

Stephanie Schiemann
Robert Wöstenfeld

Die Mathe-Wichtel Band 2

Humorvolle
Aufgaben
mit Lösungen
für mathematisches
Entdecken
ab der
Sekundarstufe



SACHBUCH



Springer Spektrum

Die Mathe-Wichtel

Band 2

Stephanie Schiemann • Robert Wöstenfeld

Die Mathe-Wichtel

Band 2

Humorvolle Aufgaben mit Lösungen
für mathematisches Entdecken
ab der Sekundarstufe

 Springer Spektrum

Stephanie Schiemann
Netzwerkbüro Schule-Hochschule der DMV
an der Freien Universität Berlin
schiemann@math.fu-berlin.de

Robert Wöstenfeld
Netzwerkbüro Schule-Hochschule der DMV
an der Freien Universität Berlin
woestenfeld@math.fu-berlin.de

ISBN 978-3-658-03074-2
DOI 10.1007/978-3-658-03075-9

ISBN 978-3-658-03075-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Alle Illustrationen sind von Michael Gralmann, außer der Illustration im Wichtelbook von „Wichtel Walli“ und den Illustrationen der Aufgaben und Lösungen „Quatromino“ und „Wichtel in der Sahara“. Diese sind von Magdalene Fischer.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+BusinessMedia
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Knobeln macht Spaß, Mathe macht Spaß, Herausforderung und Wettbewerb können begeistern: Wenn all das noch eines Beweises bedarf, dann liefert den jedes Jahr wieder der Online-Mathekalender „Mathe im Advent“. Zehntausende von Schülerinnen und Schülern, aber auch ganze Schulklassen, stürzen sich im Dezember täglich auf die Aufgaben hinter den Türchen im Internet, knobeln, genießen die Freude an Ideen, am Finden von Lösungen, erleben aber auch immer wieder, dass Probleme knifflig und hartnäckig sein können. Das Mitmachen soll Spaß machen, die harten Herausforderungen des Kalenders werden daher absichtlich in humorvoll-verspielter Verpackung präsentiert – mit sehr viel Einsatz und Aufwand und Liebe zum Detail gestaltet nicht nur von Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld, die das gesamte Projekt verantworten, sondern auch vom „Chef-Illustrator“ Michael Gralmann, einem Technomathematikstudenten der TU Berlin. Aber trotz der spielerischen Verkleidung tauchen alle, die mitmachen, auch ganz automatisch in die Gefühlswelt mathematischer Forschung ein: Sie erleben die Freude am Entdecken und am Knacken harter Nüsse, aber auch den gelegentlichen Frust über sehr harte Nüsse, die sich (zunächst) nicht öffnen lassen. Und zum Erlebnis gehört auch dazu, ganz spielerisch Problemlösestrategien auszuprobieren und zu entwickeln und die eigenen Tugenden und Stärken zu erfahren und auszubauen: Sorgfalt und gründliches Lesen zahlen sich genauso aus wie die Kombination von „wildem Spekulieren“ und „genauem Nachdenken“. Begeisterung und Phantasie zählen natürlich, Konstanz und Ausdauer ebenso.

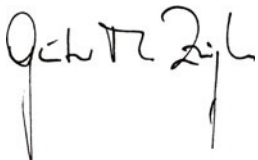
Wer sich mit den Aufgaben beschäftigt und rätselt, allein oder in kleiner Gruppe mit Papier und Stift vor diesem Buch sitzt, kann erkennen, dass die Aufgaben auch außerhalb der Adventszeit Spaß machen. Sie oder er wird damit aber auch Mitglied einer großen virtuellen Gemeinschaft der Mathematik – einer Gemeinschaft derer, die gern und immer wieder vor solchen (oder auch noch viel schwierigeren ...) Aufgaben sitzen und dieselbe Freude an Geistesblitzen und Ideen suchen und finden. Das „Netzwerkbüro Schule-Hochschule“ der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), das aus dem bundesweiten „Jahr der Mathematik 2008“ entstanden ist und 2011 seine Heimat am Fachbereich Mathematik der Freien Universität Berlin gefunden hat, hat die wunderbare und wichtige – aber oft auch überwältigende – Aufgabe, diese große Gemeinschaft zu vernetzen. Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld sind dort die Haupt-Akteure, mit riesiger Energie und Engagement dabei. Aber schon das Entwerfen, Sammeln und Ausgestalten der Aufgaben sind großes Teamwork – das sich

