N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

INTÉGRATION

Chapitre 5

Springer

Réimpression inchangée de la seconde édition de 1967

ISBN-10 3-540-35333-X Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35333-1 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

PRÉFACE À LA SECONDE ÉDITION

Les principales modifications apportées au texte du chapitre V portent sur les points suivants.

L'intégrale supérieure essentielle possédant, à bien des égards, des propriétés plus satisfaisantes que l'intégrale supérieure ordinaire (voir surtout la prop. 11 du § 1), le paragraphe qui lui est consacré a été développé. De même, on a traité avec plus de détail la théorie des familles sommables de mesures positives (§ 2).

La notion de *diffusion* a été introduite au paragraphe 3; celle de famille μ-adéquate de mesures positives a été légèrement généralisée, de manière à permettre la composition des diffusions.

Les mesures complexes ont été traitées de manière plus systématique; cela n'a exigé la plupart du temps que des changements mineurs, sauf au paragraphe 5, où l'on a dû abandonner partiellement le point de vue des espaces de Riesz.

Enfin, diverses démonstrations ont été modifiées, pour permettre l'extension ultérieure des resultats au cas des espaces séparés non nécessairement localement compacts, qui seront traités au chapitre IX.

Nancago, automne 1965

N. Bourbaki

CHAPITRE V

INTÉGRATION DES MESURES

Dans tout ce chapitre, on désigne par T *un espace localement compact, par* μ *une mesure positive sur* T. *Pour toute partie* A *d'un ensemble* E, *on désigne par* φ_A *la fonction caractéristique de* A (*si aucune confusion n'en résulte*). *Par fonction numérique, nous entendrons toujours une fonction prenant ses valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *donc pouvant prendre les valeurs* $+\infty$ *et* $-\infty$. *L'ensemble des fonctions numériques positives définies dans* E *sera désigné par* $\mathscr{F}_+(E)$, *ou simplement par* $\mathscr{F}_+$ *si aucune confusion n'en résulte. On convient de définir les produits* $0 \,.\, (+\infty)$ *et* $0 \,.\, (-\infty)$ *en leur donnant la valeur* 0; *si f est une fonction numérique définie dans* E, *et* A *une partie de* E, $f\varphi_A$ *désigne donc la fonction qui coïncide avec f dans* A *et est égale à* 0 *dans* $\complement$A. *Pour tout point a d'un espace localement compact, on désigne par* ε_a *la mesure définie par la masse unité placée au point a* (chap. III, 2^e éd., § 1, n° 3).

La notion d'intégrale supérieure essentielle (resp. *de fonction essentiellement intégrable*), *qui sera définie au* § 1, *coïncide, comme on le verra, avec la notion d'intégrale supérieure* (resp. *de fonction intégrable*) *lorsque* T *est un espace localement compact* dénombrable à l'infini (*Top. gén.*, 4^e éd., chap. I, § 9, n° 9).

Le lecteur qui ne s'intéresse qu'à l'intégration dans les espaces localement compacts dénombrables à l'infini peut donc omettre la lecture des n^{os} 1 *à* 3 *du* § 1; *dans le reste du chapitre, il obtiendra des énoncés valables lorsque les espaces envisagés sont dénombrables à l'infini, en supprimant les mots «essentiel» et «essentiellement», et en remplaçant le signe* $\mu^\bullet$ *par* μ^* *et le signe* $\int^\bullet$ *par* $\int^*$.

Dans les paragraphes 1 *à* 4, *le mot* mesure *signifiera toujours* mesure positive; *les autres mesures seront appelées explicitement, suivant le cas,* mesures réelles non nécessairement positives *ou* mesures complexes.

§ 1. Intégrale supérieure essentielle

1. Définition de l'intégrale supérieure essentielle

DÉFINITION 1. — *Pour toute fonction* $f \in \mathscr{F}_+(\mathrm{T})$, *on appelle intégrale supérieure essentielle de* f *par rapport à* μ, *et on note* $\mu^\bullet(f)$, *la borne supérieure, finie ou non, de l'ensemble des nombres* $\mu^*(f\varphi_{\mathrm{K}})$ *où* K *parcourt l'ensemble des parties compactes de* T. *Pour toute partie* A *de* T, *on pose* $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \mu^\bullet(\varphi_{\mathrm{A}})$.

