Bernd Luderer

Mathe, Märkte und Millionen

Plaudereien über Finanzmathematik zum Mitdenken und Mitrechnen

SACHBUCH

Springer Spektrum

Mathe, Märkte und Millionen

Bernd Luderer

Mathe, Märkte und Millionen

Plaudereien über Finanzmathematik zum Mitdenken und Mitrechnen

Springer Spektrum

Prof. Dr. Bernd Luderer
Technische Universität Chemnitz, Deutschland
bernd.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de

ISBN 978-3-658-02773-5 ISBN 978-3-658-02774-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-02774-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Dem kritischsten Leser, meiner Frau,
in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Mathematik – abstrakt, staubtrocken, realitätsfern, unverständlich und nichts für Sie? Falsch, ganz falsch! Das ist ein absolut unzutreffendes Klischee. Gerade die angewandte Mathematik hält viele überaus spannende und praxisrelevante Fragestellungen bereit. Dass sich die Beschäftigung mit ihnen lohnt, soll dieses Büchlein zeigen. In 42 Geschichten sollen Sie, lieber Leser, in lockerer und dennoch mathematisch exakter Weise in die bunte Welt der Finanzmathematik und der Finanzmärkte entführt werden.

An Mathematikkenntnissen wird lediglich Schulwissen vorausgesetzt, nur in wenigen Erzählungen sind Grundkenntnisse der Differenzialrechnung von Vorteil. Mitdenken und Mitrechnen sind ausdrücklich erwünscht. Die Geschichten sind inhaltlich weitgehend unabhängig voneinander, denn das vorliegende Büchlein will kein Lehrbuch sein; nur gelegentlich gibt es Querverbindungen. Häufig benötigte Formeln, ein Glossar sowie einführende Literatur zur Finanzmathematik sind am Ende des Buches zusammengestellt, während speziellere Quellen in den einzelnen Geschichten zu finden sind.

Mein Dank geht an Martin Stöcker, Alexander Börsch und Theresa Wagner für sorgfältiges Lesen des Manuskripts, technische Hilfestellung sowie das Anfertigen von Abbildungen. Ferner danke ich dem Verlag Springer Spektrum für die Aufnahme des Werkes in das Verlagsprogramm. Hinweise der Leser sind jederzeit willkommen.

Bernd Luderer
Chemnitz, Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Zinsen, Kurse und Renditen – klassische Finanzmathematik

1 Wo ist mein Geld nur geblieben? Verlustausgleich nach Kursrutsch

Nur weil eine Aktie bereits fiel, heißt das noch nicht, dass sie nicht noch weiter fallen kann.
Börsenweisheit

Herr Obermayr reibt sich verdutzt die Augen: »Jesses Maria!« Da war er dem Rat des Börsengurus Kostolany »Aktien kaufen, liegen lassen, ruhig schlafen« gefolgt, hatte sich Solaraktien gekauft, anschließend eine Weltreise unternommen und sich nicht mehr um die Aktienkurse gekümmert. Und nun das – gerade einmal 12 % des ursprünglichen Kaufpreises sind seine Aktien noch wert. Schöne Bescherung! 200 Euro pro Stück hatte er bezahlt, nun liegt der Kurs nur noch bei 24 Euro.

Er hatte noch die Worte seines Spezis Niedermayr im Ohr: »Die Börsen atmen. Also keine Sorge, wenn eine Aktie einmal um 3 % fällt. Irgendwann steigt sie wieder um 3 % und alles gleicht sich aus.« Der hatte gut reden, von wegen 3 %. Die Solaraktien waren um 88 % gefallen! Wer weiß, ob sie jemals wieder um 88 % steigen? Augenblick mal ...

Was passiert denn überhaupt, wenn sie um 88 % steigen? Herr Obermayr rechnet und rechnet: Irgendetwas kann nicht stimmen. Hat ihm sein Freund die Unwahrheit gesagt? Wenn der Kurs von 24 Euro um 88 % ansteigt, so liegt der neue Kurs ja gerade einmal bei

$$24 \cdot \left(1 + \frac{88}{100}\right) = 24 \cdot 1{,}88 = 45{,}12 \quad [\text{Euro}].$$

Das ist ja meilenweit von 200 Euro entfernt! So ist das, wenn man auf den Rat der Freunde oder »Experten« hört.

