Ekbert Hering
Heinrich Steinhart (Hrsg.)

Taschenbuch der Mechatronik

2., überarbeitete Auflage

fv

HANSER

Hering/Steinhart (Hrsg.)
Taschenbuch der Mechatronik

Herausbegeber:

Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Dr. h. c. Ekbert Hering
Prof. Dr.-Ing. Heinrich Steinhart
Hochschule Aalen

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Heinz-Peter Bürkle (Kapitel 3)
Hochschule Aalen

Prof. Dr. Walter Götzmann (Kapitel 2)
Hochschule Mannheim

Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Dr. h. c. Ekbert Hering (Kapitel 1, 14)
Hochschule Aalen

Prof. Dr.-Ing. Gerald Kell (Kapitel 4)
Fachhochschule Brandenburg

Prof. Dr. sc. techn. Harald Loose (Kapitel 6,12)
Fachhochschule Brandenburg

Prof. Dipl.-Ing. Wilfried Mrha (Kapitel 10, 11)
Hochschule Mannheim

Dipl. Ing. (FH) Kai-Uwe Mrkor (Kapitel 13)
Fachhochschule Brandenburg

Dipl.-Ing. Karl Müller (Kapitel 14)
Marquardt GmbH Rietheim-Weilheim

Prof. Dr.-Ing. Heinrich Steinhart (Kapitel 1, 5, 9, 14)
Hochschule Aalen

Dipl.-Phys. Thomas Vetter (Kapitel 14)
ARADEX AG Lorch

Prof. Dr.-Ing. Gerd Wöstenkühler (Kapitel 8)
Hochschule Harz Wernigerode

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus Zimmermann (Kapitel 7)
Technische Universität Ilmenau

Taschenbuch der Mechatronik

herausgegeben von

Prof. Dr. mult. Dr. h. c. Ekbert Hering
Prof. Dr. Heinrich Steinhart

2., neu bearbeitete Auflage

Mit zahlreichen Bildern und Tabellen

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC www.fsc.org
FSC® C014889

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN: 978-3-446-43857-6
E-Book-ISBN: 978-3-446-43817-0

Einbandbild: Rosetta und Philae © ESA–C.Carreau/ATG medialab

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

http://www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Min. Ute Eckardt
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Kösel Media, Krugzell
Druck und Bindung: Friedrich Pustet, Regensburg
Printed in Germany

Vorwort zur 1. Auflage

Die Mechatronik beschreibt die **funktionale** und **räumliche Integration** von Komponenten aus den Bereichen **Mechanik, Elektronik** und **Informationsverarbeitung**. Sie ist zu einem wichtigen Innovationstreiber in Technik und Wirtschaft geworden. Im vorliegenden Taschenbuch sind die wichtigsten Themenbereiche der Mechatronik zusammengestellt.

Nach einer **Einführung** werden im ersten Kapitel die **mathematischen Grundlagen** vermittelt, die für das Verständnis der weiteren Kapitel notwendig sind. Die **Regelungstechnik** wird im zweiten Kapitel dargestellt. Sie ist eines der wichtigsten Teilgebiete der Mechatronik und beschäftigt sich mit der Analyse und Synthese von dynamischen Systemen. Das dritte Kapitel befasst sich mit der **Analogtechnik**, das vierte mit der **Digitaltechnik**. Die **Leistungselektronik** im fünften Kapitel beschreibt, wie mit Hilfe von elektronischen Ventilen das Steuern und Umformen von elektrischer Energie erfolgt. Für alle mechatronischen Systeme ist wichtig, das entscheidende Modell zu finden, das durch eine Computersimulation verifiziert werden kann. Die Schritte zur **Modellbildung** werden im sechsten Kapitel erläutert. Das siebte Kapitel behandelt die **mechanischen Teilsysteme**. Die Erfassung physikalischer und chemischer Größen durch elektrisch verarbeitbare Signale geschieht durch **Sensoren**. Sie werden im achten Kapitel vorgestellt. Den **Aktoren** sind drei Kapitel (9 bis 11) gewidmet, und zwar über **elektrische, hydraulische** und **pneumatische Aktoren**. Im Kapitel 12 sind die **Grundlagen** der **Informatik**, im Kapitel 13 die Arbeitsweise von **Mikrorechnern** behandelt. Kapitel 14 schließlich zeigt Anwendungsbeispiele für **mechatronische Systeme** aus vielen Bereichen.