On utilise aussi les notations $\int^\bullet f\,d\mu$, $\int^\bullet f(t)\,d\mu(t)$, $\int^\bullet f\mu$.

Comme $f\varphi_{\mathrm{K}} \leqslant f$ pour toute partie compacte K de T, on a

$$\int^\bullet f\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu. \tag{1}$$

On peut avoir $\mu^\bullet(f) \neq \mu^*(f)$; en effet, la condition $\mu^*(f) = 0$ signifie que f est *négligeable* tandis que la condition $\mu^\bullet(f) = 0$ signifie que f est *localement négligeable* (chap. IV, § 5, n° 2, prop. 5), et il peut exister des ensembles localement négligeables et non négligeables (chap. IV, § 1, exerc. 5).

L'application $\mu^\bullet$ de $\mathscr{F}_+(\mathrm{T})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ coïncide avec μ sur $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$. Il en résulte que deux mesures μ_1 et μ_2 telles que $\mu_1^\bullet = \mu_2^\bullet$ sont égales.

PROPOSITION 1. — a) *Si* f *et* g *sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *égales localement presque partout, on a* $\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(g)$.

b) *Si* f *et* g *sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *telles que* $f \leqslant g$, *on a* $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^\bullet(g)$.

c) *Si* f *est une fonction numérique* $\geqslant 0$, *et* α *un nombre* $\geqslant 0$, *on a* $\mu^\bullet(\alpha f) = \alpha\mu^\bullet(f)$.

d) *Si* f *et* g *sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *on a* $\mu^\bullet(f+g) \leqslant \mu^\bullet(f) + \mu^\bullet(g)$.

e) *Si* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite croissante de fonctions numériques* $\geqslant 0$, *et si* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, *on a* $\mu^\bullet(f) = \lim_{n\to\infty} \mu^\bullet(f_n)$.

Les propriétés a), b), c), d) se déduisent aussitôt des propriétés correspondantes de l'intégrale supérieure: a) de la proposition 6 du chap. IV, § 2, n° 3 et de la proposition 5 du chap. IV, § 5, n° 2; b), c), d) des propositions 10, 11, 12 du chap. IV, § 1, n° 3. Pour établir e), désignons par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes de T; nous avons, d'après le théorème 3 du chap. IV, § 1, n° 3:

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{\bullet}(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \mu^*(f_n\varphi_{\mathrm{K}}) = \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(f_n\varphi_{\mathrm{K}})$$
$$= \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \mu^*(f\varphi_{\mathrm{K}}) = \mu^{\bullet}(f).$$

On a l'égalité dans la relation d) si f et g sont mesurables, d'après le cor. 4 du th. 5, chap. IV, § 5, n° 5. Plus généralement, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 2. — *Soient f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}_+$; si g et h sont mesurables, on a*:

$$\int^{\bullet} f(g+h)\,d\mu = \int^{\bullet} fg\,d\mu + \int^{\bullet} fh\,d\mu. \tag{2}$$

On se ramène aussitôt à la démonstration de la formule analogue pour l'intégrale supérieure. Comme on a

$$f(g+h) = fg + fh$$

(avec la convention $0\,.\,(+\infty) = 0$), on a

$$\int^* f(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu\,;$$

il reste à établir l'inégalité inverse. Soit u une fonction semi-continue inférieurement telle qu'on ait $u \geqslant f(g+h)$. Posons $v = \dfrac{u}{g+h}$ dans l'ensemble où $g + h > 0$, $v = +\infty$ dans l'ensemble où $g + h = 0$; on a $v \geqslant f$ et $u \geqslant v(g+h)$, d'où

$$\int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u\,d\mu$$

et par conséquent, v étant mesurable (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 6, cor. 4 du th. 5):

$$\int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu \leqslant \int^* vg\,d\mu + \int^* vh\,d\mu$$
$$= \int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u\,d\mu,$$

ce qui entraîne l'inégalité cherchée, ε étant arbitraire.

