüsse über den Kraftfluss in einem Körper sowie später über die Bewegungs- und Deformationsprozesse geben. Da wir es mit endlich ausgedehnten Körpern zu tun haben, müssen wir auch über räumliche, im einfachsten Fall über ein- oder zweidimensionale Gebiete, integrieren. Auch dies muss sich der Leser erarbeiten.

Technische Mechanik, Erste Auflage. Stefan Hartmann.

In der Statik starrer Körper gehen wir zunächst davon aus, dass sich Körper weder bewegen noch deformieren können, d. h. es werden lediglich die Grundgedanken der Krafteinwirkung auf starre Körper angesprochen. Alle auf den materiellen Körper einwirkenden Kräfte bilden ein Kraftsystem (Kapitel 2), welches durch eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment charakterisiert ist. Ein Gleichgewicht im Sinne der Statik liegt nur vor, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment verschwinden, eine der vordringlichen Aussagen, die Teil I und II durchgehend begleiten. Eine wesentliche Idealisierung stellen Kräfte dar, die aus verteilten Lasten resultieren. Diese können linien-, flächen- oder volumenhaft vorliegen. Damit verbunden ist die Integration, um die resultierende Kraft und auch das resultierende Moment zu bestimmen.

Um die Integration zu üben, behandelt Kapitel 3 die erforderlichen Begriffe wie Massenmittelpunkt, Linien-, Flächen- und Volumenschwerpunkt sowie insbesondere Linien- und Flächenlasten.

In Kapitel 4 werden nach diesen vorbereitenden Untersuchungen Strukturelemente, wie Stäbe, Balken und Seile angesprochen und zunächst das wichtigste Grundprinzip erörtert, nämlich das *Freischneiden*. Mit dem Freischneiden werden die inneren Kraftzustände freigelegt, was zu den Begriffen der *Schnittgrößen* führt. Insbesondere für den wichtigen Fall balkenartiger Strukturen dient das Freischneiden zur Charakterisierung des inneren Belastungszustandes und damit zur Dimensionierung des Balkens. Wir wären damit fast in der Lage einen Träger von seinen Abmessungen her auszuwählen, damit er den alltäglichen Belastungen standhält. „Fast in der Lage“ soll hierbei andeuten, dass wir hierzu noch nicht ganz in der Lage sind, da wir die Deformation nicht beschreiben können. Dies wird im zweiten Teil des Buches, der Elastostatik bzw. der Statik elastischer Körper, behandelt. Als Abschluss des ersten Buchteiles dient die Reibung in Form der Haft- und Seilreibung, um den Fall der Statik zu komplettieren.

In Teil II des Buches, der *Statik elastischer Körper*, werden statisch unbestimmte Strukturen behandelt, also solche mechanischen Systeme, bei denen die Gleichgewichtsbedingungen alleine nicht mehr ausreichen, um Abschätzungsformeln bereitzustellen. In Teil I des Buches gehen wir davon aus, dass materielle Körper starr sind, d. h. der Abstand zweier beliebiger materieller Punkte eines Körpers immer konstant ist. Die Deformierbarkeit des Körpers wird dabei nicht modelliert. Zudem ist die Lagerung derart gewählt, dass die Lagerreaktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen berechenbar sind und sich daher die betrachteten materiellen Körper, bzw. Bauteile, in Ruhe befinden.[1] Man kann es auch so formulieren: Der Körper (das Bauteil) deformiert sich bei einer äußeren Belastung nicht und zwar unabhängig von der Größe der Belastung. Unsere tägliche Anschauung von belasteten Strukturen sieht aber anders aus. Wenn man auf einer Baustelle über ein Brett geht, so biegt sich dieses durch. Ein belasteter Autoreifen hat, je nach Einstellung der Lenkung, ein anderes Aussehen. Ein Schwamm, den man zusammendrückt, wird dünner, d. h. alle materiellen Körper deformieren

1) In Abschnitt 11.7 machen wir uns klar, dass sich solche Körper auch mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen könnten. Diese Annahme gilt auch in der Elastostatik.