auch in diesem Buch widerspiegelt. Zudem helfen jedes Jahr im Dezember, wenn das Online-Spiel läuft, sehr viele engagierte Studentinnen und Studenten mit, viele Tausend E-Mails und Anrufe, Rückfragen und Kommentare zu beantworten und die Technik im Hintergrund am Laufen zu halten. Ganz herzlichen Dank an alle, die in den letzten Jahren mitgemacht haben und jedes Jahr wieder dabei sind!

Gleichzeitig danke ich auch im Namen des Präsidiums der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) allen Unterstützern und Sponsoren, die dieses „Großprojekt“ möglich gemacht haben und weiter möglich machen – allen voran der Deutsche Telekom Stiftung, die über Jahre das Netzbüro der DMV finanziert und den Aufbau des Lehrerforums finanziert hat, sowie dem DFG-Forschungszentrum Matheon, das den parallelen Adventskalender für die Oberstufe und für Erwachsene gestaltet. Der Dank gilt aber auch den Mitgliedern der DMV, darunter auch immer mehr Lehrerinnen und Lehrer (herzlich willkommen!), die mit ihrem Mitgliedsbeitrag dieses Projekt fördern – wie auch den Vielen in und außerhalb der DMV, die das Netzbüro und das Kalenderprojekt durch viele zusätzliche Spenden unterstützen. Dieses Mathe-Wichtel-Buch ist auch ein sichtbares und „greifbares“ Dankeschön an alle Mitstreiter und Unterstützer für ein Großereignis, das ja sonst nur virtuell als Online-Spiel im Advent stattfindet.

Ich hoffe, dass in den Aufgaben des Mathe-Wichtel-Buchs Begeisterung spürbar ist – nicht nur die Begeisterung von Stephanie Schiemann, Robert Wöstenfeld, Michael Gramann und den vielen anderen, sondern auch die Begeisterung der kleinen und großen Knoblerinnen und Knobler. Diese Begeisterung bekommen wir ja „live“ nur einmal im Jahr zu sehen und zu spüren – wenn nämlich Ende Januar in der Berliner Urania eine große Preisverleihung stattfindet, bei der wir Schülerinnen und Schüler aller Klassenstufen und sogar ganze Schulklassen mit ihren Lehrerinnen und Lehrern auf die Bühne holen, bei einem „Mathequiz“ gegeneinander und gegen den ganzen Saal antreten lassen – und schon an der Lautstärke im Saal klar wird: Mathe macht Spaß!

Ich hoffe, dass diese Erkenntnis auch lautstark aus diesem Buch schallt.



Prof. Günter M. Ziegler

Mitglied des DMV-Präsidiums

Freie Universität Berlin

Didaktisches Vorwort der Autoren

Die Schönheit der Mathematik ist nicht für alle Menschen leicht zu erkennen. Auch die kreative Vielfalt, die in ihr steckt, erschließt sich denen, die sie nur aus der Schule kennen, oft nicht. Eine Ursache dafür sehen wir in der Art, wie die Mathematik in der Schule und der Hochschule – von positiven Ausnahmen abgesehen – flächendeckend vermittelt wird.