COROLLAIRE. — *Soient f une fonction $\geqslant 0$, (g_n) une suite de fonctions mesurables $\geqslant 0$; on a* $\int^\bullet f(\sum_n g_n)\,d\mu = \sum_n (\int^\bullet f g_n\,d\mu)$.

Dans le cas d'une suite finie, c'est une conséquence immédiate de la prop. 2. Le cas d'une suite infinie s'en déduit au moyen de la prop. 1, e).

PROPOSITION 3. — *Pour tout nombre fini $\alpha \geqslant 0$ et tout couple de mesures μ, ν sur* T, *on a*

$$(\alpha\mu)^\bullet = \alpha\mu^\bullet$$

$$(\mu + \nu)^\bullet = \mu^\bullet + \nu^\bullet.$$

En outre, la relation $\mu \leqslant \nu$ entraîne $\mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$.

La démonstration est immédiate à partir de l'énoncé analogue du chapitre IV (§ 1, n° 3, prop. 15).

PROPOSITION 4. — *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans* T, *on a* $\mu^\bullet(f) = \mu^*(f)$.

En effet, soit g une fonction de $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ telle que $g \leqslant f$. Si K est le support (compact) de g, on a $\mu(g) \leqslant \mu^*(f\varphi_{\mathrm{K}}) \leqslant \mu^\bullet(f)$. Il en résulte, d'après la définition de l'intégrale supérieure, que $\mu^*(f) \leqslant \mu^\bullet(f)$, donc $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ (formule (1)).

2. *Fonctions et mesures modérées*

PROPOSITION 5. — *Soit* A *une partie de* T; *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite d'ouverts μ-intégrables.*

b) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite d'ensembles μ-intégrables.*

c) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite de compacts et d'un ensemble μ-négligeable.*

Il est clair que chacune des propriétés a) et c) entraîne b). Inversement, b) entraîne a), car tout ensemble de mesure extérieure finie est contenu dans un ouvert intégrable (chap. IV, § 1, n° 4, prop. 19), et b) entraîne c), car tout ensemble intégrable est réunion d'une suite de compacts et d'un ensemble négligeable (chap. IV, § 4, n° 6, cor. 2 du th. 4).

DÉFINITION 2. — *Une partie de* T *est dite μ-modérée si elle satisfait aux conditions équivalentes de la proposition* 5. *Une* *fonction définie sur* T, *à valeurs dans un espace vectoriel ou dans* $\bar{\mathbf{R}}$, *est dite* μ*-modérée si elle est nulle dans le complémentaire d'une partie* μ*-modérée de* T. *On dit que la mesure* μ *est modérée si* T *est un ensemble* μ*-modéré.*

Si μ est une mesure modérée, toute fonction sur T est μ-modérée et toute partie de T est μ-modérée.

Remarques. — 1) Si θ est une mesure complexe sur T, on dira qu'une fonction f est θ-modérée (resp. que θ est modérée) si f est $|\theta|$-modérée (resp. si $|\theta|$ est modérée).

2) Toute mesure bornée est modérée; si T est une réunion dénombrable de compacts, toute mesure sur T est modérée.

3) Soit (f_n) une suite de fonctions μ-modérées à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$. Pour chaque n, soit U_n un ouvert, réunion dénombrable d'ouverts de mesure extérieure finie, tel que f_n soit nulle hors de U_n. La fonction $s = \sum_{n \in \mathbf{N}} |f_n|$ est alors nulle hors de $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{U}_n$; elle est donc μ-modérée, et il en est de même de toutes les fonctions majorées par s. Cela s'applique en particulier aux fonctions $\liminf_{n \to \infty} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n$ (si cette somme est définie).

4) Une fonction égale presque partout à une fonction modérée est modérée.

