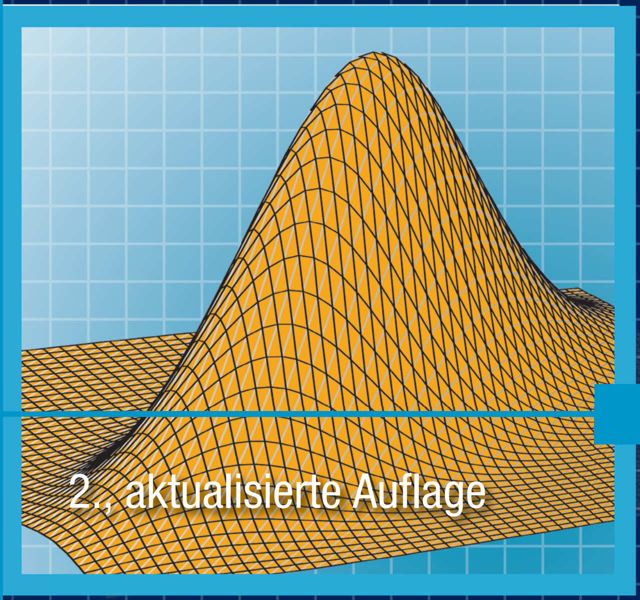
Hans-Jürgen Dobner
Bernd Engelmann

Mathematik-Studienhilfen

Analysis 2

Integralrechnung und
mehrdimensionale Analysis



2., aktualisierte Auflage

fv

HANSER

Hans-Jürgen Dobner ◆ Bernd Engelmann

Analysis 2

Mathematik - Studienhilfen

Herausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Engelmann
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig (FH)
Fakultät Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Zu dieser Buchreihe

Die Reihe Mathematik-Studienhilfen richtet sich vor allem an Studierende technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen an Hochschulen und Universitäten.
Die mathematische Theorie und die daraus resultierenden Methoden werden korrekt aber knapp dargestellt. Breiten Raum nehmen ausführlich durchgerechnete Beispiele ein, welche die Anwendung der Methoden demonstrieren und zur Übung zumindest teilweise selbständig bearbeitet werden sollten.
In der Reihe werden neben mehreren Bänden zu den mathematischen Grundlagen auch verschiedene Einzelgebiete behandelt, die je nach Studienrichtung ausgewählt werden können. Die Bände der Reihe können vorlesungsbegleitend oder zum Selbststudium eingesetzt werden.

Bisher erschienen:

Dobner/Engelmann, *Analysis 1*
Dobner/Engelmann, *Analysis 2*
Dobner/Dobner, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*
Gramlich, *Lineare Algebra*
Gramlich, *Anwendungen der Linearen Algebra*
Knorrenschild, *Numerische Mathematik*
Knorrenschild, *Vorkurs Mathematik*
Martin, *Finanzmathematik*
Nitschke, *Geometrie*
Preuß, *Funktionaltransformationen*
Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*
Stingl, *Operations Research – Linearoptimierung*
Tittmann, *Graphentheorie*

Analysis 2

Integralrechnung und mehrdimensionale Analysis

von Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner und
Prof. Dr. Bernd Engelmann

2., aktualisierte Auflage

mit 29 Bildern, 105 Beispielen und 51 Aufgaben

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren

Prof. Dr. Hans-Jürgen Dobner Kapitel 9 bis 12
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Fakultät Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Prof. Dr. Bernd Engelmann Kapitel 13 bis 16
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Fakultät Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Bibliografische Information der Deutschen Nationalibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-43835-4
E-Book-ISBN 978-3-446-43837-8

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Leipzig
Druck und Binden: CPI buchbücher.de
Printed in Germany

Vorwort

Nach der positiven Aufnahme, welche die Analysis 1 gefunden hat, legen wir nun mit der Analysis 2 den zweiten Band dieser Reihe zur Analysis vor.