sich unter einer äußeren Belastung. Die Annahme eines starren Körpers ist daher nur eine sehr grobe Approximation der Beschreibung des wirklichen Verhaltens von Bauteilen. Natürlich ist diese Annahme in vielen Fällen ausreichend. Andererseits erkennen wir auch, dass sich nicht alle Systeme, wie z. B. statisch unbestimmte Strukturen, nur aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen lassen. Zur Berechenbarkeit und auch für die genauere Vorhersage des Bauteilverhaltens ist die Kenntnis über die Deformierbarkeit materieller Körper notwendig. Einerseits nutzen wir das deformierbare Verhalten von Gegenständen aus (Haushaltsgummis, Gummilager bei Brücken oder Maschinen bzw. Fahrzeugen, Metallbleche, die zu Karosserieteilen eines Fahrzeugs geformt werden, etc.) und andererseits darf die Deformation eines Bauteils nicht zu groß sein, damit wir Toleranzen von Bauteilgeometrien oder auch unserem Sicherheitsgefühl Genüge tun (man stelle sich hier eine sich sehr stark durchbiegende Deckenkonstruktion vor, die zwar halten würde, bei der wir jedoch Unbehagen empfinden, wenn die Durchbiegung zu groß ist).

Wenn sich demnach ein Körper deformiert, so besteht die Frage nach der mathematischen Beschreibbarkeit. Es muss ein Zusammenhang zwischen der Belastung (Kraft, Moment, Strecken- oder Flächenlasten, Eigengewicht, …) und der Deformation existieren. Dieser Zusammenhang hängt von den Lagerungsbedingungen, von den Materialeigenschaften (Stahl, Kunststoff, Elastomer, Holz, Beton, etc.) und von der Form bzw. auch der Höhe der Belastung ab.

In der späteren Praxis werden Ingenieure nicht nur mit der Gesamtdeformation konfrontiert, sondern auch mit den inneren Belastungszuständen in Bauteilen. So ändert sich beim Aufbringen einer Belastung der Abstand infinitesimal benachbarter materieller Punkte. Dies ist verbunden mit den Begriffen *Verzerrungen* oder *Dehnungen*, welche von Punkt zu Punkt in einem Bauteil unterschiedlich sein können. Damit verbunden ist auch die Änderung des Kraftzustands, wobei man anstelle von Kräften und Momenten eher den Begriff und die Eigenschaften von (mechanischen) *Spannungen* heranzieht. Die zugehörigen Dimensionen, Einheiten und natürlich insbesondere deren Eigenschaften gilt es zu untersuchen. Zwischen den von außen eingebrachten Kräften und der Deformation muss ein Zusammenhang existieren, der durch die *Materialeigenschaften* gegeben ist.[2] Diesen Zusammenhang gilt es mathematisch zu beschreiben. In der Technischen Mechanik Ausbildung beschränkt man sich zunächst auf einen linearen Zusammenhang, der sogenannten linearen *Elastizität*. Diese Zusammenhänge zwischen Gleichgewicht, Kinematik und Materialeigenschaften, für allgemein dreidimensional belastete Bauteile sowie einfachen Strukturen wie Stäbe und auf Biegung und Torsion belastete Balken, werden in diesem Buch vermittelt.

Zur Vermittlung dieser Grundlagen wird folgende Gliederung gewählt. Nach einem Einstieg in Kapitel 6 in das eindimensionale deformierbare Verhalten von

2) Ein Stahl verhält sich anders als ein Polymer. Holz, Beton, Böden, Metalle, Kunststoffe, Elastomere, etc. weisen alle unterschiedliche Steifigkeiten auf, sodass Materialeigenschaften individuelle, auf das Material bezogene, Grundeigenschaften sind, währenddessen Gleichgewicht oder die Beschreibung der Kinematik allgemeingültige Aussagen sind.

Zug-Druckstäben, beschreibt Kapitel 7 mehrdimensionale Spannungs- und Verzerrungszustände. Neben der allgemeinen dreidimensionalen Theorie werden auch spezielle zweidimensionale Problemstellungen angesprochen. Verschiedenste spezielle Spannungs- und Verzerrungsfälle der täglichen Praxis sind hierbei anzusprechen. Eine Anwendung der Deformation von Bauteilen erfolgt insbesondere am Biegebalken bzw. am Torsionsstab. Ziel ist es eines der am häufigsten eingesetzten Konstruktionselemente, den Balken (hierunter sind alle stabförmigen Bauteile zu verstehen), genau auf dessen Spannungs- und Deformationsverhalten zu untersuchen. In der späteren beruflichen Praxis geht es insbesondere um die Vorhersage der maximalen inneren Beanspruchung, charakterisiert durch den Spannungszustand, sowie der maximalen Deformation des Bauteils, was wir beispielhaft am Balken studieren.

Zum Abschluss der Balkentheorie gelangen wir zu einem Stabilitätsphänomen, welches von großer Bedeutung für die Auslegung in der Praxis ist. Jeder kennt das Phänomen des Drückens eines Lineals in Axialrichtung, bei dem dieses ab einer kritischen Kraft schlagartig seitlich ausknickt. Dieses Phänomen des Knickens von Stäben, insbesondere von Stützen zum Aufnehmen von Druckkräften, ist daher von großer Bedeutung. Ziel ist es dieses sehr kritische Bauteilverhalten bei der Auslegung der Konstruktion einzubeziehen, damit solche, immer wieder Menschenleben fordernde, Versagensursachen nicht eintreten.

Abschließend vermittelt Kapitel 9 energetische Begriffe, wie zum Beispiel die Formänderungsenergie, die potenzielle Energie oder auch die virtuelle Energie. Mit diesen sogenannten Energiemethoden lassen sich Bauteile ebenfalls, und in einigen Fällen sogar erheblich effizienter, berechnen. Darüber hinaus repräsentieren diese Aussagen die Grundlagen moderner numerischer Berechnungsverfahren, wie die Methode der finiten Elemente, siehe zum Beispiel Bathe (2002b). Dieses Verfahren wird heutzutage vorwiegend im Bereich der Technik eingesetzt, um komplexe Vorgänge in Systemen aufgrund mechanischer, thermischer und elektrischer Ursachen vorherzusagen.

In der traditionellen Unterteilung der *Technischen Mechanik* beschreibt die *Dynamik starrer Körper* (Teil III des Buches) die Bewegung von Punktmassen und starren Körpern unter äußeren Kräften, was man üblicherweise im Zusammenhang der Grundlagenausbildung im Ingenieurstudium als *Dynamik*[3] bezeichnet. Die eigentliche Deformation des betrachteten Körpers wird dabei ausgeschlossen. Wir haben es also mit einer Erweiterung der zuvor behandelten Betrachtungen zu tun, bei dem der Fall der Statik fester und deformierbarer Körper auf beliebige Bewegungen von starren, also nicht-deformierbaren, Körpern erweitert wird. Dabei beginnen wir zunächst mit der Bewegung von *Punktmassen*[4]. Aufbauend auf

3) Teilgebiet der Physik, welches sich mit dem Einfluss von Kräften auf die Bewegung von Körpern beschäftigt.

4) Dies sind Punkte, denen wir eine Masse zuordnen, deren räumliche Ausdehnung jedoch nicht spezifiziert ist. Dies könnte zum Beispiel ein Ball sein, dessen räumliche Ausdehnung außer Acht gelassen wird – was die Approximation des wirklichen Verhaltens darstellt. Es könnte aber auch einen Himmelskörper oder ein Flugzeug repräsentieren, je nachdem welche physikalischen Eigenschaften man beschreiben möchte. Damit werden die Beschreibung und die Effekte von Drehbewegungen ausgeschlossen.

(a) (b)

Abb. 1 Mechanische Rollen- und Gelenksysteme: (a) Seilbahnrollen, (b) Baggerarm.

diesen Untersuchungen eines Punktes schließt sich die Frage an, wie sich ein beliebiger Körper mit einer endlichen räumlichen Ausdehnung bewegt. Dabei wird eine Einschränkung berücksichtigt, nämlich diejenige, dass sich dieser nicht deformiert, wie dies in der Elastostatik zugelassen ist. Der Abstand zweier materieller Punkte, also zweier Punkte denen wir eine Masse zuordnen und die sich in einem gemeinsamen zusammenhängenden Gebiet im Raum befinden, ist dabei konstant während der Bewegung.[5] Diese Eigenschaft muss bei der Beschreibung der Starrkörperbewegung berücksichtigt werden. Solche Problemstellungen treten in einer Vielzahl von Problemstellungen auf. In Abb. 1 sind zwei Beispiele von sich bewegenden Rollen, Seilen, Gelenken, Starrkörpern, etc. aufgeführt. Es geht dabei zunächst um die Beschreibung der reinen Bewegung, was als *Kinematik* bezeichnet wird, siehe Kapitel 10.

Alle Bewegungen werden dabei durch äußere Belastungen verursacht, wie zum Beispiel *Kräfte* und *Momente*. Letztere treten bei der sogenannten Bilanzierung eines materiellen Körpers auf, den wir uns aus seiner Umgebung herausgeschnitten vorstellen. Insbesondere müssen für die hier vorliegende Problemstellung die Massen konstant und die Bewegungsänderungen mit äußeren Kräften und Momenten verbunden sein. Dies wird in Kapitel 11 angesprochen und die Konsequenzen der Bilanzierung auf die Möglichkeit der Beschreibung der Bewegung diskutiert. Die hier vermittelten Kenntnisse zur Beschreibung der Bewegung von Punktmassen und starren Körpern werden in weiterführenden Vorlesungen für schwingende Systeme, der Bauwerkdynamik, der Robotik, der Maschinendynamik, der Akustik, der Wellenausbreitung, etc. wieder aufgegriffen.

Erneut greifen wir auf energetische Aussagen in Kapitel 12 zurück, da mit diesen Formulierungen zum einen schnellere Berechnungsmöglichkeiten vorliegen und zum anderen Begriffe wie kinetische und potenzielle Energie sowie Leistung und Arbeit verdeutlicht werden.

Abschließend diskutiert Kapitel 13 den Fall des Stoßes zweier Körper, der nicht nur bei dem Zusammenstoß zweier Kugeln eines Spielzeugs, sondern insbesonde-

5) Wir lassen es also in der physikalischen Modellierung der Bewegung zu, dass die Deformation des in Fußnote 4 erwähnten Balls außer Acht gelassen wird, die Rotation des Balls wird jedoch in die Betrachtungen mit einbezogen.

re bei der Kollision von Körpern, wie zum Beispiel von Fahrzeugen oder Bauteilen, von Interesse ist.

Im Rahmen der Technischen Mechanik Ausbildung gibt es eine Vielzahl an Lehrbüchern, die sich zum Teil seit Jahrzehnten etabliert haben. Eine sehr kleine Auswahl sind zum Beispiel Balke (2008); Gross *et al.* (2007); Hagedorn (1990); Hibbeler (2006a), sowie vertiefende Werke wie zum Beispiel Gummert und Reckling (1987); Lehmann (1984); Szabo (1984), deren inhaltlicher Wert zum Lesen motiviert. Der Autor verweist zum Teil auf graue Literatur, siehe Haupt (2000), probiert jedoch die darin erwähnte Darstellung hier zu übertragen. Es wird natürlich jedem Leser empfohlen andere Werke zum weiteren Verständnis anzuschauen. Da in diesem Buch jedoch einige Themengebiete auf andere Art und Weise motiviert werden, wird die nachfolgende Darstellung und Nacharbeit empfohlen. Darüber hinaus seien die Lehrbücher Gross *et al.* (2006); Hauger *et al.* (2006); Hibbeler (2006b); Mahnken (2009) im Bereich der Dynamik zitiert.

Teil I
Statik starrer Körper

1
Einführung in die Vektorrechnung

Neben skalarwertigen physikalischen Größen, wie Temperatur, Dichte, etc. gibt es weitere mathematische Größen, die mehr Informationen als nur den reinen Zahlenwert haben. Zum Beispiel kann man Größen definieren, die mit einer Richtung sowie einem Maß der Größe bzw. Intensität, die eine Wirkung in diese *Richtung* beschreibt, ausgestattet sind. Dieses Maß bezeichnen wir im Folgenden als *Betrag*. Solche Größen, die Richtung und Betrag repräsentieren, nennt man *geometrische Vektoren*. Die Bezeichnung „geometrisch" soll eine Unterscheidung zu Spaltenvektoren der Matrizenrechnung andeuten, die wir noch kennenlernen werden, dass Spaltenvektoren (auch als Spaltenmatrizen oder Tupel bezeichnet) nicht die Information der zugrunde liegenden Basis enthalten, d. h. auch der Begriff der *Basis* bedarf einer Erläuterung. Der Begriff „geometrisch" kann aber auch missverständlich sein, da auch Kraftvektoren, denen die physikalische Dimension einer Kraft zugeordnet ist, damit impliziert sein sollen. Im Folgenden wird trotzdem der Begriff des geometrischen Vektors verwendet.

Durch unsere täglichen Beobachtungen kennen wir solche Größen, die eine Richtung und eine Intensität (Betrag) haben, wie zum Beispiel Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Verschiebungen, Kräfte, etc. Diese Größen weisen in eine Richtung und sie haben einen spezifischen Zahlenwert.

1.1
Grundgedanken der Vektorrechnung

Wenn man solche neuartigen mathematischen Objekte einführt, die nicht nur durch einen Zahlenwert, sondern auch durch eine Richtung beschrieben werden, so müssen wir auch zugehörige Rechenoperationen definieren. Zunächst vereinbaren wir eine Notation, die sich von einem reellwertigen Zahlenwert $a \in \mathbb{R}$ unterscheidet. Reellwertige Zahlenwerte bezeichnet man als *Skalare*. Wir verwenden einen Pfeil, der über dem Symbol steht, um einen geometrischen Vektor (mathematische Größe mit einer Richtungsaussage und einem Betrag) zu kennzeichnen $\vec{a}$, d. h. $a \neq \vec{a}$!

Als Erstes sind wir an der Addition zweier geometrischer Vektoren, $\vec{a} + \vec{b}$, sowie der Multiplikation mit einen skalaren Zahlenwert $\alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, interessiert. Hier-

Technische Mechanik, Erste Auflage. Stefan Hartmann.

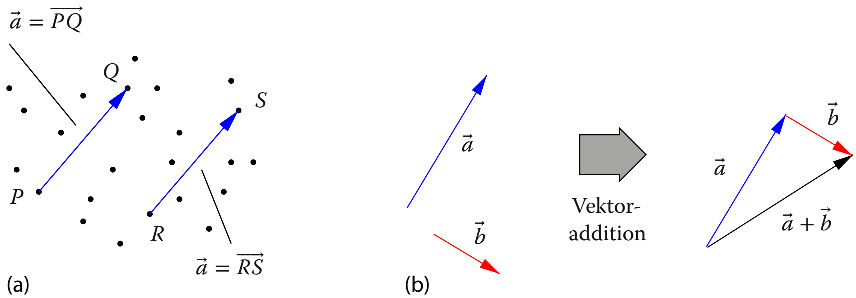


Abb. 1.1 Grundlegende Definition geometrischer Vektoren: (a) Beschreibung eines geometrischen Vektors, (b) Vektoraddition.

zu betrachten wir den euklidischen Punktraum. Ein Vektor $\vec{a}$ wird definiert als Verbindung zweier Punkte P und Q, wobei die Reihenfolge der Punkte P und Q ($(P, Q) \neq (Q, P)$)[1] die Richtung beschreibt, siehe Abb. 1.1a. Der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ zeige vom Punkt P zum Punkt Q, was durch den Fußpunkt des Vektors in P und der Spitze des Vektors in Q beschrieben wird. Der Abstand zwischen P und Q gibt den „Betrag“, d. h. den physikalischen Wert an.[2] Offensichtlich gibt es nicht nur ein Punktepaar, welches den gleichen Abstand und die gleiche Orientierung im Raum hat. Der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{RS}$ in Abb. 1.1a hat ebenfalls die gleiche Richtung und den gleichen Betrag. Für die Vektoraddition nutzt man genau diese Eigenschaft aus, da eine Parallelverschiebung des Fußpunktes von $\vec{b}$ in die Spitze von $\vec{a}$ durchgeführt wird, siehe Abb. 1.1b. Der resultierende Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ beginnt im Fußpunkt von $\vec{a}$ und endet in der Spitze von $\vec{b}$.

Ein spezieller Vektor ist der Nullvektor $\vec{0}$, dessen Betrag null ist und dessen Orientierung beliebig ist. $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$ wäre zum Beispiel ein solcher Vektor.

Wir betrachten als Nächstes die Multiplikation eines geometrischen Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, also $\lambda\vec{a}$. Hierbei gehen wir davon aus, dass $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ gilt, also die Vertauschung von Vektor und Skalar zur gleichen Lösung führt. Der Vektor $\vec{a}$ wird um den Faktor λ verlängert für $\lambda > 1$, d. h. der Betrag wird um den Faktor λ größer. Den Betrag des Vektors $\vec{a}$ schreiben wir in der Form $|\vec{a}|$, was einer nicht-negativen reellen Zahl entspricht, $|\vec{a}| \geq 0$, $|\vec{a}| \in \mathbb{R}^+$. Die Aussage $|\vec{a}| = 0$ gelte nur für den bereits eingeführten Nullvektor $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. Ist also $\lambda \geq 0$ so gilt

$$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}| \quad \forall\lambda \geq 0 \,. \tag{1.1}$$

1) Die Reihenfolge der Punktbezeichnung ist für die Definition von Vektoren notwendig, d. h. sie müssen ein geordnetes Punktepaar (P, Q) darstellen, bei der es auf die Reihenfolge ankommt.
2) Hierbei ist unsere Anschauung mit dem uns umgebenden Raum gekoppelt. Bei Vektoren, die eine physikalische Bedeutung haben, d. h. zum Beispiel eine Kraft, ist der Punktraum gekoppelt mit einer physikalischen Bedeutung und entzieht sich zunächst unserer Vorstellung eines geometrischen Abstandes, da der Abstand der Punkte P und Q die Dimension einer Kraft hat.

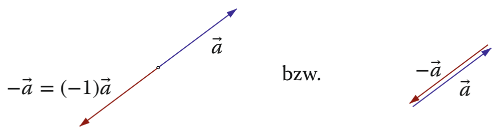


Abb. 1.2 Änderung der Richtung, $\lambda = -1$

Der Vektor wird kürzer für $0 < \lambda < 1$ und für $\lambda < 0$ ändert sich neben dem Betrag (Länge) der Richtungssinn, siehe Abb. 1.2 für $\lambda = -1$.

Für $\lambda = -1$ erhält man das *inverse Element*, siehe Definition 1.1. Für $\lambda < 0$ gilt auch $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Für diese Definitionen der Vektoraddition und der Multiplikation mit einem Skalar werden die sogenannten *Vektorraumaxiome* erfüllt:

Definition 1.1 Vektorraum, linearer Raum
Ein *reeller Vektorraum* (linearer Raum) besteht aus einer Menge von Elementen $\mathbb{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}$ und es existiere die Addition der Elemente $\vec{a} + \vec{b} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, welche auf ein Element aus $\mathbb{V}$ der gleichen Menge führt. Diese Elemente bezeichnet man als Vektoren, wenn sie die folgenden Eigenschaften haben:

(A1) Assoziativität

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{1.2}$$

(A2) Existenz eines neutralen Elements

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \tag{1.3}$$

(A3) Existenz eines inversen Elements

$$\vec{a} + \bar{\vec{a}} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \bar{\vec{a}} = -\vec{a} = (-1)\vec{a} \tag{1.4}$$

(A4) Kommutativität

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.5}$$

Des Weiteren müssen folgende Eigenschaften bei der Multiplikation mit einem skalaren Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ unter der Annahme $\alpha\vec{a} \in \mathbb{V}$ erfüllt sein:

(M1) Assoziativität

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \tag{1.6}$$

(M2) Distributivität

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{1.7}$$

(M3) Distributivität

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \tag{1.8}$$

(M4) Identität

$$1\vec{a} = \vec{a} \tag{1.9}$$

In diesem Fall sind die Elemente aus $\mathbb{V}$ Element des *linearen Raumes* oder *reellwertigen Vektorraums* und werden *Vektoren* bezeichnet.[3] □

Man kann zeigen, dass geometrische Vektoren die Vektorraumaxiome (1.2)–(1.9) erfüllen, was hier nicht explizit bewiesen wird, jedoch mit den geometrischen Betrachtungen durchführbar ist.

Wir können derzeit noch nicht mit Zahlenwerten arbeiten, um später für technische Anwendungen gesuchte physikalische Größen zu gewinnen bzw. mit geometrischen Vektoren auch zu rechnen. Hierzu bedarf es zunächst noch der Definition des sogenannten *Skalarproduktes*, d. h. einem Produkt zweier geometrischer Vektoren, welches einen Skalar liefert, sowie der Beschreibung der sogenannten *Komponentendarstellung*. Dies wird in Abschnitt 1.2 behandelt.

Bevor wir die Komponentendarstellung von Vektoren betrachten, führen wir einen *Einheitsvektor* $\vec{e}$ ein, also einen Vektor, dessen Betrag (Länge) 1 ist, $|\vec{e}| = 1$. Dieser wird verwendet, um die Richtung im Raum anzugeben. Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor, d. h. $|\vec{a}| \neq 0$, so können wir unter Ausnutzung von (1.6)

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|}}_{1} \vec{a} = |\vec{a}| \underbrace{\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right)}_{\vec{e}} = |\vec{a}|\vec{e} \tag{1.10}$$

schreiben, d. h. $\vec{e}$ gibt die Richtung des Vektors $\vec{a}$ an und der Betrag $|\vec{a}|$ liefert die Länge des Vektors.

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{1.11}$$

ist der *Einheitsvektor* in Richtung von $\vec{a}$, siehe Abb. 1.3a, und es lässt sich leicht zeigen, dass dieser die Länge 1 besitzt,

$$|\vec{e}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1 \ .$$

Für die Herleitung der Komponentendarstellung von Vektoren benötigen wir eine wichtige Definition, nämlich diejenige der *linearen Abhängigkeit* von Vektoren.

3) Bei genauerer Betrachtung sind die reellen Zahlen selbst oder auch *Matrizen* – und eine Reihe weiterer mathematischer Objekte – Vektoren, also Elemente des linearen Vektorraums (ohne Beweis).

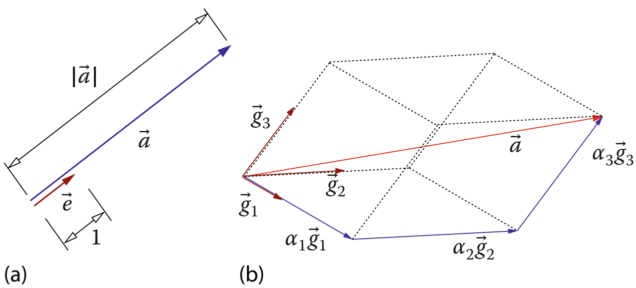


Abb. 1.3 Betrag und Vektorkomponenten eines Vektors $\vec{a}$: (a) Einheitsvektor $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$ und Beträge, (b) Darstellung eines Vektors durch seine Vektorkomponenten.

Definition 1.2 Lineare Abhängigkeit
Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{V}$ werden *linear abhängig* bezeichnet, wenn Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ existieren, die nicht alle verschwinden und für die die folgende Bedingung gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}. \tag{1.12}$$

Falls Gl. (1.12) nur für alle $\alpha_i = 0$ erfüllt ist, bezeichnet man die Vektoren $\vec{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, *linear unabhängig*. □

Im üblicherweise angenommenen dreidimensionalen Raum gibt es maximal drei linear unabhängige Vektoren. Wir nennen diese $\vec{g}_i \in \mathbb{V}$, $i = 1, 2, 3$. Das heißt jeder weitere Vektor, hier $\vec{a} \in \mathbb{V}$, lässt sich dann durch diese in einer Linearkombination darstellen:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{g}_1 + \alpha_2 \vec{g}_2 + \alpha_3 \vec{g}_3. \tag{1.13}$$

Die Faktoren α_i, $i = 1, 2, 3$, bezeichnet man als *Koeffizienten der Vektorkomponenten* und die Vektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, definieren die zugehörige *Basis*. Die *Vektorkomponenten* sind hier die Größen $\alpha_i \vec{g}_i$. Diese Bezeichnungen (Koeffizienten, Komponenten) werden aber in der Literatur sehr unterschiedlich gehandhabt. Zum Beispiel werden häufig die skalaren Werte α_i, $i = 1, 2, 3$, auch als Komponenten des Vektors bezeichnet. In Abb. 1.3b ist die grafische Veranschaulichung der Vektorkomponenten wiedergegeben. Die Orientierung der Vektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, kann dabei beliebig sein. Sie sollen lediglich linear unabhängig voneinander sein, d. h. ein Vektor $\vec{g}_i$ soll sich nicht durch eine Linearkombination der anderen beiden Vektoren darstellen lassen. Unter Ausnutzung der Beziehungen (1.2), (1.5) und (1.8) gilt für die Vektoraddition zweier Vektoren

$$\vec{a} = a_1 \vec{g}_1 + a_2 \vec{g}_2 + a_3 \vec{g}_3 \tag{1.14}$$

und

$$\vec{b} = b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2 + b_3 \vec{g}_3 \tag{1.15}$$

sowie der speziellen Anordnung

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \underbrace{a_1\vec{g}_1 + a_2\vec{g}_2 + a_3\vec{g}_3}_{\vec{a}} + \underbrace{b_1\vec{g}_1 + b_2\vec{g}_2 + b_3\vec{g}_3}_{\vec{b}} \\ &= (a_1 + b_1)\vec{g}_1 + (a_2 + b_2)\vec{g}_2 + (a_3 + b_3)\vec{g}_3 \ , \end{aligned} \tag{1.16}$$

d. h. die Koeffizienten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert (dies gilt nur, wenn sich beide Vektoren auf die gleichen Basisvektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, beziehen).

Beispiel 1.1 Vektoraddition
Gegeben seien die Basisvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$, die nicht unbedingt orthogonal aufeinanderstehen müssen. Zudem müssen diese Vektoren keine Einheitsvektoren sein. Gewählt sind $\vec{a} = \vec{g}_1 - \vec{g}_2 + 2\vec{g}_3$ und $\vec{b} = 2\vec{g}_2 - 2\vec{g}_3$, d. h. es liegen die Vektorkoeffizienten $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ und $a_3 = 2$ sowie $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ und $b_3 = -2$ vor. Die Summe der beiden Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$ lautet dann

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{g}_1 + (a_2 + b_2)\vec{g}_2 + (a_3 + b_3)\vec{g}_3 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \ .$$

Die Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ aus Gl. (1.14) mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert unter Verwendung der Beziehungen (1.6) und (1.7)

$$\begin{aligned}\lambda\vec{a} &= \lambda(a_1\vec{g}_1 + a_2\vec{g}_2 + a_3\vec{g}_3) \\ &= (\lambda a_1)\vec{g}_1 + (\lambda a_2)\vec{g}_2 + (\lambda a_3)\vec{g}_3 \ , \end{aligned} \tag{1.17}$$

d. h. jeder Koeffizient a_i, wird mit dem Faktor λ gewichtet.

Die Darstellung eines Vektors $\vec{a}$ in Abhängigkeit der Basisvektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, siehe Gl. (1.14), ist zudem eindeutig: Nimmt man an, dass der gleiche Vektor unterschiedliche Koeffizienten hätte, $a_i \neq a_i^*$, d. h. es gäbe die Darstellungen

$$\vec{a} = a_1\vec{g}_1 + a_2\vec{g}_2 + a_3\vec{g}_3 = a_1^*\vec{g}_1 + a_2^*\vec{g}_2 + a_3^*\vec{g}_3 \ ,$$

so würde aus den Vektorraumaxiomen (1.2)–(1.9) bei Subtraktion, siehe Gl. (1.17),

$$\vec{a} - \vec{a} = \left(a_1 - a_1^*\right)\vec{g}_1 + \left(a_2 - a_2^*\right)\vec{g}_2 + \left(a_3 - a_3^*\right)\vec{g}_3 = \vec{0}$$

resultieren. Dies ist nur dann erfüllt, wenn die Koeffizienten $a_i = a_i^*$, $i = 1, 2, 3$, identisch sind (siehe Definition 1.2 für linear unabhängige Vektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$).

Die Verwendung beliebiger Basisvektoren $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$, ist für unsere Zwecke nicht dienlich, zumal $|\vec{g}_i| \neq 1$ sein kann und daher der Betrag a_i in eine Richtung keine physikalische Größe angibt. Des Weiteren kommt es der Anschauung näher, orthogonale Richtungen auszuwählen. Daher wählen wir Basisvektoren $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, deren Betrag (Länge) eins ist, $|\vec{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, und die aufeinander senkrecht stehen,

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \ . \tag{1.18}$$