PROPOSITION 6. — *Soit f une fonction numérique positive définie dans* T, μ*-mesurable et* μ*-modérée. Il existe alors une suite* $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{F}_+(\mathrm{T})$, *dont la somme est égale à f, possédant les propriétés suivantes:*

1) *La fonction h_0 est* μ*-négligeable.*

2) *Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un compact* K_n *tel que h_n soit nulle hors de* K_n, *et que la restriction de h_n à* K_n *soit finie et continue.*

Supposons que f soit somme d'une suite (f_n) de fonctions mesurables positives, dont chacune possède la propriété de l'énoncé; il est clair que f la possède alors aussi. Posons

$$f_n = \inf(f, n + 1) - \inf(f, n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$; f étant égale à la somme de la suite (f_n), il nous suffira donc d'établir la proposition en supposant f modérée et *bornée.* Désignons alors par A l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $f(t) > 0$; A est mesurable et modéré, et il existe donc une suite (A_n) d'ensembles intégrables, deux à deux disjoints, telle que

$A = \bigcup_n A_n$. On est ramené à démontrer l'énoncé pour les fonctions $f\varphi_{A_n}$; autrement dit, on peut supposer f bornée et nulle hors d'un ensemble intégrable I. Mais I est réunion d'un ensemble négligeable N et d'une suite (L_n) de compacts deux à deux disjoints (chap. IV, § 4, n° 6, cor. 2 du th. 4). On est donc ramené à traiter le cas où f est bornée, nulle hors d'un compact L.

Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des compacts K de T tels que $f|K$ soit continue; $\mathfrak{K}$ étant μ-dense (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 10, prop. 15), L est réunion d'un ensemble négligeable N, et d'une suite $(K_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathfrak{K}$ deux à deux disjoints (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 8, déf. 6). Les fonctions $h_0 = f\varphi_N$, $h_n = f\varphi_{K_n}$ pour $n \geqslant 1$, satisfont alors aux conditions de l'énoncé.

La proposition suivante permet de ramener l'étude de l'intégrale supérieure à celle de l'intégrale supérieure essentielle.

PROPOSITION 7. — *Soit f un élément de $\mathscr{F}_+(T)$.*

1) *Si la fonction f n'est pas μ-modérée, $\mu^*(f) = +\infty$.*

2) *Si la fonction f est μ-modérée, $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$.*

3) *Si l'on a $\mu^\bullet(f) < +\infty$, il existe une partie μ-modérée* A, *réunion d'une suite de compacts de* T, *telle que $f = f\varphi_A$ localement presque partout.*

La première assertion résulte aussitôt du lemme 1 du chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 6. Pour établir la seconde, désignons par A une partie modérée, telle que f soit nulle hors de A; A est réunion d'un ensemble négligeable A_0 et d'une suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ d'ensembles compacts, que l'on peut supposer croissante. La fonction f est alors presque partout égale à l'enveloppe supérieure des fonctions $f\varphi_{A_n}$ $(n \geqslant 1)$, et l'on a donc (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3 et § 2, n° 3, prop. 6)

$$\mu^*(f) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(f\varphi_{A_n}) \leqslant \mu^\bullet(f);$$

d'où l'égalité $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ en vertu de la formule (1). Enfin, supposons que $\mu^\bullet(f) < +\infty$; il existe une suite croissante (A_n) de compacts telle que

$$\mu^\bullet(f) = \sup_n \mu^*(f\varphi_{A_n}).$$

Posons $A = \bigcup_n A_n$; le second membre est égal à $\mu^*(f\varphi_A)$ (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3), ou encore à $\mu^\bullet(f\varphi_A)$ (d'après la prop. 1, ou d'après 2) ci dessus). Comme on a $\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(f\varphi_A) + \mu^\bullet(f\varphi_{\complement A})$ (prop. 2), on a $\mu^\bullet(f\varphi_{\complement A}) = 0$, et 3) en découle.

COROLLAIRE 1. — *Pour que f soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit localement négligeable et modérée.*

COROLLAIRE 2. — *Si μ est une mesure modérée (en particulier si μ est bornée, ou si* T *est dénombrable à l'infini), on a* $\mu^* = \mu^\bullet$.

PROPOSITION 8. — a) *Soit* H *un ensemble de fonctions* $\geqslant 0$, *semi-continues inférieurement, filtrant pour la relation* $\leqslant$; *on a alors*:

$$\mu^\bullet(\sup_{h\in H} h) = \sup_{h\in H} \mu^\bullet(h).$$

b) *Soit* H *un ensemble de fonctions* $\geqslant 0$, *semi-continues supérieurement, filtrant pour la relation* $\geqslant$; *s'il existe dans* H *une fonction* h_0 *telle que* $\mu^\bullet(h_0) < \infty$, *on a*:

$$\mu^\bullet(\inf_{h\in H} h) = \inf_{h\in H} \mu^\bullet(h).$$

L'assertion a), compte tenu de la prop. 4, est une répétition du théorème 1 du chap. IV, § 1, n° 1. Pour établir b), posons $\eta = \inf_{h\in H} h$, et soit a un nombre > 0. Il existe un compact K tel que l'on ait (chap. IV, 2^e^ éd., § 4, n° 4, cor. 1 de la prop. 5):

$$\mu^\bullet(h_0) - a \leqslant \mu^*(h_0\varphi_K) = \mu(h_0\varphi_K) \leqslant \mu^\bullet(h_0).$$

Les fonctions $h\varphi_K$, où h parcourt H, forment un ensemble de fonctions semi-continues supérieurement, filtrant pour la relation $\geqslant$, et qui contient une fonction intégrable. On a donc (chap. IV, 2^e^ éd., § 4, n° 4, cor. 2 de la prop. 5):

$$\mu^*(\eta\varphi_K) = \inf_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K).$$

Mais on a (chap. IV, 2^e^ éd., § 4, n° 4, cor. 1 de la prop. 5) $\mu^\bullet(h_0\varphi_{\complement K}) \leqslant a$, d'où $\mu^\bullet(h\varphi_{\complement K}) \leqslant a$ pour toute fonction $h \in H$ majorée par h_0. On a donc finalement:

$$\mu^\bullet(\eta) \geqslant \mu^*(\eta\varphi_K) = \inf_{h\in H} \mu^*(h\varphi_K) \geqslant \inf_{h\in H} \mu^\bullet(h) - a.$$

L'inégalité $\mu^\bullet(\eta) \leqslant \inf_{h\in H} \mu^\bullet(h)$ étant évidente, et a étant arbitraire, la proposition est établie.

3. Fonctions essentiellement intégrables

Soit F un espace de Banach *réel*; rappelons que les éléments des espaces $\mathscr{F}^p_F$ (chap. IV, § 3, n° 3) et $\mathscr{L}^p_F$ (chap. IV, § 3, n° 4, déf. 2) sont des fonctions μ-modérées (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 6, lemme 1); $\mathscr{N}_{\mathrm{F}}$ désignant toujours l'espace des applications négligeables de T dans F, nous introduirons l'espace $\mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$ des applications *localement négligeables* de T dans F.

Lemme 1. — *Soient* **g** *et* **g**$'$ *deux applications* μ*-modérées à valeurs dans* F ; *si* **g** *et* **g**$'$ *sont égales localement presque partout à une même fonction* **f**, *on a* $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ *presque partout.*

En effet, soit D l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{g}'(t)$; D est localement négligeable et modéré, donc négligeable (cor. 1 de la prop. 7).

Nous désignerons par $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}(\mathrm{T}, \mu)$ (ou simplement $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}(\mu)$, $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$, si aucune confusion n'en résulte) l'ensemble des applications **f** de T dans F, telles qu'il existe une fonction $\mathbf{g} \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}^{p}$ égale à **f** localement presque partout. Le nombre $\mathrm{N}_p(\mathbf{g})$ ne dépendant que de **f** d'après le lemme 1, nous poserons $\overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) = \mathrm{N}_p(\mathbf{g})$. La fonction $\overline{\mathrm{N}}_p$ est évidemment une semi-norme sur $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$, et nous supposerons toujours que $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ est muni de la topologie définie par $\overline{\mathrm{N}}_p$. L'adhérence de 0 pour cette topologie est l'espace $\mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$; les relations $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p} = \mathscr{F}_{\mathrm{F}}^{p} + \mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$, $\mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty} \cap \mathscr{F}_{\mathrm{F}}^{p} = \mathscr{N}_{\mathrm{F}}$ (lemme 1), montrent que l'espace normé $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}/\mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}^{p}/\mathscr{N}_{\mathrm{F}}$, qui est complet (chap. IV, § 3, n° 3, prop. 5); $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ est donc lui-même complet.

Nous désignerons de même par $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}(\mathrm{T}, \mu)$ (ou $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}(\mu)$, ou $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}$) le sous-espace $\mathscr{L}_{\mathrm{F}}^{p} + \mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$ de $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$: on peut aussi caractériser $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ comme le sous-espace de $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ constitué par les applications *mesurables* (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5). L'espace normé $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}/\mathscr{N}_{\mathrm{F}}^{\infty}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{L}_{\mathrm{F}}^{p}$; $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ est donc complet. Ses éléments sont appelés *fonctions de puissance p-ième essentiellement intégrable*, cette terminologie étant justifiée par la proposition suivante :

PROPOSITION 9. — *Pour qu'une application* **f** *de* T *dans* F *appartienne à* $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$ (resp. *à* $\bar{\bar{\mathscr{L}}}_{\mathrm{F}}^{p}$) *il faut et il suffit que l'on ait* (resp. *que* **f** *soit mesurable et que l'on ait*)

$$\mu^{\bullet}(|\mathbf{f}|^{p}) < +\infty.$$

On a alors $\overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) = \mu^{\bullet}(|\mathbf{f}|^{p}))^{1/p}$.

On peut évidemment se limiter à l'assertion concernant $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$. Si **f** appartient à $\bar{\bar{\mathscr{F}}}_{\mathrm{F}}^{p}$, soit **g** une fonction appartenant à $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}^{p}$, égale à **f** localement presque partout; on a alors $|\mathbf{f}|^{p} = |\mathbf{g}|^{p}$

localement presque partout, donc $\mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p) = \mu^\bullet(|\mathbf{g}|^p) = \mu^*(|\mathbf{g}|^p) < +\infty$ (prop. 1, a) et prop. 7), et d'autre part, par définition de $\overline{\mathrm{N}}_p$,

$$\overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) = \mathrm{N}_p(\mathbf{g}) = (\mu^*(|\mathbf{g}|^p))^{1/p}.$$

Inversement, supposons que l'on ait $\mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p) < +\infty$; il existe alors un ensemble modéré A tel que $\mathbf{f}$ soit nulle localement presque partout dans T $-$ A (prop. 7). La fonction $\mathbf{f}\varphi_{\mathrm{A}}$, égale localement presque partout à $\mathbf{f}$, est telle que $\mathrm{N}_p(\mathbf{f}\varphi_{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) < +\infty$; elle appartient donc à $\mathscr{F}^p_{\mathrm{F}}$, et on a $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{F}}^p_{\mathrm{F}}$.

COROLLAIRE. — *Pour que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $\mathscr{L}^p_{\mathrm{F}}$, *il faut et il suffit que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $\overline{\mathscr{L}}^p_{\mathrm{F}}$ *et soit modérée.*

DÉFINITION 3. — *Les éléments de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *sont appelés* fonctions essentiellement μ-intégrables *à valeurs dans* F. *En composant l'application* $\tilde{f} \mapsto \mu(\tilde{f})$ *de* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F *avec l'application canonique de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *sur* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{F}}$, *on obtient une application linéaire continue de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F, *qui prolonge l'application* $\mathbf{f} \mapsto \int \mathbf{f}\, d\mu$ *de* $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F. *On note encore* $\int \mathbf{f}\, d\mu$ *ou* $\mu(\mathbf{f})$ *la valeur de cette application pour* $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$, *et on dit que cet élément est l'*intégrale *de* $\mathbf{f}$ *par rapport à* μ.

Deux fonctions essentiellement intégrables et égales localement presque partout ont même intégrale. Pour toute fonction $f \geqslant 0$, finie et essentiellement intégrable, on a $\int^\bullet f\, d\mu = \int f\, d\mu$. Si A est un ensemble dont la fonction caractéristique est essentiellement intégrable, on dit que A est un *ensemble essentiellement* μ*-intégrable*; $\int \varphi_{\mathrm{A}}\, d\mu$ se note aussi $\mu(\mathrm{A})$ et s'appelle encore la *mesure* de A.

Si une fonction $\mathbf{f}$, à valeurs dans F, est définie localement presque partout dans T, on dit encore que $\mathbf{f}$ est *essentiellement intégrable* si elle est égale, localement presque partout, à une fonction $\mathbf{f}_1$ partout définie et intégrable; on pose alors

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \int \mathbf{f}_1\, d\mu,$$

et cette définition ne dépend pas de la fonction intégrable $\mathbf{f}_1$ partout définie et localement presque partout égale à $\mathbf{f}$ (lemme 1). On définit de même la notion de fonction essentiellement intégrable pour les fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, définies et finies localement presque partout.

Le lecteur n'aura aucune peine à étendre aux fonctions essentiellement intégrables les résultats du chap. IV, § 4 sur les fonctions intégrables, en remplaçant dans les énoncés «presque partout» par «localement presque partout». Signalons par exemple l'inégalité:

$$\left|\int \mathbf{f}\, d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\, d\mu \tag{3}$$

valable pour toute fonction essentiellement intégrable $\mathbf{f}$ à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 10. — *Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble μ-dense de parties compactes de* T.

a) *Si f est une fonction numérique $\geqslant 0$, on a:*

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \mu^{*}(f\varphi_K). \tag{4}$$

b) *Si $\mathbf{f}$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach* F, *essentiellement intégrable, on a:*

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim_{\mathfrak{K}} \int \mathbf{f}\varphi_K\, d\mu$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant (pour $\subset$) $\mathfrak{K}$.

Pour établir a), il suffit de montrer que pour toute partie compacte L de T, on a $\int^* f\varphi_L\, d\mu = \sup_K \int^* f\varphi_K\, d\mu$, où K parcourt l'ensemble des parties de L appartenant à $\mathfrak{K}$. Comme L est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite croissante (K_n) d'éléments de $\mathfrak{K}$ (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 8, prop. 12), cela résulte du théorème de passage à la limite dans les intégrales supérieures (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3).

Supposons maintenant que $\mathbf{f}$ appartienne à $\mathscr{L}^1_F$; soit ε un nombre > 0, et soit K un élément de $\mathfrak{K}$ tel que

$$\int |f|\varphi_K\, d\mu \geqslant \int |f|\, d\mu - \varepsilon$$

(il en existe d'après a)). On a alors pour tout compact H contenant K:

$$\left|\int f\, d\mu - \int f\varphi_H\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\varphi_{\complement H}\, d\mu \leqslant \int |f|\varphi_{\complement K}\, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Extension aux espaces de Banach et aux mesures complexes. Soit F un espace de Banach complexe; par abus de notation, nous désignerons encore par F l'espace de Banach réel sous-jacent à F. L'espace de Banach $\mathscr{L}^p_F(T, \mu)$ peut alors être muni d'une structure d'espace de Banach complexe naturelle, et il conviendra de préciser si l'on utilise la structure réelle ou complexe de cet espace. Dans ce chapitre, et sauf mention expresse du contraire, il s'agira toujours de la structure *réelle.*

Soit θ une mesure complexe; on posera $\mathscr{L}^p_F(T, \theta) = \mathscr{L}^p_F(T, |\theta|)$; si F est un espace de Banach complexe, il y a lieu de faire les mêmes remarques que ci-dessus. En particulier, une fonction **f** à valeurs dans F sera dite essentiellement intégrable pour θ si elle est essentiellement intégrable pour $|\theta|$. L'assertion b) de la prop. 10 s'étend aussitôt aux mesures complexes.

4. Une propriété spéciale à l'intégrale supérieure essentielle

Le résultat suivant sera fréquemment utilisé dans la suite. On ne peut pas remplacer dans l'énoncé les intégrales supérieures essentielles par des intégrales supérieures ordinaires (voir l'exerc. 4).

PROPOSITION 11. — *Soit* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille de mesures positives sur* T, *filtrante pour la relation* $\leqslant$ *et admettant dans* $\mathscr{M}(T)$ *une borne supérieure* λ. *On a alors pour toute fonction numérique* $f \geqslant 0$

$$\lambda^\bullet(f) = \sup_{\alpha\in A} \lambda^\bullet_\alpha(f). \tag{5}$$

Lorsque f appartient à $\mathscr{K}(T)$, cette relation se réduit à la définition de la borne supérieure d'un ensemble filtrant dans $\mathscr{M}(T)$ (chap. II, § 2, n° 2, lemme 1). Supposons ensuite que f soit majorée par une fonction $g \in \mathscr{K}_+$ (autrement dit, que f soit bornée et nulle hors d'un compact K); soit α un indice tel que l'on ait $\lambda_\alpha(g) \geqslant \lambda(g) - \varepsilon$, où ε est un nombre > 0; la mesure $\nu = \lambda - \lambda_\alpha$ étant positive, on a $\nu^*(f) \leqslant \nu(g) \leqslant \varepsilon$, ou $\lambda^*_\alpha(f) \geqslant \lambda^*(f) - \varepsilon$ (chap. IV, § 1, n° 3, prop. 15). Il en résulte (ε étant arbitraire) que le second membre de (6) majore le premier; l'inégalité inverse étant évidente, (6) est établie dans le cas particulier envisagé. Supposons ensuite que f soit nulle hors de K, mais non nécessairement bornée, et posons $f_n = \inf(f, n)$ pour tout entier n. On a:

$$\lambda^\bullet(f) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda^\bullet(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\alpha\in A} \lambda^\bullet_\alpha(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda^\bullet_\alpha(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \lambda^\bullet_\alpha(f).$$

Enfin, si l'on ne fait plus aucune restriction sur f, on a, en désignant par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes de T,

$$\lambda^\bullet(f) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda^\bullet(f\varphi_K) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \sup_{\alpha\in A} \lambda^\bullet_\alpha(f\varphi_K)$$
$$= \sup_{\alpha\in A} \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda^\bullet_\alpha(f\varphi_K) = \sup_{\alpha\in A} \lambda^\bullet_\alpha(f).$$

Corollaire 1. — *Pour qu'une partie* N *de* T *soit localement λ-négligeable, il faut et il suffit que* N *soit localement λ_α-négligeable pour tout $\alpha \in$* A.

Corollaire 2. — *Pour qu'une application g de* T *dans un espace topologique* G *soit λ-mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit λ_α-mesurable pour tout $\alpha \in$* A.

La condition est évidemment nécessaire, car $\lambda_\alpha \leqslant \lambda$ pour tout α (chap. IV, § 1, n° 3, prop. 15). Inversement, supposons que g soit λ_α-mesurable pour tout α, désignons par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des compacts K de T tels que $g|K$ soit continue, et soit L un compact tel que $L \cap K$ soit λ-négligeable pour tout $K \in \mathfrak{K}$. L'ensemble $\mathfrak{K}$ étant λ_α-dense, L est λ_α-négligeable pour tout α (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 8, prop. 12), donc λ-négligeable (cor. 1). Il en résulte que $\mathfrak{K}$ est λ-dense, et que g est λ-mesurable (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 10, prop. 15).

§ 2. Familles sommables de mesures positives

1. Définition des familles sommables de mesures

Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de mesures positives sur un espace localement compact X; on dit que la famille $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une *famille sommable de mesures* si elle est sommable dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}(X)$ des mesures réelles sur X, muni de la topologie vague (*Top. Gén.*, chap. III, 3[e] éd., § 5, n° 1). Cela revient à dire que, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$, la famille des nombres $\lambda_\alpha(f)$ est sommable dans **R**. En effet, cette condition est évidemment nécessaire; inversement, si elle est réalisée, la forme linéaire $f \mapsto \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(f)$ sur $\mathscr{K}(X)$ est positive, c'est donc une mesure positive ν (chap. III, 2[e] éd., § 3, th. 1), et l'on vérifie aussitôt que les sommes partielles finies de la famille (λ_α) convergent vaguement vers ν, suivant le filtre des sections de l'ensemble des parties finies de A (*Top. Gén.*, chap. III, 3[e] éd., § 5, n° 1, déf. 1).

Tout élément de $\mathscr{K}(X)$ étant différence de deux éléments de $\mathscr{K}_+(X)$, la famille (λ_α) est sommable si et seulement si l'on a

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(f) < +\infty \tag{1}$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(X)$. Cette condition équivaut encore à la suivante:

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(K) < +\infty \tag{2}$$

pour tout compact $K \subset X$.