In acht Kapiteln werden schwerpunktmäßig die Integralrechnung von Funktionen einer reellen Veränderlichen sowie die Differenziation und Integration bei Funktionen, die von mehreren reellen Veränderlichen abhängen, sowie Anwendungen behandelt. Breiten Raum nehmen Potenzreihen und Fourier-Reihen ein, weiter werden der Kurvenbegriff und das Kurvenintegral entwickelt.

Bei der Auswahl des Stoffes haben wir uns am Inhalt der an Hochschulen im zweiten Semester zum Pflichtstudium gehörenden Vorlesungen zur Analysis orientiert. Dabei haben wir das bereits im ersten Teil eingesetzte bewährte didaktische Konzept beibehalten und legen eine überschaubare Sammlung ausführlich durchgerechneter, typischer Beispiele vor. Dabei wurde auf solche Aufgaben zurückgegriffen, welche in Umfang und Schwierigkeit prüfungsrelevant sind. Die erforderliche mathematische Theorie wird der Zielsetzung der Reihe „Mathematik-Studienhilfen“ entsprechend, in knapper Weise aufbereitet. Der vorgegebene Rahmen bedingt eine Beschränkung auf grundlegende mathematische Sachverhalte und Verzicht auf Beweise, diese können einer Vielzahl einschlägiger Lehrbücher entnommen werden.

Bei der Konzeption haben wir uns von den Erfordernissen der Studierenden vorwiegend technischer Fachrichtungen an Fachhochschulen und technischen Hochschulen leiten lassen. Zur Vorbereitung auf Lehrveranstaltungen, zur Prüfungsvorbereitung und Wiederholung steht häufig nur ein knapper Zeitraum zur Verfügung. Zur Bewältigung dieser Aufgabe wird daher von Studierenden eine Sammlung ausführlich begründeter Lösungen in Kombination mit einer kurzgefassten Darstellung der erforderlichen Theorie gefordert. Diesem Wunsch entsprechen wir mit unseren beiden Bänden, indem wir mathematische Schlussweisen an Beispielen sehr ausführlich darlegen. Unser Hauptaugenmerk ist auf die Vermittlung unabdingbarer praktischer mathematischer Fähigkeiten gerichtet, deshalb können die Lehrinhalte nur andeutungsweise praktisch motiviert werden, dennoch wurden, wenn immer es möglich war, Bezüge zur Praxis und den Anwendungen hergestellt.

Die Bände Analysis 1 und Analysis 2 stellen eine Einheit dar, was durch fortlaufende Kapitelnummerierung zum Ausdruck kommt. Beide Bände können daher sowohl als vorlesungsbegleitendes Material, als auch zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden. Die Nummerierung vom ersten Band fortsetzend, beginnen wir mit dem 9. Kapitel. Verweise auf den ersten Band sind somit leicht möglich, so bezieht sich z. B Definition 3.1 auf die entsprechende Definition im Band Analysis 1. Die Bücher eignen sich darüber hinaus auch zum Selbststudium und werden daher Studierenden technischer, wirtschaftswissenschaftlicher und wirtschaftsmathematischer Fachrichtungen vorwiegend an Fachhochschulen und Technischen Hochschulen beim Erlernen der Analysis von Nutzen sein.

In die vorliegende 2. Auflage sind Hinweise und Anregungen von Kollegen und Studierenden eingeflossen, für die wir uns herzlich bedanken. Damit konnten Druckfehler beseitigt und die Darstellung präzisiert werden. Für die bewährt angenehme und erfreuliche Zusammenarbeit sprechen wir Frau Fritzsch, vom Fachverlag, sowie dem Fachbuchverlag Leipzig selbst, unseren herzlichen Dank aus.

Leipzig im Frühjahr 2013

Hans-Jürgen Dobner
Bernd Engelmann

Inhaltsverzeichnis

9 Integralrechnung

In Analysis 1, Kapitel 7 haben wir uns mit dem Differenzieren beschäftigt haben, nun befassen wir uns mit der Umkehrung der Differenziation, der Integration..