Herr Obermayr seufzt und macht sich ans Rechnen. Angenommen, der Kaufpreis beträgt P und der Kurs fällt um S Prozent. Setzt man

B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
DOI 10.1007/978-3-658-02774-2_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

$s = \frac{S}{100}$, so liegt der neue Kurs bei $P_1 = (1 - s)P$. Nun ist der prozentuale Wachstumsfaktor G gesucht, um den der Kurs wieder ansteigen muss. Mit der Bezeichnung $g = \frac{G}{100}$ führt das auf den Ansatz

$$P_2 = (1+g)P_1 = (1+g)(1-s)P \stackrel{!}{=} P.$$

Nach Division durch P und kurzer Umformung erhält man

$$g = \frac{s}{1-s} \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{100S}{100-S}\,.$$

Damit ergeben sich beispielsweise die folgenden Werte:

S	5	10	20	50
G	5,26	11	25	100

»Um wie viel Prozent muss denn nun der Kurs meiner Aktien, die um 88 % gefallen sind, steigen?«, überlegt Herr Obermayr, und erhält nach kurzer Rechnung ... 733,33 %. Oh je! Ob das wirklich irgendwann passiert?[1]

Obwohl nun seine konkrete Frage beantwortet ist, grübelt Herr Obermayr weiter. »Der Niedermayr, der ist doch kein Dummer. Hat er eventuell doch recht damit, dass sich ein Kursverlust und Anstieg um denselben Prozentsatz ausgleichen, aber nur, wenn die Schwankung gering ist?«

Er probiert: Der Kurs sei 100 und soll um 1 % sinken. Dann beträgt er 99. Steigt er nun wieder um 1 %, so liegt er bei 99,99, was so gut wie 100 ist. Sinkt er um 3 % und steigt dann wieder, so rutscht er zunächst auf 97 und wächst anschließend auf 99,91. »Ja, der Niedermayr scheint recht zu haben. Der is scho a ganz a G'scheiter.«

[1] Selbst wenn der Aktienkurs wieder auf den ursprünglichen Stand ansteigt, erleidet Herr Obermayr einen Verlust durch entgangene Zinsen aus einer risikolosen Festzinsanlage, die er alternativ hätte tätigen können.

Der Grund liegt darin, dass für kleine x-Werte die Beziehung

$$(*) \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

gilt.[2] Damit lässt sich – zumindest für Werte von s nahe null – der Quotient $\frac{1}{1+s}$ durch die Differenz $1 - s$ ersetzen. Daher kann man die Division, die praktisch nur schriftlich oder mit Taschenrechner durchführbar ist, durch die Subtraktion ersetzen. Es lebe das Kopfrechnen!

Zurück zum Kursrutsch. Wenn also der Aktienkurs von P auf $\frac{P}{1+s}$ sinkt, so ist das ungefähr gleich $P(1-s)$. Steigt dieser Wert dann wieder um S Prozent, gilt

$$P_{\text{neu}} = P(1-s)(1+s) = P(1-s^2) \approx P,$$

da s^2 eine sehr kleine Zahl ist.

Übrigens nutzten die Kaufleute im Mittelalter beim sog. *kaufmännischen Diskontieren* genau die Beziehung $(*)$ aus, indem sie die Zinsen vom Endwert abzogen, anstatt zu dividieren (vgl. Grundformel (2)):

$$K_0 = K_t \cdot (1 - it) \approx \frac{K_t}{1+it}\,.$$

Wurde beispielsweise eine Rückzahlung von 1 000 Talern in einem halben Jahr bei 4 % jährlichen Zinsen vereinbart, so betrug die bar auszuzahlende Summe $B = 1\,000 \cdot (1 - 0{,}04 \cdot \frac{1}{2}) = 980$ Taler.[3]

[2] Diese ergibt sich aus der *Taylorentwicklung* der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in einer Umgebung des Punktes $x_0 = 0$ bzw. – äquivalent – aus der Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0, f(0))$. Beide lauten: $l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 - x$.

[3] Bei linearer Abzinsung hätten $\frac{1\,000}{1{,}02} = 980{,}39$ Taler ausgezahlt werden müssen.

2 Ein fairer Deal? Oder: Früh übt sich ...

Das Geld ist ja nicht weg, es ist nur woanders.
Börsenweisheit

Freitagnachmittag. Zwei Viertklässler, die auf eine Bahn warten, beschließen, bis zur Ankunft derselben noch schnell ein Eis zu essen. Leider reicht bei einem, nennen wir ihn Max, das Geld nicht. Der andere, Clemens, ist gern bereit, Max die fehlenden 60 Cent zu borgen.

»Dann gibst du mir einfach am Montag 80 Cent wieder zurück«, meint Clemens zu Max.

»Wieso denn 80 Cent, du hast mir doch nur 60 Cent gegeben?«, widerspricht Max.

