N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Algèbre commutative

Chapitres 1 à 4

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

ALGÈBRE COMMUTATIVE

Chapitres 1 à 4

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1985

ISBN-10 3-540-32937-X Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-32937-3 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: *design & production*, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

INTRODUCTION

Les questions traitées dans ce Livre se sont présentées au cours du développement de la théorie des nombres algébriques et (plus tardivement) de la géométrie algébrique (cf. Note historique). A partir du XIX^{e} siècle, on s'est aperçu peu à peu que ces deux théories présentaient de remarquables analogies ; en cherchant à résoudre les problèmes qu'elles posaient, on a été amené à dégager un certain nombre d'idées générales, dont le champ d'application ne se limite pas aux anneaux de nombres algébriques ou de fonctions algébriques ; et, comme toujours, il y a avantage à considérer ces notions sous leur aspect le plus général pour en mieux saisir la portée véritable et les répercussions mutuelles. On traite donc dans ce Livre de concepts applicables en principe à tous les anneaux commutatifs et aux modules sur de tels anneaux ; il faut toutefois signaler qu'on n'obtient souvent de résultats substantiels qu'en introduisant des hypothèses de *finitude* (toujours vérifiées dans les cas classiques), par exemple en supposant les modules de type fini ou les anneaux nœthériens.

Les principales notions autour desquelles se groupent les premiers chapitres sont les suivantes :

I. *Localisation et globalisation.* Partons par exemple d'un système d'équations diophantiennes :

$$(*) \qquad P_i(x_1, \dots, x_m) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, et où on cherche des solutions (x_i) formées de nombres *entiers* rationnels. On peut commencer à aborder le problème en cherchant des solutions formées de *nombres rationnels*, ce qui consiste à envisager le même problème où les coefficients des P_i sont considérés comme des éléments du *corps des fractions* $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Z}$, et où l'on se propose de trouver les solutions à valeurs dans $\mathbf{Q}$. Une seconde étape consiste à voir si, étant donné un nombre premier p, il existe des solutions rationnelles dont les dénominateurs ne sont pas divisibles par p (il est clair que les solutions *entières* vérifient cette condition) ; cela revient cette fois à se placer dans le sous-anneau $\mathbf{Z}_{(p)}$ de $\mathbf{Q}$ formé des nombres rationnels de cette nature, dit *anneau local* de $\mathbf{Z}$ correspondant au nombre premier p. Il est clair que le passage de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$ et celui de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}_{(p)}$ sont de même nature : dans les deux cas, on n'admet comme dénominateurs que ceux qui n'appartiennent pas à un certain *idéal premier* (l'idéal (0) ou l'idéal (p) suivant le cas). Le mot même d' « anneau local » provient de la géométrie algébrique, où cette notion apparaît de façon plus naturelle : par exemple, dans l'anneau $\mathbf{C}(X)$ des fonctions rationnelles d'une variable à coefficients complexes, l'anneau local correspondant à l'idéal premier $(X - \alpha)$ est l'anneau des fractions rationnelles « régulières » au point α (c'est-à-dire n'ayant pas de pôle en ce point).

Tout problème diophantien, et plus généralement tout problème sur des A-modules (A anneau commutatif) peut se décomposer en deux problèmes partiels : on cherche à le résoudre dans les anneaux locaux $A_\mathfrak{p}$ correspondant aux différents idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A (« localisation »), puis on se demande si, de l'existence pour *tout* $\mathfrak{p}$ d'une solution du problème « localisé », on peut conclure à l'existence d'une solution du problème initialement posé (« passage du local au global »). C'est à l'étude de ce double processus qu'est consacré le chapitre II, où d'ailleurs on verra que la « localisation » n'est pas liée aux seuls idéaux premiers, mais a une portée plus vaste.

II. *Complétion des anneaux locaux.* Un anneau local A partage avec les corps la propriété de n'avoir qu'*un seul* idéal maximal $\mathfrak{m}$. On utilise ce fait pour ramener, dans une certaine mesure, un problème sur des A-modules à un problème analogue sur des *espaces vectoriels*, en passant cette fois à l'anneau quotient

$A/\mathfrak{m}$, puisque ce dernier est un corps. Si on revient par exemple au système diophantien (*), cette idée n'est autre que le principe de la « réduction modulo p », transformant les équations en congruences mod. p, qui s'est présentée de façon naturelle dès les premiers travaux de théorie des nombres.

Ce faisant, il est clair qu'on ne peut toutefois espérer atteindre ainsi des résultats complets sur le problème initial, et on s'est vite rendu compte que pour avoir des renseignements plus précis, il faut non seulement considérer les congruences modulo $\mathfrak{m}$, mais aussi les congruences « supérieures » modulo $\mathfrak{m}^n$, pour des entiers $n > 0$ arbitraires. On se convainc même ainsi que, plus n est grand, plus on « approche » en quelque sorte du problème initial (dans le cas où $A = \mathbf{Z}$ par exemple, la raison en est qu'un entier $\neq 0$ ne peut être divisible par *toutes* les puissances p^n d'un nombre premier donné p ; la présence de cet entier se fera donc sentir dans la réduction mod. p^n dès que n sera pris assez grand). La traduction mathématique de cette idée consiste à considérer sur A une *topologie* d'anneau (cf. *Top. gén.*, chap. III, 3e éd., § 6) pour laquelle les $\mathfrak{m}^n$ forment un système fondamental de voisinages de 0. Mais lorsqu'on a ainsi, par exemple, résolu le système de congruences

$$(**) \qquad P_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^k} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

pour *tout entier* $k > 0$, il ne s'ensuit pas encore que le système (*) ait une solution dans l'anneau local $\mathbf{Z}_{(p)}$; on constate que l'hypothèse précédente peut s'interpréter en disant que (*) admet une solution dans le *complété* $\hat{\mathbf{Z}}_{(p)}$ de l'anneau topologique $\mathbf{Z}_{(p)}$.

Le problème initial, ainsi affaibli, est finalement ramené au problème analogue pour les anneaux locaux du type $A/\mathfrak{m}^n$, qui sont encore plus proches des corps que les anneaux locaux généraux, puisqu'ils ont un radical nilpotent ; en géométrie algébrique classique, cela correspond à une étude « différentielle » du problème au voisinage d'un point donné.

Le chapitre III traite d'une façon générale de ces applications de notions topologiques à la théorie des anneaux locaux. Au chapitre VI, on en étudie un aspect plus spécial, adapté d'une part à des études plus fines de géométrie algébrique, et surtout à l'arithmétique des corps de nombres algébriques, où les anneaux locaux que l'on rencontre (tels que $\mathbf{Z}_{(p)}$) appartiennent à une classe particulièrement simple, celle des « anneaux de valuation », où la divisibilité est une relation d'ordre *total* (cf. *Alg.*, chap. VI, § 1) dans l'ensemble des idéaux principaux.

L'étude du passage d'un anneau A à un localisé $A_{\mathfrak{p}}$ ou à un complété $\widehat{A}$ fait apparaître un caractère commun à ces deux opérations, la propriété de *platitude* des A-modules $A_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{A}$, qui permet entre autres de manier les produits tensoriels de tels A-modules avec des A-modules quelconques un peu comme on le fait des produits tensoriels d'espaces vectoriels, c'est-à-dire sans toutes les précautions dont s'entoure leur emploi dans le cas général. Les propriétés liées à cette notion, qui s'applique d'ailleurs aussi aux modules sur des anneaux non commutatifs, font l'objet du chapitre I.

III. *Entiers et décomposition des idéaux.* L'étude de la divisibilité dans les corps de nombres algébriques nécessitait dès le début l'introduction d'une notion d'*entier* dans un tel corps K, généralisant la notion d'entier rationnel dans le corps $\mathbf{Q}$. La théorie générale de cette notion d' « entier algébrique », liée, comme on le verra, à des conditions de finitude très strictes, est développée au chapitre V : elle s'applique à *tous* les anneaux commutatifs, et présente un grand intérêt non seulement en arithmétique, mais en géométrie algébrique et même dans la théorie moderne des « espaces analytiques » sur le corps $\mathbf{C}$.

Un des obstacles majeurs à l'extension de l'arithmétique classique aux anneaux d'entiers algébriques a longtemps été le fait que la décomposition classique d'un entier rationnel en facteurs premiers ne s'étend pas en général à ces anneaux. Il fallut la création de la théorie des idéaux pour surmonter cette difficulté : la décomposition unique cherchée est alors rétablie pour les idéaux, la notion d'idéal premier se substituant bien entendu à celle de nombre premier. On peut d'ailleurs considérer ce résultat comme un cas typique où le « passage du local au global » se fait de façon satisfaisante : la connaissance, pour un $x \in K$, des valeurs en x de *toutes* les « valuations » de K, détermine x à multiplication près par un entier inversible.

Dans des anneaux moins simples que les anneaux d'entiers algébriques (et déjà par exemple dans les anneaux de polynômes à plusieurs indéterminées) ce résultat perd sa validité. On peut toutefois associer d'une façon canonique à tout idéal un ensemble bien déterminé d'idéaux premiers : en géométrie algébrique, si on considère par exemple dans K^n (K corps commutatif quelconque) une sous-variété définie par un système d'équations polynomiales $P_\alpha = 0$, les composantes *irréductibles* de cette sous-variété correspondent biunivoquement aux éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers ainsi associés à l'idéal engendré par les P_α. On peut en outre (si l'on se borne aux anneaux nœthériens) donner pour tout idéal une « décomposition » moins précise qu'une décomposition en produit d'idéaux premiers : le produit y est en effet remplacé par l'intersection, et les puissances d'idéaux premiers par des idéaux « primaires » liés aux idéaux premiers associés à l'idéal envisagé (mais qui ne sont pas des généralisations directes des puissances d'idéaux premiers). L'introduction des idéaux premiers associés à un idéal et l'étude de leurs propriétés font l'objet du chapitre IV ; on y démontre aussi l'existence et certaines propriétés d'unicité des « décompositions primaires » auxquelles nous venons de faire allusion ; mais il apparaît à présent que ces décompositions ne jouent le plus souvent qu'un rôle accessoire dans les applications, la notion essentielle étant celle d'idéal premier associé à un idéal.

Au chapitre VII, on examine plus en détail les anneaux où l'on se rapproche davantage des propriétés des anneaux d'entiers algébriques en ce qui concerne la décomposition en produit d'idéaux premiers ; on peut entre autres introduire dans ces anneaux la notion de « *diviseur* » qui est l'aspect géométrique de cette décomposition et joue un rôle important en géométrie algébrique.

Enfin, les chapitres VIII et suivants traiteront de notions qui présentent plus d'intérêt en géométrie algébrique qu'en arithmétique (où elles deviennent triviales) et notamment du concept de *dimension*.

Avec ces notions, on parvient à la frontière de la géométrie algébrique proprement dite, frontière toujours plus mouvante et difficile à tracer. C'est que, si l'algèbre commutative est un outil essentiel pour développer la géométrie algébrique dans toute sa généralité, inversement (comme on a déjà pu l'apercevoir ci-dessus), le langage de la géométrie s'avère extrêmement commode pour exprimer les théorèmes d'algèbre commutative et y suggérer une certaine intuition, naturellement assez absente de l'algèbre abstraite ; avec la tendance actuelle à élargir de plus en plus le cadre de la géométrie algébrique, le langage algébrique et le langage géométrique tendent plus que jamais à se confondre.

CHAPITRE I (*)

MODULES PLATS

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dans ce chapitre sont supposés avoir un élément unité ; tous les homomorphismes d'anneaux sont supposés transformer l'élément unité en l'élément unité. Par un sous-anneau d'un anneau A, *on entend un sous-anneau contenant l'élément unité de* A.

Si A *est un anneau,* M *un* A-*module à gauche,* U (resp. V) *un sous-groupe additif de* A (resp. M), *on rappelle qu'on note* UV *ou* U.V *le sous-groupe additif de* M *engendré par les produits* uv, *où* $u \in U$, $v \in V$ (*Alg.*, chap. VIII, § 6, n° 1). *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* A, *on pose* $\mathfrak{a}^0 = A$. *Pour tout ensemble* E, *on désigne par* 1_E (*ou par* 1 *quand aucune confusion n'est à craindre*) *l'application identique de* E *sur lui-même.*

On rappelle que les axiomes des modules impliquent que si E *est un module à gauche* (resp. *à droite*) *sur un anneau* A, *et si* 1 *désigne l'élément unité de* A, *on a* $1.x = x$ (resp. $x.1 = x$) *pour tout* $x \in E$ (*Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 1, n° 1). *Si* E *et* F *sont deux* A-*modules à gauche* (resp. *à droite*), *on rappelle qu'on désigne par* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(E, F)$) *le groupe additif des homomorphismes de* E *dans* F (*loc. cit.*, § 1, n° 2). *Par abus de notation, on désignera souvent par* 0 *un module réduit à son élément neutre.*

(*) A l'exception du § 4, les résultats de ce chapitre ne dépendent d'aucun autre livre de la deuxième partie.

§ 1. Diagrammes et suites exactes

1. Diagrammes.

Soient par exemple A, B, C, D, E cinq ensembles, et soient f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de D dans E, u une application de B dans D et v une application de C dans E. Pour résumer une situation de ce genre, on fait souvent usage de diagrammes ; par exemple, on résumera la situation précédente par le diagramme suivant (*Ens.*, chap. II, § 3, nº 4) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} & \xrightarrow{g} & \mathrm{C} \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ & & \mathrm{D} & \xrightarrow[h]{} & \mathrm{E} \end{array} \tag{1}$$

Dans un tel diagramme, le groupe de signes $\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{B}$ schématise le fait que f est une application de A dans B. Lorsqu'il ne peut y avoir d'ambiguïté sur f, on supprime la lettre f, et on écrit simplement $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$.

Lorsque A, B, C, D, E sont des groupes (resp. des groupes commutatifs) et f, g, h, u, v des homomorphismes de groupes, on dit pour abréger que le diagramme (1) est un *diagramme de groupes* (resp. *de groupes commutatifs*).

En principe, un diagramme n'est pas un objet mathématique, mais seulement une *figure*, destinée à faciliter la lecture d'un raisonnement. En pratique, on se sert souvent des diagrammes comme de *symboles abréviateurs*, qui évitent de nommer tous les ensembles et toutes les applications que l'on veut considérer ; on dit ainsi « considérons le diagramme (1) » au lieu de dire : « soient A, B, C, D, E cinq ensembles... et v une application de C dans E » ; voir par exemple l'énoncé de la prop. 2 du nº 4.

2. Diagrammes commutatifs.

Considérons par exemple le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{f} & \mathrm{B} & \xrightarrow{g} & \mathrm{C} & \xrightarrow{h} & \mathrm{D} \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow \\ \mathrm{A}' & \xrightarrow[f']{} & \mathrm{B}' & \xrightarrow[g']{} & \mathrm{C}' & \xrightarrow[h']{} & \mathrm{D}' \end{array} \tag{2}$$

A tout chemin composé d'un certain nombre de segments du diagramme parcouru dans le sens indiqué par les flèches, on fait correspondre une application de l'ensemble représenté par l'origine du premier segment dans l'ensemble représenté par l'extrémité du dernier segment, savoir la composée des applications représentées par les divers segments parcourus. Pour tout sommet du diagramme, par exemple B, on convient qu'il y a un chemin réduit à B, et on lui fait correspondre l'application identique 1_B.

Dans (2), il y a par exemple trois chemins partant de A et aboutissant à C' ; les applications correspondantes sont $c \circ g \circ f$, $g' \circ b \circ f$ et $g' \circ f' \circ a$. On dit qu'un diagramme est *commutatif* si, pour tout couple de chemins du diagramme ayant même origine et même extrémité, les deux applications correspondantes sont égales ; en particulier si un chemin a son extrémité confondue avec son origine, l'application correspondante doit être l'identité.

Pour que le diagramme (2) soit commutatif, il faut et il suffit que l'on ait les relations :

$$(3) \qquad f' \circ a = b \circ f, \qquad g' \circ b = c \circ g, \qquad h' \circ c = d \circ h;$$

autrement dit, il faut et il suffit que les trois diagrammes carrés extraits de (2) soient commutatifs. En effet, les relations (3) entraînent $c \circ g \circ f = g' \circ b \circ f$ puisque $c \circ g = g' \circ b$, et $g' \circ b \circ f = g' \circ f' \circ a$ puisque $b \circ f = f' \circ a$; donc les trois chemins partant de A et aboutissant à C' donnent la même application. On vérifie de même que les quatre chemins partant de A et aboutissant à D' (resp. les trois chemins partant de B et aboutissant à D') donnent la même application. Les relations (3) signifient que les deux chemins partant de A (resp. B, C) et aboutissant à B' (resp. C', D') donnent la même application. Tous les autres couples de sommets de (2) ne peuvent être joints que par un chemin au plus, et le diagramme (2) est donc bien commutatif.

Par la suite, nous laisserons au lecteur le soin de formuler et de vérifier des résultats analogues pour d'autres types de diagrammes.

3. *Suites exactes.*

Rappelons la définition suivante (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 4) :

Définition 1. — *Soient* A *un anneau,* F, G, H *trois* A-*modules à droite* (resp. *à gauche*), f *un homomorphisme de* F *dans* G *et* g *un homomorphisme de* G *dans* H. *On dit que le couple* (f, g) *est une suite exacte si l'on a* $\overset{-1}{g}(0) = f(\mathrm{F})$, *c'est-à-dire si le noyau de* g *est égal à l'image de* f.

On dit aussi alors que le diagramme

$$\mathrm{F} \xrightarrow{f} \mathrm{G} \xrightarrow{g} \mathrm{H} \tag{4}$$

est une *suite exacte.*

Considérons de même un diagramme formé de quatre modules et de trois homomorphismes :

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H}. \tag{5}$$

On dit que ce diagramme est *exact en* F si le diagramme $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$ est une suite exacte ; on dit qu'il est *exact en* G si $\mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H}$ est une suite exacte. Si (5) est exact en F *et* en G, on dit qu'il est *exact*, ou encore que c'est une *suite exacte.* On définit de même les suites exactes à un nombre quelconque de termes.

Rappelons aussi les résultats suivants (*loc. cit.*), où E, F, G désignent des A-modules à droite (resp. à gauche), les flèches représentent des homomorphismes, et 0 désigne un module réduit à son élément neutre :

a) Dire que $0 \rightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F}$ est une suite exacte équivaut à dire que f est *injectif.*

b) Dire que $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \rightarrow 0$ est une suite exacte équivaut à dire que f est *surjectif.*

c) Dire que $0 \rightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \rightarrow 0$ est une suite exacte équivaut à dire que f est *bijectif*, c'est-à-dire que f est un *isomorphisme* de E sur F.

d) Si F est un sous-module de E et si l'on note i l'injection canonique de F dans E et p la surjection canonique de E sur E/F, le diagramme

$$0 \longrightarrow \mathrm{F} \xrightarrow{i} \mathrm{E} \xrightarrow{p} \mathrm{E}/\mathrm{F} \longrightarrow 0 \tag{6}$$

est une suite exacte.

e) Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un homomorphisme, le diagramme

$$0 \longrightarrow \overset{-1}{f}(0) \xrightarrow{i} \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{p} \mathrm{F}/f(\mathrm{E}) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

(où i est l'injection canonique de $\overset{-1}{f}(0)$ dans E, et p la surjection canonique de F sur $\mathrm{F}/f(\mathrm{E})$) est une suite exacte.

f) Pour qu'un diagramme

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \tag{8}$$

soit une suite exacte, il faut et il suffit qu'il existe des modules S, T et des homomorphismes $a : \mathrm{E} \to \mathrm{S}$, $b : \mathrm{S} \to \mathrm{F}$, $c : \mathrm{F} \to \mathrm{T}$ et $d : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ tels que $f = b \circ a$, $g = d \circ c$, et que les trois suites

$$\begin{array}{c} \mathrm{E} \xrightarrow{a} \mathrm{S} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{S} \xrightarrow{b} \mathrm{F} \xrightarrow{c} \mathrm{T} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{T} \xrightarrow{d} \mathrm{G} \end{array} \tag{9}$$

soient *exactes*.

Rappelons enfin que si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un homomorphisme de A-modules, on pose $\mathrm{Ker}\,(f) = \overset{-1}{f}(0)$, $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathrm{E})$, $\mathrm{Coim}\,(f) = \mathrm{E}/\overset{-1}{f}(0)$ et $\mathrm{Coker}\,(f) = \mathrm{F}/f(\mathrm{E})$. Avec ces notations, on peut prendre, dans (9), $\mathrm{S} = \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{T} = \mathrm{Im}\,(g)$ (isomorphe canoniquement à $\mathrm{Coker}\,(f)$).

4. *Le diagramme du serpent.*

Proposition 1. — *Considérons un diagramme commutatif de groupes commutatifs :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{u} & \mathrm{B} & \xrightarrow{v} & \mathrm{C} \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ \mathrm{A}' & \xrightarrow[u']{} & \mathrm{B}' & \xrightarrow[v']{} & \mathrm{C}' \end{array} \tag{10}$$

On suppose que les deux lignes de (10) *sont exactes. Alors :*
(i) *Si c est injectif, on a*

$$\mathrm{Im}\,(b) \cap \mathrm{Im}\,(u') = \mathrm{Im}\,(u' \circ a) = \mathrm{Im}\,(b \circ u). \tag{11}$$

(ii) *Si a est surjectif, on a*

$$\mathrm{Ker}\,(b) + \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v' \circ b) = \mathrm{Ker}\,(c \circ v). \tag{12}$$

Prouvons (i). Il est clair que l'on a

$$\mathrm{Im}\,(u' \circ a) = \mathrm{Im}\,(b \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(b) \cap \mathrm{Im}\,(u').$$

Inversement, soit $x \in \mathrm{Im}(b) \cap \mathrm{Im}(u')$. Il existe $y \in \mathrm{B}$ tel que $x = b(y)$. Comme $v' \circ u' = 0$, on a $0 = v'(x) = v'(b(y)) = c(v(y))$, d'où $v(y) = 0$ puisque c est injectif. Comme (u, v) est une suite exacte, il existe $z \in \mathrm{A}$ tel que $y = u(z)$, d'où $x = b(u(z))$.

Prouvons (ii). Comme $v \circ u = 0$ et $v' \circ u' = 0$, il est clair que

$$\mathrm{Ker}\,(b) + \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v' \circ b) = \mathrm{Ker}\,(c \circ v).$$

Inversement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,(v' \circ b)$. Alors $b(x) \in \mathrm{Ker}\,(v')$, et il existe $y' \in \mathrm{A}'$ tel que $u'(y') = b(x)$ puisque la suite (u', v') est exacte. Comme a est surjectif, il existe $y \in \mathrm{A}$ tel que $a(y) = y'$, d'où $b(x) = u'(a(y)) = b(u(y))$; on en conclut que $x - u(y) \in \mathrm{Ker}\,(b)$, ce qui termine la démonstration.

Lemme 1. — *Considérons un diagramme commutatif de groupes commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{u} & \mathrm{B} \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \mathrm{A}' & \xrightarrow[u']{} & \mathrm{B}' \end{array} \tag{13}$$

Alors il existe un homomorphisme et un seul $u_1 : \mathrm{Ker}(a) \to \mathrm{Ker}(b)$, *et un homomorphisme et un seul* $u_2 : \mathrm{Coker}\,(a) \to \mathrm{Coker}\,(b)$, *tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\,(a) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}\,(b) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow[u]{} & \mathrm{B} \end{array} \tag{14}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}' & \xrightarrow{u'} & \mathrm{B}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Coker}\,(a) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}\,(b) \end{array} \tag{15}$$

soient commutatifs, i et j désignant les injections canoniques, p et q les surjections canoniques.

En effet, si $x \in \operatorname{Ker}(a)$, on a $a(x) = 0$ et $b(u(x)) = u'(a(x)) = 0$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(b)$, et l'existence et l'unicité de u_1 sont alors immédiates. De même, on a $u'(a(\mathrm{A})) = b(u(\mathrm{A})) \subset b(\mathrm{B})$, donc u' donne par passage aux quotients un homomorphisme $u_2 : \operatorname{Coker}(a) \to \operatorname{Coker}(b)$, qui est le seul homomorphisme pour lequel (15) soit commutatif.

Partons maintenant d'un diagramme *commutatif* (10) de groupes commutatifs ; il lui correspond en vertu du lemme 1 un diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}(a) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \operatorname{Ker}(b) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & \operatorname{Ker}(c) \arrow[d, "k"'] \arrow[dddll, dashed, "d"] \\
\mathrm{A} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{C} \arrow[d, "c"'] \\
\mathrm{A}' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{B}' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{C}' \arrow[d, "r"'] \\
\operatorname{Coker}(a) \arrow[r, "u_2"'] & \operatorname{Coker}(b) \arrow[r, "v_2"'] & \operatorname{Coker}(c)
\end{tikzcd}
\tag{16}
$$

où i, j, k sont les injections canoniques, p, q, r les surjections canoniques, u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) les homomorphismes canoniquement associés à u, u' (resp. v, v') par le lemme 1. On vérifie aussitôt que ce diagramme est commutatif.

Proposition 2. — *Supposons que dans le diagramme commutatif* (10), *les suites* (u, v) *et* (u', v') *soient exactes. Alors :*

(i) *On a* $v_1 \circ u_1 = 0$; *si* u' *est injectif, la suite* (u_1, v_1) *est exacte.*

(ii) *On a* $v_2 \circ u_2 = 0$; *si* v *est surjectif, la suite* (u_2, v_2) *est exacte.*

(iii) *Supposons* u' *injectif et* v *surjectif. Il existe alors un homomorphisme et un seul* $d : \operatorname{Ker}(c) \to \operatorname{Coker}(a)$ *ayant la propriété suivante : si* $x \in \operatorname{Ker}(c)$, $y \in \mathrm{B}$ *et* $t' \in \mathrm{A}'$ *vérifient les relations* $v(y) = k(x)$ *et* $u'(t') = b(y)$, *on a* $d(x) = p(t')$. *De plus la suite*

$$
(*)\quad \operatorname{Ker}(a) \xrightarrow{u_1} \operatorname{Ker}(b) \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker}(c) \xrightarrow{d} \\
\xrightarrow{d} \operatorname{Coker}(a) \xrightarrow{u_2} \operatorname{Coker}(b) \xrightarrow{v_2} \operatorname{Coker}(c)
$$

est exacte.

Prouvons (i). Comme u_1 et v_1 ont mêmes graphes que les restrictions de u et v à $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b)$ respectivement, on a $v_1 \circ u_1 = 0$. On a $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Ker}(b) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(b) \cap \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(j) \cap \mathrm{Im}(u)$. Mais d'après la prop. 1, (i), on a $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Im}(j \circ u_1) = \mathrm{Im}(u_1)$ si u' est injectif.

Prouvons (ii). Comme u_2 et v_2 proviennent de u et v par passage aux quotients, il est clair que $v_2 \circ u_2 = 0$. Supposons v surjectif ; comme q et p sont surjectifs, on a, en vertu des hypothèses et de la prop. 1, (ii)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(v_2) &= q(\mathrm{Ker}(v_2 \circ q)) = q(\mathrm{Ker}(v') + \mathrm{Im}(b)) = q(\mathrm{Ker}(v')) \\ &= q(\mathrm{Im}(u')) = \mathrm{Im}(q \circ u') = \mathrm{Im}(u_2 \circ p) = \mathrm{Im}(u_2).\end{aligned}$$

Prouvons enfin (iii). Pour $x \in \mathrm{Ker}(c)$, il existe $y \in \mathrm{B}$ tel que $v(y) = k(x)$ puisque v est surjectif ; en outre, on a $v'(b(y)) = c(k(x)) = 0$, et par suite il existe un *unique* $t' \in \mathrm{A}'$ tel que $u'(t') = b(y)$ puisque u' est injectif. Montrons que l'élément $p(t') \in \mathrm{Coker}(a)$ est *indépendant* de l'élément $y \in \mathrm{B}$ tel que $v(y) = k(x)$. En effet, si $y' \in \mathrm{B}$ est un second élément tel que $v(y') = k(x)$, on a $y' = y + u(z)$ où $z \in \mathrm{A}$; montrons que si $t'' \in \mathrm{A}'$ est tel que $u'(t'') = b(y')$ on a $t'' = t' + a(z)$; en effet on a $u'(t' + a(z)) = u'(t') + u'(a(z)) = b(y) + b(u(z)) = b(y + u(z)) = b(y')$. Enfin, on en conclut que $p(t'') = p(t') + p(a(z)) = p(t')$. On peut donc poser $d(x) = p(t')$ et on a ainsi défini une application $d : \mathrm{Ker}(c) \to \mathrm{Coker}(a)$.

Si maintenant x_1, x_2 sont des éléments de $\mathrm{Ker}(c)$ et $x = x_1 + x_2$, on prendra des éléments y_1 et y_2 de B tels que $v(y_1) = k(x_1)$ et $v(y_2) = k(x_2)$ et on choisira pour $y \in \mathrm{B}$ l'élément $y_1 + y_2$; il est alors immédiat que $d(x) = d(x_1) + d(x_2)$, donc d est un *homomorphisme.*

Supposons que $x = v_1(x')$ pour un $x' \in \mathrm{Ker}(b)$; on prendra alors pour $y \in \mathrm{B}$ l'élément $j(x')$. Comme $b(j(x')) = 0$, on en conclut $d(x) = 0$, donc $d \circ v_1 = 0$. Inversement, supposons que $d(x) = 0$. Avec les notations précédentes, on a donc $t' = a(s)$, où $s \in \mathrm{A}$. Dans ce cas, on a $b(y) = u'(t') = u'(a(s)) = b(u(s))$, ou encore $b(y - u(s)) = 0$. L'élément $y - u(s)$ est donc de la forme $j(n)$ pour $n \in \mathrm{Ker}(b)$, et on a $k(x) = v(y) = v(u(s) + j(n)) = v(j(n)) = k(v_1(n))$; comme k est injectif, $x = v_1(n)$, ce qui prouve que la suite (*) est exacte en $\mathrm{Ker}(c)$.

Enfin, on a (toujours avec les mêmes notations) $u_2(d(x)) =$

$u_2(p(t')) = q(u'(t')) = q(b(y)) = 0$ donc $u_2 \circ d = 0$. Inversement, supposons qu'un élément $w = p(t')$ de Coker (a) soit tel que $u_2(w) = u_2(p(t')) = 0$ (avec $t' \in A'$). On a donc $q(u'(t')) = 0$, et par suite $u'(t') = b(y)$ pour un $y \in B$; comme $v'(u'(t'))) = 0$, on a $v'(b(y)) = 0$, donc $c(v(y)) = 0$, autrement dit $v(y) = k(x)$ pour un $x \in \operatorname{Ker}(c)$, et par définition $w = d(x)$, ce qui montre que la suite (*) est exacte en Coker (a). On a vu dans (i) qu'elle est exacte en Ker (b) et dans (ii) qu'elle est exacte en Coker (b), ce qui achève de prouver (iii).

Remarque. — Lorsque les groupes du diagramme (10) sont tous des modules (à droite par exemple) sur un anneau Λ et les homomorphismes des homomorphismes de Λ-modules, on vérifie aussitôt que l'homomorphisme d défini dans la prop. 2, (iii) est encore un homomorphisme de Λ-modules : si $x \in \operatorname{Ker}(c)$ et $\alpha \in \Lambda$, et si $y \in B$ est tel que $v(y) = k(x)$, il suffit de remarquer que $v(y\alpha) = k(x\alpha)$.

Corollaire 1. — *Supposons que le diagramme* (10) *soit commutatif et ait ses lignes exactes. Alors :*

(i) *Si u', a et c sont injectifs, b est injectif.*

(ii) *Si v, a et c sont surjectifs, b est surjectif.*

L'assertion (i) est conséquence de l'assertion (i) de la prop. 2 : en effet on a Ker $(a) = 0$ et Ker $(c) = 0$, donc Ker $(b) = 0$.

L'assertion (ii) est conséquence de l'assertion (ii) de la prop. 2 : en effet, on a Coker $(a) = 0$ et Coker $(c) = 0$, donc Coker $(b) = 0$.

Corollaire 2. — *Supposons que le diagramme* (10) *soit commutatif et ait ses lignes exactes. Dans ces conditions :*

(i) *Si b est injectif et si a et v sont surjectifs, alors c est injectif.*

(ii) *Si b est surjectif et si c et u' sont injectifs, alors a est surjectif.*

Pour prouver (i), considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} u(A) & \xrightarrow{w} & B & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle a'}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ u'(A') & \xrightarrow[w']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' \end{array}$$

où a' est l'application ayant même graphe que la restriction de b à $u(A)$, w et w' les injections canoniques ; il est clair que ce diagramme est commutatif et a ses lignes exactes. En outre w' est injectif, et par hypothèse v est surjectif ; on a donc par la prop. 2, (iii), une suite exacte.

$$0 = \mathrm{Ker}(b) \to \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(a') = 0$$

puisque b est injectif et que a' est surjectif ; d'où $\mathrm{Ker}(c) = 0$.

Pour prouver (ii), considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "b"'] & v(B) \arrow[d, "c'"'] \\ A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "w'"'] & v'(B') \end{tikzcd}$$

où cette fois c' est l'application ayant même graphe que la restriction de c à $v(\mathrm{B})$, et w et w' ont respectivement mêmes graphes que v et v' ; ce diagramme est commutatif et ses lignes sont exactes. En outre w est surjectif et par hypothèse u' est injectif ; on a donc, par la prop. 2, (iii), une suite exacte

$$0 = \mathrm{Ker}(c') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b) = 0$$

puisque b est surjectif et que c' est injectif ; d'où $\mathrm{Coker}(a) = 0$.

§ 2. Modules plats (*)

1. Rappel sur les produits tensoriels.

Soient A un anneau, E un A-module à droite, M un A-module à gauche. On a défini en *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 1, le *produit tensoriel* $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, qui est un **Z**-*module.* Si E′ (resp. M′) est un A-module à droite (resp. à gauche) et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ (resp. $v : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$) un homomorphisme, on a aussi défini (*loc. cit.*, n° 2) un **Z**-*homomorphisme*

$$u \otimes v : \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{E}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}'.$$

Lemme 1. — *Soit* $\mathrm{M}' \xrightarrow{v} \mathrm{M} \xrightarrow{w} \mathrm{M}'' \to 0$ *une suite exacte de* A-*modules à gauche, et soit* E *un* A-*module à droite. La suite*

$$\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}' \xrightarrow{1 \otimes v} \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{1 \otimes w} \mathrm{E}'' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

est alors une suite exacte de groupes commutatifs.

(*) Signalons aux lecteurs déjà au courant de l'Algèbre homologique qu'ils trouveront au § 4 d'autres caractérisations des modules plats.

C'est le cor. de la prop. 5 d'*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 6.

On en conclut que pour tout homomorphisme $u : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de A-modules à gauche, $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{Coker}\ u)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Coker}\,(1_{\mathrm{E}} \otimes u)$, comme le montre le lemme 1 appliqué à la suite exacte

$$\mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{N} \to \mathrm{Coker}\ u \to 0.$$

Les notations étant celles du lemme 1, on sait (*loc. cit.*) que si v est *injectif*, c'est-à-dire si la suite $0 \to \mathrm{M}' \xrightarrow{v} \mathrm{M} \xrightarrow{w} \mathrm{M}'' \to 0$ est exacte, il n'en résulte pas nécessairement que $1_{\mathrm{E}} \otimes v$ soit injectif et l'on ne peut donc pas en général identifier $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}'$ à un sous-groupe de $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$. Rappelons toutefois (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, cor. 5 de la prop. 7) le résultat suivant :

Lemme 2. — *Si* $v : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ *est injectif et si* $v(\mathrm{M}')$ *est facteur direct de* M, *l'homomorphisme* $1_{\mathrm{E}} \otimes v$ *est injectif, et son image est facteur direct de* $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$.

2. *Modules M-plats.*

DÉFINITION 1. — *Soient* A *un anneau,* E *un* A-*module à droite et* M *un* A-*module à gauche. On dit que* E *est plat pour* M (*ou* M-*plat*) *si, pour tout* A-*module à gauche* M′ *et tout homomorphisme injectif* $v : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$, *l'homomorphisme* $1_{\mathrm{E}} \otimes v : \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}' \to \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est injectif.*

On définit de même, pour tout A-module à droite N, la notion de *module à gauche* N-*plat*. Dire qu'un A-module à droite E est plat pour un A-module à gauche M équivaut à dire que E, considéré comme A^0-module à gauche (on rappelle que A^0 désigne l'anneau opposé de A), est plat pour le A^0-module à droite M.

Lemme 3. — *Pour qu'un* A-*module à droite* E *soit* M-*plat, il suffit que pour tout sous-module de type fini* M′ *de* M, *l'homomorphisme canonique* $1_{\mathrm{E}} \otimes j : \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}' \to \mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ (*j étant l'injection canonique* $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}$) *soit injectif.*

En effet, supposons cette condition vérifiée et soit N un sous-module quelconque de M. Supposons que l'image canonique dans $E \otimes_A M$ d'un élément $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \otimes_A N$ ($x_i \in E$, $y_i \in N$) soit nulle, et soit M′ le sous-module de type fini de N engendré par les y_i ; comme par hypothèse l'application composée $E \otimes_A M' \to E \otimes_A N \to E \otimes_A M$ est injective, la somme $z' = \sum_i x_i \otimes y_i$, considérée comme élément de $E \otimes_A M'$, est nulle. Comme z est l'image de z', on a aussi $z = 0$, d'où le lemme.

Lemme 4. — *Soient* E *un* A-*module à droite et* M *un* A-*module à gauche tel que* E *soit* M-*plat. Si* N *est, soit un sous-module, soit un module quotient de* M, *alors* E *est* N-*plat.*

Le cas où N est un sous-module est facile, car si N′ est un sous-module de N, l'homomorphisme composé

$$E \otimes_A N' \to E \otimes_A N \to E \otimes_A M$$

est injectif, donc il en est de même de $E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$. Supposons donc que N soit un module quotient de M, c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte $0 \to R \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$. Soient N′ un sous-module de N, et $M' = \overset{-1}{p}(N')$. Notons i' l'application de R dans M′ ayant même graphe que i, p' la surjection $M' \to N'$, ayant même graphe que la restriction de p à M′, r l'application identique de R sur R, m l'injection canonique $M' \to M$, n l'injection canonique $N' \to N$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "r"'] & M' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "m"'] & N' \arrow[r] \arrow[d, "n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et ses lignes sont exactes.

Pour simplifier l'écriture, posons $T(Q) = E \otimes_A Q$ pour tout A-module à gauche Q et $T(v) = 1_E \otimes v$ pour tout homomorphisme v de A-modules à gauche. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T(R) \arrow[r, "T(i')"] \arrow[d, "T(r)"'] & T(M') \arrow[r, "T(p')"] \arrow[d, "T(m)"'] & T(N') \arrow[r] \arrow[d, "T(n)"'] & 0 \\
T(R) \arrow[r, "T(i)"'] & T(M) \arrow[r, "T(p)"'] & T(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et ses lignes sont exactes en vertu du nº 1, lemme 1.

De plus, puisque E est M-plat, l'homomorphisme $T(m)$ est injectif. Comme $T(r)$ et $T(p')$ sont surjectifs, il résulte du § 1, n° 4, cor. 2 de la prop. 2, que $T(n)$ est injectif, ce qui démontre le lemme.

Lemme 5. — *Soit* $(M_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille de* A-*modules à gauche,* $M = \bigoplus_{\iota\in I} M_\iota$ *leur somme directe, et* E *un* A-*module à droite. Si, pour tout* $\iota \in I$, E *est plat pour* M_ι, *alors* E *est plat pour* M.

a) Supposons d'abord que $I = \{1, 2\}$, et soit M' un sous-module de $M = M_1 \oplus M_2$, M_1 et M_2 étant canoniquement identifiés à des sous-modules de M. Désignons par M'_1 l'intersection $M' \cap M_1$, par M'_2 l'image de M' dans M_2 par la projection canonique p de M sur M_2. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_1 & \xrightarrow{i'} & M' & \xrightarrow{p'} & M'_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle v_1}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle v_2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow[i]{} & M & \xrightarrow[p]{} & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où v_1, v, v_2, i, i' sont les injections canoniques et p' l'application ayant même graphe que la restriction de p à M', qui est surjective. On vérifie aussitôt que ce diagramme est commutatif et que ses lignes sont exactes. Les notations $T(Q)$ et $T(v)$ ayant le même sens que dans la démonstration du lemme 4, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T(M'_1) & \xrightarrow{T(i')} & T(M') & \xrightarrow{T(p')} & T(M'_2) \\ {\scriptstyle T(v_1)}\downarrow & & {\scriptstyle T(v)}\downarrow & & {\scriptstyle T(v_2)}\downarrow \\ T(M_1) & \xrightarrow[T(i)]{} & T(M) & \xrightarrow[T(p)]{} & T(M_2) \end{array}$$

En vertu du lemme 1 du n° 1, les deux lignes de ce diagramme sont exactes ; comme E est plat pour M_1 et M_2, $T(v_1)$ et $T(v_2)$ sont injectifs ; en outre, en vertu du lemme 2 du n° 1, $T(i)$ est injectif. Le cor. 1 de la prop. 2 du § 1, n° 4 montre alors que $T(v)$ est injectif et par suite E est M-plat.

b) Si I est un ensemble fini à n éléments, on procède par récurrence sur n en utilisant *a*).

c) Dans le cas général, soit M' un sous-module *de type fini* de M. Il existe alors une partie finie J de l'ensemble d'indices I telle que M' soit contenu dans la somme directe $M_J = \bigoplus_{\iota\in J} M_\iota$. En vertu de *b*), E est plat pour M_J ; l'homomorphisme canonique

$E \otimes_A M' \to E \otimes_A M_J$ est donc injectif. D'autre part, comme M_J est facteur direct de M, l'homomorphisme canonique $E \otimes_A M_J \to E \otimes_A M$ est injectif (nº 1, lemme 2). Par composition, on en déduit que $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ est injectif, et E est plat pour M en vertu du lemme 3.

3. Modules plats.

PROPOSITION 1. — *Soit* E *un* A-*module à droite. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) E *est plat pour* A_s (*autrement dit, pour tout idéal à gauche* $\mathfrak{a}$ *de* A, *l'homomorphisme canonique* $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E \otimes_A A_s = E$ *est injectif*).

b) E *est* M-*plat pour tout* A-*module à gauche* M.

c) *Pour toute suite exacte de* A-*modules à gauche et d'homomorphismes*

$$M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M''$$

la suite

$$E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A M''$$

est exacte.

Il est immédiat que *b*) entraîne *a*). Inversement supposons *a*) vérifiée ; en vertu du nº 2, lemme 5, E est plat pour tout A-module à gauche *libre* ; comme tout A-module à gauche est isomorphe à un quotient d'un module libre (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 1, nº 11, prop. 20), il résulte du nº 2, lemme 4 que E est plat pour M.

Montrons que *c*) implique *b*). Si $v : M' \to M$ est un homomorphisme injectif, la suite $0 \to M' \xrightarrow{v} M$ est exacte ; en vertu de *c*), la suite $0 \to E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M$ est exacte ; cela signifie que $1 \otimes v$ est injectif, autrement dit que E est M-plat.

Enfin, l'implication *b*) $\Rightarrow$ *c*) est la conséquence du lemme plus précis suivant :

Lemme 6. — *Si* $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M''$ *est une suite exacte de* A-*modules à gauche et si* E *est un* A-*module à droite plat pour* M'', *la suite*

$$E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A M''$$

est exacte.

Utilisons les notations T(Q) et T(v) avec le même sens que dans la démonstration du lemme 4 du n° 2. Posons $M''_1 = w(M)$ et soient $i : M''_1 \to M''$ l'injection canonique et p l'application de M dans M''_1 ayant même graphe que w. La suite $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$ étant exacte, il résulte du n° 1, lemme 1 que la suite

$$T(M') \xrightarrow{T(v)} T(M) \xrightarrow{T(p)} T(M''_1) \to 0$$

est exacte. Par ailleurs, comme E est M''-plat, l'application $T(i) : T(M''_1) \to T(M'')$ est injective, et comme $T(i) \circ T(p) = T(w)$, la suite

$$T(M') \xrightarrow{T(v)} T(M) \xrightarrow{T(w)} T(M'')$$

est exacte (§ 1, n° 3).

Définition 2. — *On dit qu'un* A-*module à droite* E *est plat s'il vérifie les propriétés équivalentes de la prop.* 1.

On définit de même les A-modules à gauche plats. Dire qu'un A-module à droite E est plat équivaut à dire que E, considéré comme A^0-module à gauche, est plat.

Remarques. — 1) En vertu du n° 2, lemme 3, pour qu'un A-module à droite E soit plat, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A, *de type fini*, l'application canonique $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ (prop. 1) d'image $E\mathfrak{a}$, soit injective.

2) Soit E un A-module à droite plat. Si M' est un sous-module d'un A-module à gauche M, l'injection canonique $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ permet d'identifier $E \otimes_A M'$ à un sous-groupe de $E \otimes_A M$. Ceci étant, soient N un A-module à gauche, $u : M \to N$ un homomorphisme, $K = \operatorname{Ker} u$, $I = \operatorname{Im} u$. La considération de la suite exacte.

$$0 \to K \to M \xrightarrow{u} N$$

montre aussitôt (prop. 1) que $E \otimes_A (\operatorname{Ker} u)$ *s'identifie à* $\operatorname{Ker}(1_E \otimes u)$. D'autre part, en notant u' l'homomorphisme surjectif $M \to I$ ayant même graphe que u, et i l'injection canonique $I \to N$, $1_E \otimes u'$ est surjectif (n° 1, lemme 1) et $1_E \otimes i$ est injectif puisque E est plat. Comme $1_E \otimes u = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes u')$, $E \otimes_A (\operatorname{Im} u)$ *s'identifie à* $\operatorname{Im}(1_E \otimes u)$.

PROPOSITION 2. — (i) *Soit* $(E_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de* A-*modules à droite. Pour que* $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ *soit plat, il faut et il suffit que chacun des* E_ι *soit plat.*

(ii) *Soient* I *un ensemble ordonné,* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *un système inductif de* A-*modules à droite* (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 6, nº 6). *Si chacun des* E_α *est plat, alors* $E = \varinjlim E_\alpha$ *est plat.*

Soit $M' \to M$ un homomorphisme injectif de A-modules à gauche.

(i) Pour que l'homomorphisme somme directe

$$\bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M') \to \bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M)$$

soit injectif, il faut et il suffit que chacun des homomorphismes $E_\iota \otimes_A M' \to E_\iota \otimes_A M$ le soit (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 1, nº 6, cor. 1 de la prop. 7), ce qui démontre (i), puisque $\bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M)$ s'identifie canoniquement à $E \otimes_A M$ (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 3, nº 7, prop. 7).

(ii) Par hypothèse, chacune des suites

$$0 \to E_\alpha \otimes_A M' \to E_\alpha \otimes_A M$$

est exacte ; il en est donc de même de la suite

$$0 \to E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$$

puisque le passage à la limite inductive commute avec le produit tensoriel (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 6, nº 7, prop. 12) et conserve l'exactitude (*ibid.*, § 6, nº 6, prop. 8).

4. *Exemples de modules plats.*

1) Pour tout anneau A, il est clair que A_d est un A-module plat (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 3, nº 4, prop. 4). Il résulte alors de la prop. 2, (i), du nº 3 que tout A-module à droite libre, et plus généralement tout A-module à droite *projectif* (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 2, nº 2) est un A-module plat.

2) Si A est un anneau *semi-simple* (*Alg.*, chap. VIII, § 5, nº 1, déf. 1) tout A-module à droite E est semi-simple, donc somme directe de modules simples ; comme chacun de ces derniers est

isomorphe à un facteur direct de A_d (*ibid.*, § 5, n° 1, prop. 6), E est projectif, et par suite plat d'après 1) (cf. exerc. 16).

3) Aux chap. II et III, nous étudierons en détail deux exemples importants de A-modules plats : les anneaux de fractions $S^{-1}A$ et les séparés complétés $\hat{A}$ de A pour les topologies $\mathfrak{J}$-adiques.

PROPOSITION 3. — *Soient* A *un anneau*, E *un* A-*module à droite.*

(i) *Supposons que* E *soit plat. Pour tout élément* a *de* A *qui n'est pas diviseur à droite de* 0 (*), *les relations* $x \in E$, $xa = 0$ *entraînent* $x = 0$.

(ii) *On suppose que* A *est un anneau commutatif intègre dans lequel tout idéal de type fini est principal* (par exemple un anneau *principal* (*Alg.*, chap. VII, § 1, n° 1)). *Alors, pour que* E *soit plat, il faut et il suffit que* E *soit sans torsion.*

Prouvons (i). Soit $v : A_s \to A_s$ l'homomorphisme $t \to ta$ de A-modules à gauche ; l'hypothèse signifie que v est injectif. Comme E est plat, l'homomorphisme $1_E \otimes v : E \otimes_A A_s \to E \otimes_A A_s$ est aussi injectif. Lorsque l'on identifie canoniquement $E \otimes_A A_s$ à E, $1_E \otimes v$ devient l'endomorphisme $x \to xa$ de E. Donc la relation $xa = 0$ entraîne $x = 0$.

Prouvons (ii). D'après (i), si E est plat, E est sans torsion. Inversement, soit E un A-module sans torsion ; vérifions que, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, l'homomorphisme canonique $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ est injectif (n° 3, *Remarque* 1). Cette assertion est évidente si $\mathfrak{a} = (0)$; sinon, on a par hypothèse $\mathfrak{a} = Aa$ avec $a \in A$ et $a \neq 0$, et $t \to ta$ est alors un isomorphisme v de A sur $\mathfrak{a}$; notant i l'injection canonique $\mathfrak{a} \to A$, $i \circ v$ est l'homothétie de rapport a dans A. Alors $1_E \otimes (i \circ v)$ est l'homothétie de rapport a dans E, et est injective puisque E est supposé sans torsion. Or, on a $1_E \otimes (i \circ v) = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes v)$; comme $1_E \otimes v$ est un isomorphisme, $1_E \otimes i$ est injective, ce qui achève la démonstration.

(*) Rappelons qu'un *diviseur à droite* (resp. *à gauche*) *de* 0 dans un anneau A est un élément $b \in A$ tel que l'application $x \to xb$ (resp. $x \to bx$) ne soit pas injective.

Exemple. — Appliquant la prop. 3 à l'anneau $\mathbf{Z}$, on voit que $\mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Z}$-module plat, mais que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (pour $n \geqslant 2$) n'est pas un $\mathbf{Z}$-module plat.

5. *Platitude des modules quotients.*

Proposition 4. — *Soit* E *un* A-*module à droite. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) E *est plat.*

b) *Pour toute suite exacte de* A-*modules à droite de la forme*

$$0 \to G \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} E \to 0 \tag{1}$$

et tout A-*module à gauche* F, *la suite*

$$0 \longrightarrow G \otimes_A F \xrightarrow{v \otimes 1} H \otimes_A F \xrightarrow{w \otimes 1} E \otimes_A F \longrightarrow 0 \tag{2}$$

est exacte.

c) *Il existe une suite exacte* (1), *où* H *est plat, telle que la suite* (2) *soit exacte pour tout* A-*module à gauche* F *de la forme* $A_s/\mathfrak{a}$, *où* $\mathfrak{a}$ *est un idéal à gauche de type fini de* A.

Montrons d'abord que *a*) implique *b*). Le A-module à gauche F est isomorphe à un quotient d'un module libre (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 1, nº 11, prop. 20) ; autrement dit, on a une suite exacte

$$0 \to R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} F \to 0$$

où L est libre. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \otimes R \arrow[r, "v \otimes 1_R"] \arrow[d, "1_G \otimes i"'] & H \otimes R \arrow[r, "w \otimes 1_R"] \arrow[d, "1_H \otimes i"'] & E \otimes R \arrow[d, "1_E \otimes i"'] \\
G \otimes L \arrow[r, "v \otimes 1_L"'] \arrow[d, "1_G \otimes p"'] & H \otimes L \arrow[r, "w \otimes 1_L"'] \arrow[d, "1_H \otimes p"'] & E \otimes L \\
G \otimes F \arrow[r, "v \otimes 1_F"'] & H \otimes F &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Il est immédiat que ce diagramme est commutatif, et ses lignes et colonnes sont exactes en vertu du nº 1, lemme 1 ; en outre, comme $1_G \otimes p$ et $1_H \otimes p$ sont surjectifs (nº 1, lemme 1), on a $G \otimes F = \operatorname{Coker}(1_G \otimes i)$, $H \otimes F = \operatorname{Coker}(1_H \otimes i)$; $w \otimes 1_R$ est surjectif (nº 1, lemme 1) ; enfin, comme L est libre, donc plat, $v \otimes 1_L$ est injectif. On peut donc appliquer le diagramme du serpent (§ 1, n° 4, prop. 2, (iii)) qui prouve l'existence d'une suite exacte

$$(4) \qquad \mathrm{Ker}(1_{\mathrm{H}} \otimes i) \longrightarrow \mathrm{Ker}(1_{\mathrm{E}} \otimes i) \xrightarrow{d} \mathrm{G} \otimes \mathrm{F} \xrightarrow{v \otimes 1_{\mathrm{F}}} \mathrm{H} \otimes \mathrm{F}.$$

Cela étant, si E est plat, $1_{\mathrm{E}} \otimes i$ est injectif, autrement dit $\mathrm{Ker}(1_{\mathrm{E}} \otimes i) = 0$, et la suite exacte (4) montre que $v \otimes 1_{\mathrm{F}}$ est injectif, donc la suite (2) est exacte (compte tenu du n° 1, lemme 1).

Comme *b*) implique évidemment *c*), il nous reste à prouver que *c*) entraîne *a*). Considérons le diagramme (3) dans le cas $\mathrm{R} = \mathfrak{a}$, $\mathrm{L} = \mathrm{A}_s$, $\mathrm{F} = \mathrm{A}_s/\mathfrak{a}$, et appliquons la suite exacte (4). Par hypothèse, $v \otimes 1_{\mathrm{F}}$ est injectif, donc $\mathrm{Im}(d) = 0$; en outre, comme H est plat, on a $\mathrm{Ker}(1_{\mathrm{H}} \otimes i) = 0$; l'exactitude de la suite (4) entraîne donc $\mathrm{Ker}(1_{\mathrm{E}} \otimes i) = 0$, autrement dit $1_{\mathrm{E}} \otimes i$ est injectif et cela prouve que E est plat (n° 3, *Remarque* 1).

PROPOSITION 5. — *Soit* $0 \to \mathrm{E}' \xrightarrow{v} \mathrm{E} \xrightarrow{w} \mathrm{E}'' \to 0$ *une suite exacte de* A*-modules à droite. Supposons que* E″ *soit plat. Alors, pour que* E *soit plat, il faut et il suffit que* E′ *soit plat.*

Soit $u : \mathrm{F}' \to \mathrm{F}$ un homomorphisme injectif de A-modules à gauche. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{E}' \otimes \mathrm{F}' & \xrightarrow{v \otimes 1_{\mathrm{F}'}} & \mathrm{E} \otimes \mathrm{F}' & \xrightarrow{w \otimes 1_{\mathrm{F}'}} & \mathrm{E}'' \otimes \mathrm{F}' \\
{\scriptstyle 1_{\mathrm{E}'} \otimes u} \downarrow & & {\scriptstyle 1_{\mathrm{E}} \otimes u} \downarrow & & {\scriptstyle 1_{\mathrm{E}''} \otimes u} \downarrow \\
\mathrm{E}' \otimes \mathrm{F} & \xrightarrow[v \otimes 1_{\mathrm{F}}]{} & \mathrm{E} \otimes \mathrm{F} & \xrightarrow[w \otimes 1_{\mathrm{F}}]{} & \mathrm{E}'' \otimes \mathrm{F}
\end{array}$$

Il est commutatif et ses lignes sont exactes (n° 1, lemme 1). Puisque E″ est plat, $1_{\mathrm{E}''} \otimes u$ est injectif ; en outre, la prop. 4 prouve que $v \otimes 1_{\mathrm{F}'}$ et $v \otimes 1_{\mathrm{F}}$ sont injectifs. Cela étant, si E est plat, $1_{\mathrm{E}} \otimes u$ est injectif, donc aussi $(1_{\mathrm{E}} \otimes u) \circ (v \otimes 1_{\mathrm{F}'}) = (v \otimes 1_{\mathrm{F}}) \circ (1_{\mathrm{E}'} \otimes u)$; on en conclut que $1_{\mathrm{E}'} \otimes u$ est injectif, et par suite E′ est plat. Réciproquement, si E′ est plat, $1_{\mathrm{E}'} \otimes u$ est injectif ; on conclut alors du § 1, n° 4, cor. 1 de la prop. 2, que $1_{\mathrm{E}} \otimes u$ est injectif, et par suite E est plat.

Remarques. — 1) Il peut se faire que E et E′ soient plats sans que E″ le soit, comme le montre l'exemple des **Z**-modules $\mathrm{E} = \mathbf{Z}$, $\mathrm{E}' = n\mathbf{Z}$, $\mathrm{E}'' = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $(n \geqslant 2)$.

2) Un sous-module d'un module plat n'est pas nécessairement un module plat (exerc. 3).

6. Propriétés d'intersection.

Lemme 7. — *Soient* E *un* A-*module à droite*, F *un* A-*module à gauche*, F′, F″ *deux sous-modules de* F *tels que* $F = F' + F''$. *Alors l'intersection des images canoniques de* $E \otimes F'$ *et* $E \otimes F''$ *dans* $E \otimes F$ *est égale à l'image canonique de* $E \otimes (F' \cap F'')$.

Considérons en effet le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F' \cap F'' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'/(F' \cap F'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j & & \\ 0 & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & F' + F'' & \to & (F' + F'')/F'' & \to & 0 \end{array}$$

où les flèches non spécifiées sont les injections et surjections canoniques et j est l'isomorphisme canonique défini dans (*Alg.*, chap. I, § 6, n° 13, th. 6). Ce diagramme est commutatif et ses lignes sont exactes. On en déduit (puisque $F = F' + F''$) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E \otimes (F' \cap F'') & \to & E \otimes F' & \to & E \otimes (F'/(F' \cap F'')) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1_E \otimes j \\ E \otimes F'' & \longrightarrow & E \otimes F & \longrightarrow & E \otimes (F/F'') \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes (n° 1, lemme 1) et $1_E \otimes j$ est un isomorphisme. Notre assertion est alors un cas particulier du § 1, n° 4, prop. 1, (i). (Cf. exerc. 5.)

Proposition 6. — *Soient* E *un* A-*module à droite et* F *un* A-*module à gauche tels que* E *soit plat pour* F. *Pour tout sous-module* F′ *de* F, *notons* $\varphi(F')$ *l'image de* $E \otimes F'$ *par l'application canonique de* $E \otimes F'$ *dans* $E \otimes F$ (*qui est injective en vertu de la déf.* 1 *du n°* 2). *Alors, si* F′, F″ *sont deux sous-modules de* F, *on a*

$$\varphi(F' \cap F'') = \varphi(F') \cap \varphi(F'').$$

En effet, comme E est plat pour F, $\varphi(F' + F'')$ s'identifie à $E \otimes (F' + F'')$, et les sous-modules $\varphi(F')$, $\varphi(F'')$ et $\varphi(F' \cap F'')$ s'identifient aux images canoniques de $E \otimes F'$, $E \otimes F''$ et $E \otimes (F' \cap F'')$ dans $E \otimes (F' + F'')$ respectivement. La prop. 6 résulte alors du lemme 7.