9.1 Das unbestimmte Integral

Wir haben es mit folgendem Problem zu tun: Gegeben ist eine stetige reellwertige Funktion $y = f(x), x \in (a,b) \subseteq \mathbf{R}$; gesucht ist eine reelle Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$.

Beispiel 9.1

Bestimmen Sie zu $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$.

Lösung: Die Funktion $F(x) = \frac{\mathrm{x}^3}{3}$ erfüllt die vorstehende Forderung, denn es gilt $F'(x) = f(x)$. ■

Definition 9.1

Eine im Intervall $[a,b]$ definierte Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn für alle $x \in [a,b]$ die Beziehung $F'(x) = f(x)$ gilt.

Bemerkung: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$, aber auch $\frac{x^3}{3} + 7$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$.

Satz 9.1

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, so hat jede andere Stammfunktion von $f(x)$ die Form $F(x) + C$, dabei ist C eine beliebige reelle Konstante. $F(x) + C$ heißt **unbestimmtes Integral** der Funktion $f(x)$. Für das unbestimmte Integral schreibt man $\int f(x)\mathrm{d}x$. Es gilt

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, C \in \mathbf{R}.$$

Bemerkung: Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation, denn beim Differenzieren ist zu gegebener Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$

gesucht, während bei der Integration zu einer gegebener Ableitung $y' = f'(x)$ eine Stammfunktion $y = f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x$ gesucht ist.

Hinweis: Alle Stammfunktionen von $f(x)$ besitzen an allen Stellen die gleiche Steigung, da die Stammfunktionen durch Parallelverschiebung in y-Richtung ineinander übergehen. Das Weglassen der Integrationskonstanten kann zu Fehlern führen!

Übersicht: Stammfunktionen elementarer Funktionen

$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ C \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}, n \neq -1$
$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ C \in \mathbf{R}, a \neq -1, x > 0$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C,\ C \in \mathbf{R}$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ C \in \mathbf{R}$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ C \in \mathbf{R}$
$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C,\ C \in \mathbf{R}$
$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C,\ C \in \mathbf{R}$
$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C,\ C \in \mathbf{R}, x \neq 0$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C,\ C \in \mathbf{R}, x \neq k\pi, \mathrm{k} \in \mathbf{Z}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C,\ C \in \mathbf{R}, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

9.2 Integrationsregeln

Das Problem, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ zu bestimmen, kann mit Hilfe verschiedener Integrationsregeln gelöst werden. Wir stellen nachfolgend die wichtigsten Integrationsregeln zusammen. Die Gültigkeit dieser Beziehungen kann durch Differenzieren beider Seiten geführt werden. Die Integrationskonstante bezeichnen wir durchgängig mit C.

Satz 9.2

Summenregel $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$

Faktorregel $\int \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ \alpha \in \mathbf{R}.$

Beispiel 9.2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \tan^2(x)$, wobei $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Lösung:

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C. \quad ■$$

Satz 9.3

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien im Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar. Dann lautet die Methode der **partiellen Integration**

$$\int f(x) g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung: Die partielle Integration ist sinnvoll, wenn die Berechnung von $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ einfacher ist als die Berechnung von $\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$ Die partielle Integration entspricht der Produktregel bei der Differenziation.

Beispiel 9.3

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\ln x, x > 0.$

Lösung: Partielle Integration mit $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = 1$ liefert

$$\int \ln x\ \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\ \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + C. \quad ■$$

Hinweis: Manchmal ist es erforderlich die partielle Integration mehrfach auszuführen, insbesondere wenn ein Faktor im Integral eine Potenz von x ist.