Über viele Schülergenerationen und damit in der Breite der Gesellschaft verfestigte sich ein sehr einseitiges Bild: „Mathematik“ wird vielfach gleichgesetzt mit „Rechnen“ und „Geometrie“. Die Grundrechenarten, der Dreisatz, die Prozentrechnung oder auch der Satz des Pythagoras und vielleicht noch die Parabel, die Sinusfunktion oder π sind den Erwachsenen im Gedächtnis geblieben. Methodisch läuft der Mathematikunterricht meist noch sehr klassisch ab und ist vom „Vormachen und Nachmachen“ geprägt. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler Routinen, die sie – im besten Falle – in der Klassenarbeit oder bei Prüfungen abspulen. Entdeckendes Lernen, problemlösendes Denken oder auch das Modellieren wird inzwischen in den Lehrplänen aller Schulformen genannt, jedoch ist es noch viel zu wenig in den Schulalltag eingezogen. Doch das programmierte Lernen von Routinen bleibt meist nicht hängen. Stattdessen prägt sich eine Eindeutigkeit von Lösungen und Lösungswegen ein, die nicht nur falsch ist, sondern auch den vielschichtigen Problemen von heute in der Regel nicht gerecht wird. Auch der Spaß und der Entdeckungsdrang bleiben dabei weitestgehend auf der Strecke. Dass „Mathemachen“ eine kreative, sinnstiftende und Freude bringende Tätigkeit ist, erfahren die Schülerinnen und Schüler so nur in Extra-Angeboten.

Wir wissen aber auch, dass sich viel tut: Während unserer Arbeit im Netzwerkbüro Schule-Hochschule der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) haben wir über die Jahre viele engagierte Lehrerinnen und Lehrer sowie Dozierende aus Universitäten, Privatpersonen oder auch Unternehmen aus der Wirtschaft kennengelernt, die spannende Mathematikprojekte anbieten. Gleichwohl sehen wir, dass erst der Anfang gemacht und noch viel zu tun ist. Eine flächendeckende Umsetzung dieser Ideen konnte aus verschiedenen Gründen bisher nicht realisiert werden. Deshalb wird ein Gefühl dafür, was Mathematik wirklich ist und was es bedeutet, mathematisch zu denken und zu arbeiten, noch zu selten vermittelt.

Mit unseren Aufgaben, die wir jährlich in „Mathe im Advent“, den mathematischen Adventskalendern der DMV, veröffentlichen, möchten wir dazu beitragen, dass die Mathematik sowohl als ein vielfältiges Wissensgebiet mit eigener Sprache und Kultur wahrgenommen wird als auch als Werkzeug zum systematischen Lösen und zum Modellieren von Problemen, das sinnvoll und gewinnbringend in der alltäglichen Welt genutzt werden kann.

Zudem soll mit unseren Mathekalenderaufgaben im Wichteldorf das „Mathemachen“ als ein kreativer und anregender Prozess erfahren werden, welcher den in jedem Menschen innewohnenden Entdeckerdrang nutzt und fördert. Mathematikerinnen und Mathematiker empfinden sich oft als sehr freie Menschen und suchen unentwegt nach Ideen und Lösungen, die selten jemand zuvor hatte. Die Offenheit für neue Gedankengänge, das Entdecken von und das Spielen mit konkreten oder abstrakten Mustern sind dafür so elementar wie das „Weiterdenken“.

Viele Schülerinnen und Schüler wünschten sich von uns, dass es solche Aufgaben auch zu anderen Jahreszeiten gäbe, z. B. zu Ostern oder Pfingsten. Da dies mit unseren Ressourcen nicht möglich ist, haben wir uns entschieden, die Aufgaben in einer Buchreihe zu veröffentlichen. Dieses ist nun der zweite Band. Er umfasst 24 ausgewählte, sorgfältig überarbeitete Aufgaben und Lösungen aus drei Jahren „Mathe im Advent“ mit vielfältigen Ergänzungen für die Klassenstufen 7 bis 9. Der erste, kürzlich erschienene Band 1 bietet 24 schöne Aufgaben mit Lösungen sowie umfassenden Ergänzungen aus „Mathe im Advent“ für die Klassenstufen 4 bis 6.