Das vorliegende Taschenbuch ist als Nachschlagewerk für Studierende und Praktiker geschrieben. Für die sachkundige und konstruktive Mitarbeit möchten wir uns bei allen Autoren ganz herzlich bedanken. Unser Dank gilt aber auch Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, der uns in allen Phasen der Entstehung des Werkes stets freundlich und erfolgreich mit Rat und Tat unterstützt hat.

Allen Lesern wünschen wir, dass sie mit dem Wissen und den Informationen dieses Taschenbuches ihre Aufgaben schnell, effizient und erfolgreich lösen können. Unsere Leser mögen aber auch beim Lesen des Werkes die Faszination spüren, welche das Gebiet der Mechatronik als Innovationsgeber ausübt. Gerne sind wir für Hinweise und Verbesserungen dankbar.

Aalen, im September 2004

Ekbert Hering

Heinrich Steinhart

Vorwort zur 2., verbesserten Auflage

Das Taschenbuch der Mechatronik hat sich seit vielen Jahren als ein erfolgreiches Lehrbuch und Nachschlagewerk für Studierende und Praktiker erwiesen. Nach nunmehr 10 Jahren war es notwendig geworden, den Innovationen auf dem Gebiet der Mechatronik Rechnung zu tragen und alle Kapitel des vorliegenden Buches grundlegend neu zu bearbeiten und unsere Leser auf die neueste Literatur aufmerksam zu machen. Viele Leser haben uns zu sinnvollen Korrekturen veranlasst und dafür möchten wir ihnen an dieser Stelle herzlich danken.

Für die sachkundige und konstruktive Mitarbeit möchten wir uns bei allen Autoren ganz herzlich bedanken. Unser Dank gilt aber in besonderer Weise Frau Dipl.-Min. Ute Eckardt vom Fachbuchverlag Leipzig im Hanser-Verlag, der uns in allen Phasen des Werkes mit Rat und Tat stets freundlich und erfolgreich unterstützt hat.

Allen unseren Lesern wünschen wir, dass sie mit dem Wissen und den Informationen dieses Taschenbuches ihre Aufgaben schnell, effizient und erfolgreich lösen können. Unsere Leser mögen aber auch beim Lesen des Werkes die Faszination spüren, welche das Gebiet der Mechatronik als Innovationsgeber ausübt. Gerne sind wir für Hinweise und Verbesserungen aus der Leserschaft dankbar.

Aalen, im März 2015

Ekbert Hering

Heinrich Steinhart

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik

In diesem Kapitel werden ausgewählte Teile der Mathematik behandelt, die für die Mechatronik besonders wichtig sind.

1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen werden durch unterstrichenen Kleinbuchstaben dargestellt, zum Beispiel $\underline{z}$.

1.1.1 Definition komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen R dar. Durch diese Erweiterung lassen sich algebraische Gleichungen der Form $x^2 + 1 = 0$ lösen. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit C angegeben.

$$\mathrm{C} = \{\underline{z} \mid \underline{z} = a + i \cdot b \; mit \; a, b \in \mathrm{R}\} \tag{1.1}$$

Zur Darstellung einer komplexen Zahl $\underline{z}$ wird die **imaginäre Einheit i** eingeführt. Diese besitzt folgende Eigenschaft:

$$i = \sqrt{-1} \tag{1.2}$$

Für die Potenzen von i gilt:

$$i^{-1} = -i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i \tag{1.3}$$

In der Elektrotechnik wird häufig **j** als imaginäre Einheit verwendet, da der Buchstabe i für Ströme Verwendung findet.

1.1.2 Darstellungsformen

1.1.2.1 Komplexe Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $\underline{z}$ wird in der **komplexen Zahlenebene** (auch *Gauß'*sche Zahlenebene genannt) wie folgt dargestellt

$$\underline{z} = a + i \cdot b \tag{1.4}$$

Hierbei stellt **a** den **Realteil, b** den **Imaginärteil** und **i** die **imaginäre Einheit** der komplexen Zahl dar.

Die grafische Darstellung erfolgt in der „*Gauß'*schen" oder auch komplexen Zahlenebene (Bild 1.1). Dabei kann $\underline{z}$ als Punkt P oder als Zeiger $\underline{z}$ in der Ebene interpretiert werden.

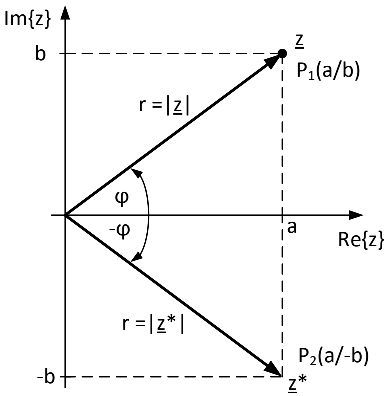

Bild 1.1
Komplexe Zahlenebene

Spiegelt man eine komplexe Zahl $\underline{z}$ an der reellen Achse, dann erhält man die zu $\underline{z}$ **konjugiert komplexe Zahl z*.**

$$\underline{z} = a + i \cdot b \xrightarrow{\text{konjugiert}} \underline{z}^* = a - i \cdot b \tag{1.5}$$

1.1.2.2 Polarformen

Eine komplexe Zahl $\underline{z}$ kann auch in **Polarkoordinaten** (Bild 1.1) dargestellt werden. Dabei wird der **Betrag** der komplexen Zahl $\underline{z}$ mit **r** und der **Winkel** mit $\boldsymbol{\varphi}$ bezeichnet.

Der Betrag r der komplexen Zahl $\underline{z}$ berechnet sich zu

$$\left|\underline{z}\right| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.6}$$

Hierbei beschreibt φ den Winkel, den die komplexe Zahl $\underline{z}$ mit der reellen Achse einschließt.

Im technischen Bereich wird der Winkel φ im Intervall $[-\pi, \pi]$ angegeben.

Berücksichtigt man die Vieldeutigkeit des Arkustangens, so gilt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{für} \quad x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & \text{für} \quad x < 0 \quad y \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & \textit{für} \quad x < 0 \quad y < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Mit der ***Euler'*schen Formel**

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi \tag{1.8}$$

kann eine komplexe Zahl $\underline{z}$ wie folgt in Polarkoordinaten dargestellt werden:

$$\underline{z} = r\cdot e^{i\cdot\varphi} \tag{1.9}$$

1.1.3 Rechenoperation mit komplexen Zahlen

Für den komplexen Zahlenkörper sind folgende Rechenoperationen definiert.

1.1.3.1 Addition und Subtraktion

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = \left(a_1 + \mathrm{i}\cdot b_1\right) \pm \left(a_2 + \mathrm{i}\cdot b_2\right) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i}\cdot(b_1 \pm b_2) \tag{1.10}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 &= \left(2 - \mathrm{i}\cdot 3\right) \pm \left(3 + \mathrm{i}\cdot 4\right) = (2 \pm 3) + \mathrm{i}\cdot((-3) \pm 4) \\ &= 5 + \mathrm{i}\cdot 1 \quad \text{(Addition)} \\ &= -1 - \mathrm{i}\cdot 7 \quad \text{(Subtraktion)} \end{aligned}$$

1.1.3.2 Multiplikation

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 &= \left(a_1 + \mathrm{i}\cdot b_1\right)\cdot\left(a_2 + \mathrm{i}\cdot b_2\right) \\ &= (a_1\cdot a_2 - b_1\cdot b_2) + \mathrm{i}\cdot(a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 &= \left(2 - \mathrm{i}\cdot 3\right)\cdot\left(3 + \mathrm{i}\cdot 4\right) \\ &= (2\cdot 3 - (-3)\cdot 4) + \mathrm{i}\cdot(2\cdot 4 + 3\cdot(-3)) \\ &= 18 - \mathrm{i}\cdot 1 \end{aligned}$$

1.1.3.3 Division

Die Division zweier komplexer Zahlen wird ausgeführt, indem man den Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert.

$$\begin{aligned} \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} &= \frac{\underline{z}_1\cdot\underline{z}_2^*}{\underline{z}_2\cdot\underline{z}_2^*} = \frac{\left(a_1 + \mathrm{i}\cdot b_1\right)}{\left(a_2 + \mathrm{i}\cdot b_2\right)} = \frac{\left(a_1 + \mathrm{i}\cdot b_1\right)\cdot\left(a_2 - \mathrm{i}\cdot b_2\right)}{\left(a_2 + \mathrm{i}\cdot b_2\right)\cdot\left(a_2 - \mathrm{i}\cdot b_2\right)} \\ &= \frac{(a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} + \mathrm{i}\cdot\frac{(a_2\cdot b_1 - a_1\cdot b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Beispiel:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(2 - \mathrm{i} \cdot 3)}{(3 + \mathrm{i} \cdot 4)} = \frac{(2 - \mathrm{i} \cdot 3) \cdot (3 - \mathrm{i} \cdot 4)}{(3 + \mathrm{i} \cdot 4) \cdot (3 - \mathrm{i} \cdot 4)}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4)}{(3^2 + 4^2)} + \mathrm{i} \cdot \frac{(3 \cdot (-3) - 2 \cdot 4)}{(3^2 + 4^2)}$$

$$= -\frac{6}{25} - \mathrm{i} \cdot \frac{17}{25} = -0{,}24 - \mathrm{i} \cdot 0{,}68$$

1.2 Matrizen

Matrizen werden durch fette kursive Großbuchstaben dargestellt, Vektoren mit fetten kursiven Kleinbuchstaben.

Definitionen von Matrizenarten

Eine (m, n)-Matrix ***A***, bestehend aus *m* **Zeilen** und *n* **Spalten,** hat die Form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Nachfolgend ist exemplarisch eine (2, 3)-Matrix dargestellt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

1.2.1 Quadratische Matrix

Bei einer quadratischen Matrix ist die **Zeilenanzahl** *m* und die **Spaltenanzahl** *n* identisch ($n = m$). Die **Hauptdiagonale** einer **quadratischen Matrix** wird durch die **Matrixelemente** $\boldsymbol{a}_{nm}$ gebildet, für die gilt $n = m$.

1.2.2 Symmetrische Matrix

Eine **symmetrische Matrix** ist eine spezielle Form der quadratischen Matrix. Alle Matrixelemente, die **symmetrisch** zur **Hauptdiagonalen** stehen, sind **identisch**.

1.2.3 Transponierte Matrix

Vertauscht man in einer Matrix die **Zeilen** mit den **Spalten**, so erhält man die **transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$**. Die nachfolgende Matrix ist die Transponierte zu (1.14).

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Beachte : Eine symmetrische Matrix bleibt beim Transponieren stets unverändert.

1.2.4 Spaltenvektor

Die Elemente einer **Spalte** einer Matrix $\boldsymbol{A}$ stellen einen **Spaltenvektor $\boldsymbol{a}$** dar. Definitionsgemäß ist ein Spaltenvektor eine 1-spaltige Matrix.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

1.2.5 Zeilenvektor

Die Elemente einer **Zeile** einer Matrix stellen einen **Zeilenvektor $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$** dar.

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Unter $\boldsymbol{a}$ (ohne hochgestelltes T) wird immer ein Spaltenvektor und unter $\boldsymbol{a}^{\mathbf{T}}$ (mit hochgestelltem T) immer ein Zeilenvektor verstanden.

1.2.6 Nullvektor *0*

Sind alle Elemente eines Vektors null, so spricht man von einem **Nullvektor *0***.

1.2.7 Einheitsmatrix *I*

Eine **Einheitsmatrix** ist stets eine quadratische Matrix ($m = n$). In der Hauptdiagonalen stehen die Elemente 1; alle anderen Elemente sind null.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

1.3 Rechenregeln für Matrizen

Nachfolgend sind die **wichtigsten Rechenregeln** der Matrizenrechnung zusammengefasst.

1.3.1 Addition von Matrizen

Die **Addition** von Matrizen

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.19}$$

erfolgt durch die **Addition** ihrer Elemente mit den gleichen Indizes. Es gilt:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \tag{1.20}$$

für i = 1 … m und k = 1 … n.

Die beiden Matrizen müssen in ihrer **Zeilen**- und **Spaltenanzahl übereinstimmen**.

1.3.2 Vektorrechnung

In Bild 1.2 stellt $\boldsymbol{r}$ einen Vektor dar. Die mathematische Beziehung des Vektors lautet $\mathbf{r} = x_1 \cdot \mathbf{e}_x + y_1 \cdot \mathbf{e}_y + z_1 \cdot \mathbf{e}_z$. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{e}$ den Einheitsvektor und x_1, x_2, x_3 die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{r}$.

Der Vektor $\boldsymbol{r}$ kann als Zeilenvektor $\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1)$ oder als Spaltenvektor $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ geschrieben werden. Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{r}$ ist durch $|\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ definiert. Die Winkel des Vektors $\boldsymbol{r}$ zwischen den Achsen x, y und z sind durch $\cos(\boldsymbol{r}, x) = \frac{x_1}{|\boldsymbol{r}|}$, $\cos(\boldsymbol{r}, y) = \frac{y_1}{|\boldsymbol{r}|}$ und $\cos(\boldsymbol{r}, z) = \frac{z_1}{|\boldsymbol{r}|}$ festgelegt.

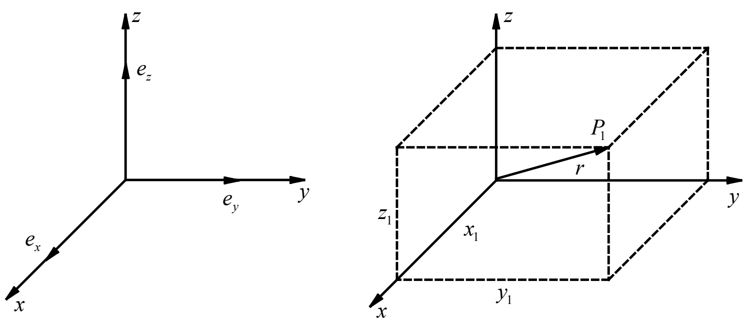

Bild 1.2 Vektordarstellung und Gerade

1.3.3 Skalares Produkt

Das skalare Produkt zweier Vektoren (Bild 1.3) ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2| \cdot \cos(\varphi) \tag{1.21}$$

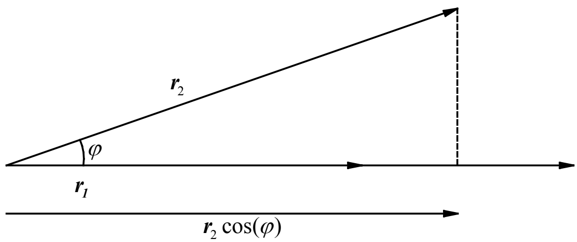

Bild 1.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist null, wenn die Vektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ orthogonal zueinander sind.

1.3.4 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ist nur im dreidimensionalen Raum definiert.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ lautet

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \mathbf{c} \tag{1.22}$$

$\boldsymbol{c}$ ist dabei ein Vektor der senkrecht auf den Vektoren $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ steht. $\boldsymbol{c}$ steht also senkrecht zur von $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ aufgespannten Ebene (Bild 1.4).

Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$ ist gleich dem Zahlenwert der Fläche des aus $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ gebildeten Parallelogramms und berechnet sich zu

$$|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cdot |\sin(\varphi)| \tag{1.23}$$

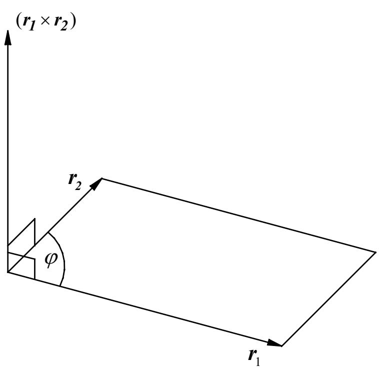

Bild 1.4 Vektorprodukt

1.3.5 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die **Multiplikation** einer Matrix mit einem **Skalar** *k*

$$\mathbf{B} = k \cdot \mathbf{A} \tag{1.24}$$

erfolgt durch **Multiplikation** jedes a_{ij} Elementes mit dem Faktor *k*.

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij} \tag{1.25}$$

1.3.6 Matrizenmultiplikation

Eine wichtige Voraussetzung für das **Matrizenprodukt** ist das Übereinstimmen der **Anzahl der Spalten** der 1. Matrix **A** und **der Anzahl der Zeilen** der 2. Matrix ***B***.

Unter dem Produkt

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{1.26}$$

einer (*m, s*)-Matrix ***A*** und einer (*s*, *n*)-Matrix ***B*** versteht man die (*m*, *n*)-Matrix ***P*** mit den Elementen

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \tag{1.27}$$

Dabei bezeichnet a_i den i-ten **Zeilenvektor** von ***A*** und b_j den j-ten **Spaltenvektor** von ***B***. Das Element p_{ik} ist also das **skalare Produkt** des i-ten Zeilenvektors von ***A*** mit dem k-ten Spaltenvektor von ***B***.

1.3.7 Wichtige Gesetze für Matrizen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{(das heißt, das Kommutativgesetz gilt nicht)} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{1.29}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{1.30}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.31}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.32}$$

1.3.8 Determinante

Determinanten von (*n* × *n*)-Matrizen lassen sich durch den **Entwicklungssatz** nach Laplace rekursiv berechnen.

Entwicklung nach der k-ten Spalte bzw. i-ten Zeile:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \left|\boldsymbol{S}_{ik}\right| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \left|\boldsymbol{S}_{ik}\right| \tag{1.33}$$

S_{ik} ist die $((n-1) \times (n-1))$-Matrix, die man erhält, wenn die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen wird.

Es ist dabei völlig egal, nach welcher Zeile oder Spalte entwickelt wird. In der Regel wählt man eine Zeile oder eine Spalte, die möglichst viele Nullen enthält. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung. Die Determinante wird durch senkrechte Striche gekennzeichnet.

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| \tag{1.34}$$

Beispiel: Die Determinante einer (3×3)-Matrix.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&+ 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\
&+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) \\
&= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Produktsatz für Determinanten:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \tag{1.35}$$

Die Determinante einer Inversen Matrix ist wie folgt definiert:

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \tag{1.36}$$

1.3.9 Inverse Matrix

Eine quadratische Matrix A ist regulär, wenn ihre **Determinante** det(A) **verschieden von Null** ist. Man spricht in diesem Falle auch von einer nicht singulären Matrix.

Für eine **quadratische**, **reguläre** Matrix $\boldsymbol{A}$ kann die **inverse Matrix** $\boldsymbol{A}^{-1}$ gebildet werden. Die Multiplikation einer Matrix $\boldsymbol{A}$ mit einer inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ ergibt die **Einheitsmatrix** $\boldsymbol{I}$. Damit können lineare Gleichungssysteme gelöst werden (vgl. Abschnitt 1.3.10).

Damit ergeben sich weitere Rechenregeln für Matrizen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{1.37}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{1.38}$$

$$\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1} \tag{1.39}$$

Für die quadratische, reguläre Matrix $\boldsymbol{A}$ ergibt sich die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ nach der folgenden Beziehung:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{adj(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} \tag{1.40}$$

Dabei stellt adj($\boldsymbol{A}$) die **Adjunkte** und det($\boldsymbol{A}$) = $|\mathbf{A}|$ die **Determinante** der Matrix $\boldsymbol{A}$ dar.

Zur Bildung der Adjunkten adj($\boldsymbol{A}$) der Matrix $\boldsymbol{A}$ wird jedes Element a_{ij} durch den Kofaktor A_{ij} ersetzt und die entsprechende Matrix transponiert. Der Kofaktor A_{ij} ist definiert durch

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij} \tag{1.41}$$

wobei D_{ij} die Determinante derjenigen Matrix ist, die aus $\boldsymbol{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

1.3.10 Darstellung von linearen Gleichungssystemen mithilfe von Matrizen

Ein **lineares Gleichungssystem** der Form

$$\begin{array}{ll} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots.+a_{1n}\cdot x_n & =y_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots.+a_{2n}\cdot x_n & =y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}\cdot x_m+a_{m2}\cdot x_2+\ldots.+a_{mn}\cdot x_n & =y_m \end{array} \tag{1.42}$$

kann in der **Matrizendarstellung**

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{y} \tag{1.43}$$

geschrieben werden mit

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

und

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix};\ y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.45}$$