Beispiel 9.4

Berechnen Sie durch mehrfache partielle Integration das unbestimmte Integral $\int x^2\, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$

Lösung: Mit $f(x) = x^2$ und $g'(x) = \mathrm{e}^x$ erhalten wir durch partielle Integration

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + C.$$

Erneute partielle Integration liefert, mit $f(x) = x$ und $g'(x) = \mathrm{e}^x$,

$$\int x\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

Insgesamt haben wir:

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C. \quad ■$$

Beispiel 9.5

Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der partiellen Integration das unbestimmte Integral $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Lösung: Wir schreiben das Integral in der Form

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x \cos x\,\mathrm{d}x,$$

wählen $f(x) = \cos x$ und $g'(x) = \cos x$ und erhalten durch partielles Integrieren

$$\int \cos x \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\,\cos x - \int \sin x(-\sin x)\mathrm{d}x = \sin x\,\cos x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Unter Verwendung der Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x,$$

und daraus

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\,\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$2\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\,\cos x + x + 2C, \text{ d.h. } \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x\,\cos x + x}{2} + C. \quad ■$$

Satz 9.4

Ist die Funktion f im Intervall I stetig und die Funktion g in $W(f)$ stetig differenzierbar sowie umkehrbar, dann gilt die **Substitutionsregel**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u \text{ mit } x = g(u), \text{ d.h. es ist } u = g^{-1}(x).$$

Bemerkung: Die Substitutionsregel der Integration entspricht der Kettenregel bei der Differenziation. Die Umkehrbarkeit der Funktion g ist beispielsweise dann gewährleistet, wenn $g'(u) < 0$ oder $g'(u) > 0$ gilt.

Beispiel 9.6

Mit Hilfe der Substitution $x = \sqrt{u}$ berechne man das unbestimmte Integral $\int 2x \cos x^2 \, \mathrm{d}x$.

Lösung: Mit $x = \sqrt{u} = g(u)$ folgt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = g'(u) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}$ und $g'(u) > 0$ für $u > 0$.

Es folgt $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ und weiter durch Einsetzen

$$\int 2x \cos x^2 \, \mathrm{d}x = \int 2\sqrt{u} \cos u \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \int \cos u \, \mathrm{d}u = \sin u + C.$$

Mit der Rücksubstitution $u = x^2$ erhalten wir

$$\int 2x \cos x^2 \, \mathrm{d}x = \sin u + C = \sin x^2 + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 9.7

Verwenden Sie die Substitution $u = 1 - x^2$, $x \in (-1,1)$ zur Berechnung des unbestimmten Integrals $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

Lösung: Es ist $u = g^{-1}(x) = 1 - x^2, x \in (-1,1)$, daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x, \text{ somit } \mathrm{d}u = -2x \, \mathrm{d}x.$$

Anwenden der Substitutionsregel ergibt

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u} + C,$$

Rücksubstitution liefert

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 9.8

Man berechne $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$ mittels der Substitution $x = g(u) = u^2$.

Lösung: Um die Umkehrbarkeit von g zu gewährleisten, müssen wir $u > 0$ voraussetzen. Durch Differenzieren von $x = g(u) = u^2$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2u, \text{ d.h. } \mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u \text{ und } g'(u) = 2u > 0 \text{ für } u > 0.$$

Damit erhält man

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u = 2\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = 2\left(u - \ln\left|u+1\right|\right) + C.$$

Die Rücksubstitution darf nicht vergessen werden und liefert

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right) + C. \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Es gibt i. Allg. mehrere Substitutionen, welche zum Ziel führen. In Beispiel 9.8 hätte man auch die Substitution $u = \sqrt{x}+1$ verwenden können.

9.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

Häufig sind Stammfunktionen rationaler Funktionen zu bestimmen. Für die Integration rationaler Funktionen steht die Methode der **Partialbruchzerlegung** zur Verfügung.

Rationale Funktionen $R(x)$ können in der Form

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_m x^m}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0$$

geschrieben werden. Die rationale Funktion $R(x)$ heißt echt gebrochen, wenn der Grad n des Zählerpolynoms $P_n(x)$ kleiner als der Grad m des Nennerpolynoms $Q_m(x)$ ist. Wir führen die Partialbruchzerlegung im Reellen durch. Die Partialbruchzerlegung kann an Hand eines Algorithmus formuliert werden.

- 1.) Falls der Zählergrad n größer oder gleich dem Nennergrad m ist, wird der Integrand durch eine Polynomdivision in ein Polynom $G(x)$ vom Grad n–m und eine echt gebrochenrationale Funktion aufgespalten

  $R(x) = G(x) + \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(x)$ ist jetzt ein Polynom vom Grad $n < m$.