Zu den Aufgaben

Die Mathe-Wichtel-Aufgaben, die wir für dieses Buch noch einmal grundlegend überarbeitet und im Lösungsteil erweitert haben, tragen die oben genannten Kerngedanken und noch viel mehr in sich. Sie sind dafür konzipiert, so viele Schülerinnen und Schüler wie möglich – aber auch die Lehrkräfte, Eltern, Freunde und Verwandte, also alle daran interessierten Erwachsenen – für die Mathematik (zurück)zugewinnen. Der Spaß an den 24 Geschichten sowie der sinnvolle Einbau der mathematischen Fragestellungen, der bei einfachen eingekleideten Aufgaben oft zu kurz kommt, sind deshalb die unverzichtbaren Stützpfeiler der Wichtel-Aufgaben. Die Leserinnen und Leser sollen im besten Falle gar nicht merken, dass sie gerade mathematisch arbeiten. Dies sind natürlich hoch gesteckte Ziele, die wir sicher mit einigen Aufgaben der letzten Jahre auch verfehlt haben. Aus diesen wie auch aus den gelungenen Beispielen haben

wir viel gelernt und mit der Zeit ein standardisiertes Verfahren zum Verfassen der Aufgaben entwickelt. Im ersten Schritt suchen wir nach interessanten Problemstellungen aus mathematischen Themenbereichen, die nicht oder nur peripher in der Schule behandelt werden. In diesem Buch gibt es neben mehr oder weniger vertrauten Rechen- und Geometrieaufgaben auch Aufgaben aus den Gebieten Analysis, Graphentheorie, Gruppentheorie, Kombinatorik, Optimierung, Stochastik, Topologie, Zahlentheorie sowie Themenbereichen zur Geschichte der Mathematik und zur Kulturgeschichte.

Wichtig dabei ist, dass die Schülerinnen und Schüler der 7. bis 9. Klassen aller Schulformen, für die diese Aufgaben in erster Linie konzipiert sind, ohne große Vorkenntnisse, aber mit Intuition, Neugier, ein wenig Durchhaltevermögen und „outside-the-box“-Denken die Lösungen finden können. Das Multiple-Choice-Format ist bei Millionen von eingesendeten Lösungen eine notwendige, keineswegs gewünschte Einschränkung. Offene Aufgabenstellungen wären leichter zu verfassen, zudem aus unserer Sicht besser geeignet, die oben genannten Ziele zu erreichen. Wenn Sie die Aufgaben im Unterricht einsetzen oder sich anderweitig mit ihnen befassen, können Sie die Antwortmöglichkeiten natürlich weglassen. Dadurch verlieren Sie allerdings die Möglichkeit, das Ausschlussverfahren als Lösungsweg zu nutzen, was manche Aufgaben sehr viel komplexer macht. Die Fragestellungen sind so offen wie möglich gehalten, sodass die Lösungen fast immer über verschiedene Wege gefunden werden können. Von denen stellen wir in unseren ausführlichen und altersgerechten Lösungen möglichst viele vor. Wir erheben jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Nichts in der Mathematik ist schlimmer als das Denken in Einbahnstraßen.

Die Aufgaben haben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, beinhalten aber keine „mathematischen Tricks“, denn diese sind nur zum Verunsichern geeignet und bewirken bei denjenigen, denen wir ein positives Erlebnis mit der Mathematik vermitteln wollen, gerade das Gegenteil. In diesem Buch haben wir die Aufgaben ungefähr von leicht nach schwer geordnet. Die Einschätzung der Schwierigkeitsgrade bleibt jedoch eine individuelle Angelegenheit. Tiefergehende Gedanken zu den jeweiligen Themen werden in der Lösung oder danach im „Blick über den Tellerrand“ oder in der Kategorie „Zum Weiterdenken“ angesprochen. Mit diesem Ansatz können wir die unterschiedlichen Vorkenntnisse in den verschiedenen Klassenstufen ausgleichen, ohne die Fortgeschrittenen zu langweilen. Deshalb sind die Mathe-Wichtel-Aufgaben sowohl für jüngere (Begabte ab der 5. Klasse) als auch für ältere Schülerinnen und Schüler aller Schulformen (nicht nur Gymnasien) und sogar für Erwachsene geeignet.

Im zweiten Schritt wird das mathematische Problem möglichst sinnvoll und verborgen in eine fantasie- oder humorvolle Geschichte eingebettet. Das fiktive Wichteldorf mit den Rentieren und dem Weihnachtsmann bietet dabei den weihnachtlichen Rahmen, der ganz bewusst menschliche Züge trägt. Auf Weihnachten freut sich jeder und somit ist der Rahmen zunächst positiv besetzt. Die Geschichten sollen die Jugendlichen und Erwachsenen motivieren, sich an den 24 Tagen vor Weihnachten täglich mit „Mathematik“ zu beschäftigen und geben ihnen genügend Raum für ihre Fantasie und Kreativität. Sie erfahren so spielerisch, dass die Mathematik wirklich gebraucht wird, um alltägliche Probleme zu lösen und interessante Fragestellungen zu beantworten. Ganz unbewusst lernen sie dabei auch andere Facetten der Mathematik kennen und entdecken neue Gedankenspiele und interessante Muster. In dieser Phase der Aufgabenerstellung ergeben sich bereits die Ideen für die Illustrationen, die humorvoll und zum besseren Verständnis die Texte visuell ergänzen. Gerade bei geometrischen und graphentheoretischen Aufgaben sind diese Bilder hilfreiche Informationsträger.

Die Gleichberechtigung der Geschlechter im Wichteldorf ist uns besonders wichtig. Die Förderung der Frauen in der mathematischen Welt ist in unserer gesamten Arbeit im DMV-Netzwerkbüro ein spezielles Anliegen. Auch in der Mathematikkarriere sind die Männer nach wie vor erfolgreicher, obwohl inzwischen fast ebenso viele junge Frauen ein Mathematikstudium aufnehmen und es auch in Hochschulen, Wirtschaft und Politik immer wieder positive Ausnahmen gibt. Klassische Geschlechterrollen und Stereotypen bedienen wir bewusst nicht, ohne dabei jedoch utopische Rollenbilder zu zeichnen. Die Tatsache, dass im Advent 2012 von ca. 150.000 teilnehmenden Schüler_innen¹ etwas mehr als die Hälfte weiblich waren und damit wiederholt die natürliche Verteilung innerhalb der Schülerschaft widergespiegelt wurde, zeigt uns, dass wir mit diesem Ansatz erfolgreich sind und dass Mathematik nicht per se für Mädchen uninteressant ist.

Im dritten Schritt werden die Lösungswege ausführlich beschrieben und, wenn passend, mit einem „Blick über den Tellerrand“, einer „Mathematischen Exkursion“ oder Aufgaben „Zum Weiterdenken“ erweitert. Hier werden die sich aus dem Zusammenhang ergebenden mathematischen Inhalte erklärt, in einen größeren Sachzusammenhang eingebettet und durch offene Fragestellungen ergänzt.

Komplettiert wird das Buch durch das „Wichelbook“, in dem alle 26 Wichtel dieses Buches mit einem Portraitbild und einer Beschreibung ihrer Persönlichkeit auf priva-

¹ Wir entscheiden uns in diesem Buch für die Variante der Gender_Gap, die alle sozialen Geschlechter und Identitäten gleichberechtigt einschließt.

ter wie mathematischer Ebene aufgeführt sind. Die Wichtel haben über die Jahre ihre eigenen Charaktere entwickelt und ausgeprägt. Mit dem Wichtelbook möchten wir die Freude, die wir beim Schreiben der Aufgaben haben, an alle weitergeben, denen unsere Aufgaben ebenso großen Spaß machen.

Im Stichwortverzeichnis sind viele mathematische Begriffe aufgelistet, die wir für den Umgang mit Mathematik und das Lösen der Aufgaben für interessant und wichtig halten. Im Nachwort möchten wir Ihnen noch das Online-Spiel „Mathe im Advent“ vorstellen, falls Sie es noch nicht kennen.

Der Prozess des Aufgabenverfassens wird in jedem Jahr angereichert mit Aufgabenideen, die uns im Rahmen eines Aufgabenwettbewerbes zugesandt werden. Motivierte Lehrer_innen, Schüler_innen sowie mathematische Akteure aus Universität und Wirtschaft schicken uns im Sommer ihre Aufgabenideen zu, die wir sichten und – nach Aufnahme in die Auswahl der 24 „Mathe im Advent“-Aufgaben – an unser Geschichtenformat mit seinen oben beschriebenen Kriterien anpassen. Einige von ihnen finden Sie auch in diesem Buch, sie sind dementsprechend gekennzeichnet. Wir bedanken uns bei allen, die uns Aufgabenvorschläge eingereicht haben. Wir wünschen uns, dass Sie „Mathe im Advent“ auch in Zukunft mit Ihren Ideen bereichern!

Zur Verwendung der Aufgaben

Die Mathe-Wichtel-Aufgaben haben eine kommunikative Funktion. Auch wenn sie im Rahmen eines Wettbewerbs veröffentlicht werden, sollen sie dem Austausch über Ideen und Lösungsansätze zwischen den Schüler_innen dienen und genauso zum Austausch und der Auseinandersetzung mit „Mathematik“ in der Familie anregen. Das Feedback, welches unser Büro jedes Jahr von Teilnehmer_innen, Eltern und Lehrer_innen bekommt, suggeriert, dass sie dieser Funktion auch gerecht werden. Oft wurde uns darüber berichtet, wie sich Schüler_innen unaufgefordert in der Pause oder daheim zusammen mit ihren Eltern über Mathematik austauschten. Zudem nehmen jährlich mehrere tausend Erwachsene im „Spaßaccount“ an „Mathe im Advent“ teil. Auch sie sollen durch die Geschichtenideen und die eingebaute, für Kinder wohl weniger erkennbare Ironie Spaß mit der Mathematik haben und gern auch neue Facetten an ihr entdecken oder wieder auffrischen.

Wir empfehlen die Aufgaben dieses Buches für alle Schulformen als Intermezzo im Unterricht, für Projektwochen und Mathe-AGs, aber auch als vertiefende Beschäfti-

gung zu Hause. Mit den stark steigenden Teilnehmerzahlen der letzten Jahre nahmen auch immer mehr Schüler_innen und Klassen aus Haupt-/Realschulen und Förderschulen teil. Auch hier gab es zum Teil sehr geringe Fehlerquoten. Wir möchten allerdings darauf hinweisen, dass das Anspruchsniveau einiger Lösungswege, „mathematischer Exkursionen“ und Aufgaben „Zum Weiterdenken“ eher jenem der fortgeschrittenen Schüler_innen entspricht. Wir tragen damit der Heterogenität der Schülerschaft Rechnung und bieten Inhalte für verschiedene Schwierigkeitsstufen an. Es sollte deshalb nicht der Anspruch für alle sein, sämtliche Passagen in Gänze nachvollziehen zu können.

Beobachtungen

In den drei Jahren intensiver Auseinandersetzung mit den Mathe-Wichtel-Aufgaben konnten wir, vor allem über die Fülle an Rückmeldungen, interessante Beobachtungen machen oder verifizieren. Nicht wirklich neu, aber unübersehbar ist, dass die Kinder und Jugendlichen extrem einfallsreiche Wege gehen, um eine (meist richtige) Lösung zu finden. Diese Wege wurden teilweise durch das korrigierende Eingreifen von Erwachsenen, vor allem im Elternhaus, eingeschränkt und führten dann oft zu falschen Annahmen und Ergebnissen. Auffällig ist dabei, dass in diesen Fällen häufig nach einem „Trick“ gesucht wurde, der den entsprechenden Aufgaben innewohnen sollte. Dies lässt auf ein einseitig ausgeprägtes, möglicherweise traumatisches Bild von der Mathematik bei den Eltern schließen, das in dieser Form auch an die Kinder weitergegeben wird.

Eine andere, für den Mathematikunterricht sehr interessante Erkenntnis ist, dass Schüler_innen bereits ab der 4. Klasse einen Sinn für die Notwendigkeit des exakten Formulierens in der Mathematik zeigen, wenn sie selbst durch uneindeutige Wortwahl Nachteile erleiden. Das unpersönliche Online-Format von „Mathe im Advent“ lässt keine Nachfragen zu den Aufgaben zu. Folglich wirken unklare Formulierungen verunsichernd auf die Kinder, die befürchten, bei einer falschen Auslegung die Chance zu verlieren, einen der Hauptpreise zu gewinnen. Dementsprechend vehement fiel die unmittelbare Rückmeldung in diesen – nicht immer vorhersehbaren – Fällen aus. Die Schüler_innen forderten aus eigenem Antrieb eine unmissverständliche Ausdrucksweise, die sie im Mathematikunterricht bekanntlich eher als eine lästige Formalität empfinden. Das führte unter anderem dazu, dass in den Geschichten schönere Formulierungen zugunsten der Eindeutigkeit geopfert werden mussten.

Dank

Viele Menschen haben dazu beigetragen, dass dieses Buch entstehen konnte. Unser besonderer Dank gilt Prof. Günter M. Ziegler, der das Projekt mit Vertrauen und großzügiger Unterstützung in unsere Hände gelegt hat, sowie unseren engsten Familienangehörigen und Freunden, die uns geduldig und beratend zur Seite standen und in den letzten vier Adventszeiten fast vollständig auf uns verzichten mussten.

Zudem möchten wir allen studentischen Hilfskräften und Kolleg_innen der Technischen Universität Berlin, des DFG-Forschungszentrums MATHEON und der Freien Universität Berlin danken sowie den Praktikantinnen des Netzbüros und unseren Programmierern (ehemalige Studenten vom Hasso-Plattner-Institut Potsdam), die uns in diesem Projekt in den vergangenen vier Jahren unterstützt haben. Ohne die Mitarbeit der jungen, kreativen und selbst von der Mathematik so begeisterten Menschen wäre „Mathe im Advent“ nicht das, was es jetzt ist! Ein spezieller Dank geht an diejenigen, die uns beim Entwickeln und Überarbeiten der Aufgaben und Lösungen und bei der Ausarbeitung dieses Buches geholfen haben. Dazu gehören neben den Geschichten vor allem die brillanten Illustrationen, aber auch die vielen tausend E-Mails, die unsere Studierenden jeden Tag im Dezember liebevoll und individuell verfasst haben.

Im Bild sind die Personen aus dem „Mathe im Advent“-Team, die im Wesentlichen an der Erstellung der Aufgaben mitgewirkt haben, als Wichtel dargestellt:



oben: Robert Wöstenfeld (Mitarbeiter im Netzbüro der DMV), Stephanie Schiemann (Leitung Netzbüro Schule-Hochschule der DMV), Thomas Vogt (Medienbüro der DMV)

unten: Michael Gralmann (Haupt-Illustrator), Marten Mrotzek, Nadja Lohauß, Alexander Sittner (Studentische Hilfskräfte im Netzbüro der DMV), Magdalene Fischer (Illustratorin), Christina Bracht (ehemalige Praktikantin im DMV-Netzbüro)

Persönliche Anmerkung von Stephanie Schiemann

Mein Geburtsname ist Stephanie Wichtmann und viele meiner ehemaligen Schüler_innen, Kolleg_innen sowie Teilnehmer_innen der Talentförderung Mathematik in Hamburg und Niedersachsen kennen mich noch unter diesem Namen, den ich erst im Jahr der Mathematik 2008 durch Heirat abgelegt habe. Damals, als Frau Wichtmann, wurde ich von meinen Schüler_innen öfters liebevoll als „Wichtelmännchen“ bezeichnet. Da dies so wunderbar zum Namen dieses Buches passt, konnte ich mir diese Bemerkung nicht verkneifen. Ich hoffe, viele meiner Ehemaligen lesen dieses Buch und haben Spaß daran, sich an die Mathematikstunden und die Talentförderaktivitäten von damals zu erinnern.

Wir wünschen allen viel Spaß beim Lesen und Lösen der Mathe-Wichtel-Aufgaben!



Stephanie Schiemann



Robert Wöstenfeld

Ihre Stephanie Schiemann und Robert Wöstenfeld
Berlin, im Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Didaktisches Vorwort der Autoren	7
Das Wichtelbook	17
1 Ausgewählte Aufgaben aus „Mathe im Advent“	31
Travelling Weihnachtsmann	32
Der Wunschzetteltresor	34
Quatromino	36
W-Factor	38
Tunnel	40
Eierkuchen	42
Norwegische Nachbarschaftshilfe	44
Ebbe und Flut	46
Fällt Weihnachten aus?	48
Erste Vorbereitungen	50
Glück auf Knopfdruck	52
Das Lichterfest	54
Der Weihnachtsmann holt die Raute raus	56
Rentiersalat	58
Wichtelnde Wichtel	60
W-Games	62
Rennschlitten	64
Einzelkinder	66
Das Gruppenbild	68
Weihnachtsbaum 2.0	70
Die Wichtel in der Sahara	72
Das gestreifte Schaf	74
Verknotete Weihnachten	76
Möbiusbänder	78

2 Lösungen und Ergänzungen zu den Aufgaben	81
Travelling Weihnachtsmann	82
Der Wunschzetteltresor	86
Quatromino	93
W-Factor	95
Tunnel	103
Eierkuchen	106
Norwegische Nachbarschaftshilfe	108
Ebbe und Flut	111
Fällt Weihnachten aus?	115
Erste Vorbereitungen	119
Glück auf Knopfdruck	122
Das Lichterfest	124
Der Weihnachtsmann holt die Raute raus	127
Rentiersalat	131
Wichtelnde Wichtel	135
W-Games	141
Rennschlitten	144
Einzelkinder	146
Das Gruppenbild	150
Weihnachtsbaum 2.0	153
Die Wichtel in der Sahara	159
Das gestreifte Schaf	162
Verknotete Weihnachten	165
Möbiusbänder	167
Anhang	169
Nachwort	170
Stichwortverzeichnis	172

Das Wichtelbook



Die Mathe-Wichtel leben und arbeiten am Nordpol. Sie helfen dem Weihnachtsmann und organisieren das Leben im Wichteldorf. Da gibt es viel zu tun und oft müssen sie dabei ihr Wissen über die vielen verschiedenen Bereiche der Mathematik anwenden. Das ist bei den Wichteln nicht anders als bei den Menschen. Natürlich denken die Wichtel nicht die ganze Zeit über Mathematik nach. Die Geschichten in diesem Buch sammeln aber genau diese Momente, in denen sie die Mathematik verwenden, um Probleme zu lösen oder einfach damit herumzuspielen und interessante Muster und Zusammenhänge zu erkennen.

In diesen Geschichten machst du Bekanntschaft mit vielen Wichteln. Damit du sie noch besser kennenlernen kannst, gibt es das „Wichtelbook“. Hier sind sie mit Profilbildern und Details ihrer verschiedenen Persönlichkeiten dargestellt. Du kannst natürlich jederzeit zu den Aufgaben springen und dir das „Wichtelbook“ später anschauen. Wir wünschen dir viel Spaß beim Lesen und beim Entdecken zahlreicher interessanter Seiten der Mathematik!



Ada

Wichtel Ada ist Auszubildende bei den Geschenkwichteln. Mit dem Knoten von Geschenkbindern ist sie allerdings hoffnungslos unterfordert. Wenn sie nicht gerade darüber nachdenkt, wie sie ihre Arbeitsschritte standardisieren und verkürzen kann, entwickelt sie ausgeklügelte Streiche, die sie abends ihrer Freundin Ragna präsentiert. Bei der Durchführung hält sich die ruhige Ada aber meist im Hintergrund, um nicht negativ aufzufallen.

Ihren intellektuellen Ausgleich sucht sie sich nach der Arbeit, sonst würde sie geistig verarmen. Sie experimentiert mit Programmiersprachen und baut kleine Computerprogramme. Mit denen will sie eines Tages ein System finden, mit dem sie die Gewinner der Rentierwettläufe sicher vorhersagen kann.



Balduin

Statistikwichtel Balduin liebt Zahlen. Er ist einer der wichtigsten Wichtel im Weihnachtsdorf, da er dabei hilft, die Arbeit optimal zu verteilen. Er trägt dafür wahnsinnig viele Daten zusammen, wertet diese aus und stellt seine statistischen Ergebnisse für seine Wichtelkollegen grafisch dar. Das nimmt sogar seine Freizeit in Anspruch.