»Na, du musst mir doch Zinsen dafür zahlen, dass ich dir das Geld bis Montag leihe«, erklärt Clemens, »das ist so üblich.«

Max sieht das ein und das Geschäft ist abgemacht. »Moment mal«, überlegt Max zu Hause, als er in Ruhe noch einmal das Gespräch Revue passieren lässt, »das ist aber ganz schön viel: 20 Cent Zinsen für 60 Cent.«

»Moment mal!«, meinen auch wir, »ist das nicht Wucher? Die Zeit zwischen Kapitalüberlassung und Rückzahlung beträgt ja nur drei Tage.«

Ehe wir den (indirekt vereinbarten) Zinssatz berechnen wollen, soll zunächst geklärt werden, was eigentlich Wucher ist. Von *Wucher* spricht man – vor allem im Zusammenhang mit Kreditverträgen –, wenn deren Zinsen und Gebühren im Vergleich zu marktüblichen deutlich überhöht sind. Allerdings gibt es in Deutschland keine genauen Vorgaben über die zulässige Höhe von Zinssätzen. Auch im Bürgerlichen Gesetzbuch (BGB) findet sich nichts Konkretes, jedoch wird die freie Gestaltung von Zinshöhe und Berechnungsmethoden durch den Begriff der »Sittenwidrigkeit« eingeschränkt. In § 138 BGB heißt es: »Ein

B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
DOI 10.1007/978-3-658-02774-2_2,

Rechtsgeschäft, das gegen die guten Sitten verstößt, ist nichtig. Nichtig ist insbesondere ein Rechtsgeschäft, durch das jemand unter Ausbeutung der Zwangslage, der Unerfahrenheit, des Mangels an Urteilsvermögen ... sich ... für eine Leistung Vermögensvorteile versprechen oder gewähren lässt, die in einem auffälligen Missverhältnis zu der Leistung stehen.« Dabei wird i. Allg. von einem auffälligen Missverhältnis ausgegangen, wenn der vereinbarte Zinssatz den marktüblichen um 100 % oder absolut um 12 Prozentpunkte übersteigt.

Zurück zur Frage, welchem jährlichen Zinssatz das zwischen den beiden Schülern vereinbarte Geschäft entsprechen würde.

Ein Jahr ist die am häufigsten anzutreffende *Zinsperiode*, also der Zeitraum, für den Zinsen zu zahlen sind. Auch bei der Beurteilung von Zinssätzen (»niedrig«, »hoch«) bezieht man sich in aller Regel auf ein Jahr, denn nur dafür hat man ein Gefühl. Da die für einen Zeitraum der Länge t zu zahlenden Zinsen Z_t direkt proportional zum eingesetzten Kapital K, dem Zinssatz i und der Laufzeit t (gemessen als Teil des Jahres) sind, gilt die Formel

$$Z_t = K \cdot i \cdot t.$$

Für das Beispiel mit Max und Clemens gilt: $Z_t = 0{,}2$, $K = 0{,}6$, $t = \frac{3}{360} = \frac{1}{120}$ (meist wird das Jahr zu 360 Zinstagen gerechnet, jeder Monat zu 30 Zinstagen). Aus der obigen Formel ergibt sich nach Umstellung zunächst $i = \frac{Z_t}{K \cdot t}$ und nach Einsetzen der konkreten Werte

$$i = \frac{0{,}2}{0{,}6 \cdot \frac{1}{120}} = \frac{2 \cdot 120}{6} = 40 = 4\,000\,\%.$$

Wenn das kein Wucher ist! Damit ist nach der geltenden Rechtslage die getroffene Zinsvereinbarung hinfällig und Max muss überhaupt keine Zinsen bezahlen.

Literatur:

Bürgerliches Gesetzbuch BGB, 70. Aufl., Dt. Taschenbuch Verlag, München 2012

3 »Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer!« Wie groß ist der gewährte Rabatt wirklich?

Das Ehepaar Wagner sieht sich nach neuen Wohnzimmermöbeln um. Am Einrichtungshaus prangt ein riesiges Werbebanner:

> *Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer auf Ihren Möbelkauf!*

»Das kommt uns gerade recht«, freut sich Frau Wagner, »da können wir 19 % sparen. Ausgezeichnet!«

»Da steckt bestimmt ein Trick dahinter.« Herr Wagner ist skeptisch. »Die ziehen bestimmt nicht einfach 19 % vom Verkaufspreis ab. Ich werde zu Hause einmal nachrechnen.«

Angenommen, ein Möbelstück kostet P Euro. Dann beträgt sein Preis abzüglich der Mehrwertsteuer von 19 % nur noch $P_1 = \frac{P}{1{,}19}$, denn schlägt man die Mehrwertsteuer auf diesen niedrigeren Betrag wieder drauf, ergibt sich gerade $P_1 + \frac{19}{100} \cdot P_1 = 1{,}19 P_1 = P$. Will man nun den Rabatt r berechnen, der hinter der Werbeaktion steckt, hat man vom Ansatz $P_1 = P \cdot (1 - r)$ auszugehen, was auf die Beziehung $P(1 - r) = \frac{P}{1{,}19}$ und nach Kürzen mit P auf $1 - r = \frac{1}{1{,}19}$ bzw.

$$r = 1 - \frac{1}{1{,}19} = \frac{1{,}19 - 1}{1{,}19} = \frac{0{,}19}{1{,}19} = 0{,}1597 = 15{,}97\,\%$$

führt.

»Ich habe es doch gewusst«, triumphiert Herr Wagner, ein Trick ist dabei, 19 % sind es nicht, es sind nur knapp 16 %.«

»Aber 16 % sind doch auch nicht schlecht«, beschwichtigt ihn seine Gattin.

»Ja, schon. Aber es sind keine 19 %, wie einem suggeriert wird«, grummelt Herr Wagner. Irgendwie ist er trotzdem unzufrieden.

B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
DOI 10.1007/978-3-658-02774-2_3, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

4 Die Kinder der Zinsen sind die Enkel des Kapitals. Zinseszinsrechnung

Überlässt man einem Dritten Kapital, vertraut man also einer Bank oder einem Freund oder auch einem Fremden sein Geld an, so erwartet man gemeinhin als Gegenleistung für den Kapitalverzicht ein Entgelt, die *Zinsen*. Je größer das geliehene bzw. angelegte Kapital, der vereinbarte *Zinssatz* und die Zeit der Geldanlage, desto höher sind die Zinsen. Als ein Bestandteil der finanziellen Vereinbarung ist die *Zinsperiode* festzulegen, also die Zeit, für die der dem Finanzgeschäft zugrunde liegende Zinssatz gilt. Meist ist das ein Jahr[4], es kann aber auch ein Halbjahr oder ein Monat sein. Üblicherweise werden die Zinsen am *Ende* der Zinsperiode gezahlt, Ausnahmen sind möglich.[5]

Sind K_0 das Kapital, i der Zinssatz (z. B. $i = 4\,\% = 0{,}04$) und t der Anteil an der Zinsperiode (z. B. $t = \frac{1}{12}$ für einen Monat), so betragen die Zinsen für eine Geldanlage im Zeitraum $[0, t]$

$$Z_t = K_0 \cdot i \cdot t.$$

Damit kann man die Zinsen anschaulich als »Kinder des Kapitals« bezeichnen.

Das Kapital wächst dann zusammen mit den Zinsen von K_0 im Zeitpunkt $t = 0$ (»heute«) auf

$$(*) \qquad K_t = K_0 + Z_t = K_0 \cdot (1 + it)$$

zum Zeitpunkt t. Diesen Betrag nennt man *Endwert* bei linearer Verzinsung. Lineare Verzinsung findet vor allem für $0 < t \leq 1$ oder – wie der Fachmann sagt – im *unterjährigen* Bereich Anwendung.

[4] So bedeutet beispielsweise 5 % p. a. = *per annum* oder *pro anno*, dass für 100 Geldeinheiten pro Jahr fünf Geldeinheiten an Zinsen zu zahlen sind.

[5] Etwa bei vorzeitiger Kontoauflösung oder bei *antizipativen*, d. h. zu Periodenbeginn zahlbaren Zinsen.

B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
DOI 10.1007/978-3-658-02774-2_4,

Nach einer Zinsperiode gilt

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q,$$

wie man aus Formel $(*)$ mit $t = 1$ erkennt. Dabei ist $q = 1 + i$ der sog. *Aufzinsungsfaktor*. Werden nun mehrere Zinsperioden betrachtet und die Zinsen nicht ausgezahlt, verbleiben sie also auf dem Konto, so vermehren sie das urspüngliche Kapital und werden in der nächsten Periode mitverzinst. Auf diese Weise kommen wir zu den Zinsen der Zinsen, gewissermaßen den »Enkeln und Urenkeln des Kapitals«. Mathematisch sieht das folgendermaßen aus:

In der zweiten Periode ist K_1 das Ausgangskapital und

$$K_2 = K_1 \cdot q = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2$$

das Endkapital. So geht es weiter:

$$K_3 = K_2 \cdot q = (K_0 \cdot q^2) \cdot q = K_0 \cdot q^3.$$

Nach n Perioden ergibt sich auf diese Weise die *Leibniz'sche Zinseszinsformel* (vgl. Grundformel (5)), auch *Endwertformel der geometrischen Verzinsung* genannt:

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot (1 + i)^n.$$

Oftmals wird diese Formel verallgemeinert, indem anstelle der ganzzahligen Laufzeit n (= Anzahl der Zinsperioden) eine beliebige reelle Zeit t eingesetzt wird:

$$K_t = K_0 \cdot q^t = K_0 \cdot (1 + i)^t.$$

Wie sich ein Kapital bei linearer und geometrischer Verzinsung bzw. bei verschiedenen Zinssätzen entwickelt, zeigen die folgenden beiden Abbildungen.