- 2.) Durch Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms wird $Q_m(x)$ in ein Produkt von linearen $(x - x_i)^k$ und quadratischen $(x^2 + bx + c)^l$ Faktoren mit $b^2 - 4c < 0$ zerlegt.

- 3.) Die echt gebrochenrationale Funktion

  $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_m x^m}$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ wird anschließend in eine

  Summe von Partialbrüchen mit unbestimmten reellen Koeffizienten $A, A_1, A_{2,} \ldots\ldots, B, B_1, B_2$ zerlegt, wobei für die einzelnen Faktoren des Nennerpolynoms folgender Ansatz (siehe Tab. 9.1) zu wählen ist:

Tabelle 9.1 Ansatz bei der Partialbruchzerlegung

Typ des Faktors	**Ansatz**
$x - x_i$ einfacher linearer Faktor des Nenners	$\dfrac{A}{x - x_i}$
$(x - x_i)^k$ k-facher linearer Faktor des Nenners	$\dfrac{A_1}{x - x_i} + \dfrac{A_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x - x_i)^k}$
$x^2 + px + q$ einfacher quadrat. Faktor des Nenners mit $p^2 - 4q < 0$.	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$
$(x^2 + px + q)^l$ l-facher quadratischer Faktor des Nenners mit $p^2 - 4q < 0$.	$\dfrac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \dfrac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \dfrac{A_l x + B_l}{(x^2 + px + q)^l}$

- 4.) Bestimmung der unbekannten reellen Konstanten $A, A_1, A_{2,} \dots$ und $B, B_1, B_2 \dots$ durch Multiplikation mit dem Hauptnenner und anschließendem Koeffizientenvergleich oder Einsetzen verschiedener x-Werte.
- 5.) Integration des Polynoms $G(x)$ und der Partialbrüche. Bei der Integration der Partialbrüche kommen nur die in Tab. 9.2 aufgeführten Integrale vor, dabei ist C die Integrationskonstante:

Tabelle 9.2 Integrale rationaler Ausdrücke

Integral	**Stammfunktion**
$\int \frac{A}{x - x_i} \mathrm{d}x$	$A \ln\lvert x - x_i \rvert + C,\ x \neq x_i$
$\int \frac{A}{(x - x_i)^k} \mathrm{d}x$	$-\frac{A}{(k-1)(x - x_i)^{k-1}} + C,\ k > 1,\ x \neq x_i$
$\int \frac{1}{x^2 + px + q} \mathrm{d}x,$ $p^2 - 4q < 0$	$2 \frac{1}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C,\ 4q - p^2 > 0$
$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \mathrm{d}x,$ $p^2 - 4q < 0.$	$\frac{A}{2} \ln\lvert x^2 + px + q \rvert + \left(B - \frac{1}{2} Ap \right) \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q} + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^l},$ $p^2 - 4q < 0$	$\frac{1}{(l-1)(4q - p^2)} \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^{l-1}}$ $+ \frac{4l - 6}{(l-1)(4q - p^2)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + C,\ l > 1$
$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^l} dx,$ $p^2 - 4q < 0$	$-\frac{A}{2(l-1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{l-1}}$ $+ \left(B - \frac{1}{2} Ap \right) \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^l} + C,\ l > 1$

Die bei der Partialbruchzerlegung durchzuführenden Schritte sind nachfolgend nochmals kurz zusammengefasst.

Integration rationaler Funktionen der Form $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

- Falls $n \geq m$ wird der Integrand durch Polynomdivision in die Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegt.
- Produktzerlegung des Nenners in reelle lineare und reelle quadratische Faktoren.
- Ansatz für die Partialbruchzerlegung des echt gebrochenrationalen Anteils mit unbestimmten Koeffizienten.
- Bestimmung der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich bzw. Einsetzen spezieller Werte.
- Integration der erhaltenen rationalen Ausdrücke.

Beispiel 9.9

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden Funktion $f(x) = \frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)}, x > 1.$

Lösung: Der Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad. Das Nennerpolynom hat nur einfache reelle Nullstellen, daher lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $x(x-1)(x+1)$ folgt

$$6x^2 - x + 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A, B, C setzen wir für x nacheinander die Nennernullstellen 0, 1 und –1 ein:

$$x = 0 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1.$$

$$x = 1 \Rightarrow 6 = 2B \Rightarrow B = 3.$$

$$x = -1 \Rightarrow 8 = 2C \Rightarrow C = 4.$$

Die Partialbruchzerlegung lautet somit

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 9.10

Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung alle Stammfunktionen der Funktion $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2-2x+2}{\left(x^2+2\right)^2}, x\in \mathbf{R}$.

Lösung: Da der Grad des Nennerpolynoms nicht größer als der Grad des Zählerpolynoms ist, muss zuerst eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+3x^2-2x+2\right):\left(x^4+4x^2+4\right)=1\\
\underline{-\left(x^4+4x^2\qquad\quad +4\right)}\\
\qquad -x^2-2x-2
\end{array}
$$

und der Integrand f kann als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenrationalen Funktion dargestellt werden

$$f(x)=\frac{x^4+3x^2-2x+2}{\left(x^2+2\right)^2}=1-\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Das Aufspalten in eine Summe von Partialbrüchen ist ohne weitere Rechnung möglich

$$f(x)=1-\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2+2\right)^2}=1-\frac{1}{x^2+2}-\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Integration der Partialbrüche ergibt

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x^2+2}-\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}\right)\mathrm{d}x=x-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{x^2+2}+K, K\in\mathrm{R}.\ \blacksquare$$

Beispiel 9.11

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral $\displaystyle\int\frac{2x^3+4}{x^4-x^2}\mathrm{d}x$.

Lösung: Der Integrand ist eine echt gebrochenrationale Funktion. Durch Ausklammern des Faktors x^2 lässt sich das Nennerpolynom x^4-x^2 als Produkt linearer Faktoren schreiben

$$x^4-x^2=x^2\left(x^2-1\right)=x^2(x-1)(x+1)=x\cdot x(x-1)(x+1).$$

Somit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^3+4}{x^4-x^2}=\frac{2x^3+4}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1},$$

daraus folgt

$$2x^3+4=Ax(x-1)(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A, B, C, D setzen wir für x nacheinander die Zahlenwerte 0, 1, –1 und 2 ein:

$$x=0\Rightarrow 4=-B\Rightarrow B=-4$$

$$x=1\Rightarrow 6=2C\Rightarrow C=3$$

$$x=-1\Rightarrow 2=-2D\Rightarrow D=-1.$$

Berücksichtigen wir diese Werte, so erhalten wir durch Einsetzen von $x=2$

$$20=6A+3B+12C+4D \text{ und damit } A=0.$$

Die Zerlegung des Integranden in eine Summe von Partialbrüchen lautet

$$\frac{2x^3+4}{x^4-x^2}=\frac{-4}{x^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}.$$

Mit Tabelle 9.2 gelingt nun die Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int\frac{2x^3+4}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-4}{x^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{x}+3\ln|x-1|-\ln|x+1|=\frac{4}{x}+\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|+K, K\in\mathbf{R}.\ \blacksquare$$

9.4 Das bestimmte Integral

Eine wichtige Anwendung der Integralrechnung besteht in der Bestimmung des Inhalts der Fläche, welche zwischen dem Graphen einer positiven (bzw. negativen) Funktion und der x-Achse liegt. Dies führt zum Begriff des bestimmten Integrals; gleichzeitig wird dadurch auch ein geometrischer Zugang zur Integralrechnung erschlossen.

Gesucht ist die Fläche A zwischen dem Graphen einer im Intervall $[a,b]$ definierten Funktion $f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x=a, x=b$ (s. Bild 9.1). Dabei gehen wir folgendermaßen vor: