N. BOURBAKI

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1984

ISBN-10 3-540-33938-8 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-33938-0 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXdesign, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

AVERTISSEMENT

Cet ouvrage rassemble, sans modification substantielle, la plupart des Notes historiques parues jusqu'ici dans mes *Eléments de Mathématique*. On en a seulement rendu la lecture indépendante des chapitres des *Eléments* auxquels ces Notes font suite ; elles sont donc en principe accessibles à tout lecteur pourvu d'une solide culture mathématique classique, du niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur.

Bien entendu, les études séparées qui constituent ce volume ne sauraient en aucune manière prétendre à esquisser, même de façon sommaire, une histoire suivie et complète du développement de la Mathématique jusqu'à nos jours. Des parties entières des mathématiques classiques comme la Géométrie différentielle, la Géométrie algébrique, le Calcul des variations, n'y sont mentionnées que par allusions; d'autres, telles que la théorie des fonctions analytiques, celles des équations différentielles ou aux dérivées partielles, sont à peine effleurées; à plus forte raison, ces lacunes deviennent-elles plus nombreuses et plus importantes quand on arrive à l'époque moderne. Il va sans dire qu'il ne s'agit pas là d'omissions intentionnelles; elles sont simplement dues au fait que les chapitres correspondants des *Éléments* n'ont pas encore été publiés.

Enfin, le lecteur ne trouvera pratiquement dans ces Notes aucun renseignement biographique ou anecdotique sur les mathématiciens dont il est question ; on a cherché surtout, pour chaque théorie, à faire apparaître aussi clairement que possible quelles en ont été les idées directrices, et comment ces idées se sont développées et ont réagi les unes sur les autres.

Les nombres en caractères italiques renvoient à la Bibliographie placée à la fin du volume.

TABLE DES MATIÈRES

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES
LOGIQUE
THÉORIE DES ENSEMBLES

L'étude de ce que l'on a coutume d'appeler les « fondements des Mathématiques », qui s'est poursuivie sans relâche depuis le début du XIXᵉ siècle, n'a pu être menée à bien que grâce à un effort parallèle de systématisation de la Logique, tout au moins dans celles de ses parties qui régissent l'enchaînement des propositions mathématiques. Aussi ne peut-on dissocier l'histoire de la Théorie des ensembles et de la formalisation des mathématiques de celle de la « Logique mathématique ». Mais la logique traditionnelle, comme celle des philosophes modernes, couvre en principe un champ d'applications beaucoup plus vaste que la Mathématique. Le lecteur ne doit donc pas s'attendre à trouver dans ce qui suit une histoire de la Logique, même sous une forme très sommaire ; nous nous sommes bornés autant que possible à ne retracer l'évolution de la Logique que dans la mesure où elle a réagi sur celle de la Mathématique. C'est ainsi que nous ne dirons rien des logiques non classiques (logiques à plus de deux valeurs, logiques modales) ; à plus forte raison ne pourrons-nous aborder l'historique des controverses qui, des Sophistes à l'École de Vienne, n'ont cessé de diviser les philosophes quant à la possibilité et à la manière d'appliquer la Logique aux objets du monde sensible ou aux concepts de l'esprit humain.

Qu'il y ait eu une mathématique préhellénique fort développée, c'est ce qui ne saurait aujourd'hui être mis en doute. Non seulement les notions (déjà fort abstraites) de nombre entier et de mesure des grandeurs sont-elles couramment utilisées dans les documents les plus anciens qui nous soient parvenus d'Égypte ou de Chaldée, mais l'algèbre babylonienne, par l'élégance et la sûreté de ses méthodes, ne saurait se concevoir comme une simple collection de problèmes résolus par tâtonnements empiriques. Et, si on ne rencontre dans les textes rien qui ressemble à une « démonstration » au sens formel du mot, on est en droit de penser que la découverte de tels procédés de résolution, dont la généralité transparaît sous les applications numériques particulières, n'a pu s'effectuer sans un minimum d'enchaînements logiques (peut-être pas entièrement conscients, mais plutôt du genre de ceux sur lesquels s'appuie un algébriste moderne lorsqu'il entreprend un calcul, avant d'en « mettre en forme » tous les détails) ([*232*], p. 203 sqq.).

L'originalité essentielle des Grecs consiste précisément en un effort conscient pour ranger les démonstrations mathématiques en une succession telle que le passage d'un chaînon au suivant ne laisse aucune place au doute et contraigne l'assentiment universel. Que les mathématiciens grecs se soient servis au cours de leurs recherches, tout comme les modernes, de raisonnements « heuristiques » plutôt que probants, c'est ce que démontrerait par exemple (s'il en était besoin) le « traité de la méthode » d'Archimède [*153* c]; on notera aussi, chez celui-ci, des allusions à des résultats «trouvés, mais non démontrés» par des mathématiciens antérieurs*. Mais, dès les premiers textes détaillés qui nous soient connus (et qui datent du milieu du Ve siècle), le « canon » idéal d'un texte mathématique est bien fixé. Il trouvera sa réalisation la plus achevée chez les grands classiques, Euclide, Archimède et Apollonius ; la notion de démonstration, chez ces auteurs, ne diffère en rien de la nôtre.

Nous n'avons aucun texte nous permettant de suivre les premiers pas de cette « méthode déductive », qui nous apparaît déjà proche de la perfection au moment même où nous en constatons l'existence. On peut seulement penser qu'elle s'inscrit assez naturellement dans la perpétuelle recherche d'« explications » du monde, qui caractérise la pensée grecque et qui est si visible déjà chez les philosophes ioniens du VIIe siècle ; en outre, la tradition est unanime à attribuer le développement et la mise au point de la méthode à l'école pythagoricienne, à une époque qui se situe entre la fin du VIe et le milieu du Ve siècle.

* Notamment Démocrite, à qui Archimède attribue la découverte de la formule donnant le volume d'une pyramide ([*153* c], p. 13). Cette allusion est à rapprocher d'un fragment célèbre attribué à Démocrite (mais d'authenticité contestée), où il déclare : « *Personne ne m'a jamais surpassé dans la construction de figures au moyen de preuves, pas même les « harpédonaptes » égyptiens, comme on les appelle* » ([*89*], t. I, p. 439 et t. II, 1, p. 727-728). La remarque d'Archimède et le fait qu'on n'a jamais trouvé de démonstration (au sens classique) dans les textes égyptiens qui nous sont parvenus, conduisent à penser que les « preuves » auxquelles fait allusion Démocrite n'étaient plus considérées comme telles à l'époque classique, et ne le seraient pas non plus aujourd'hui.

C'est sur cette mathématique « déductive », pleinement consciente de ses buts et de ses méthodes, que va s'exercer la réflexion philosophique et mathématique des âges suivants. Nous verrons d'une part s'édifier peu à peu la Logique « formelle » sur le modèle des mathématiques, pour aboutir à la création des langages formalisés ; d'autre part, principalement à partir du début du XIXe siècle, on s'interrogera de plus en plus sur les concepts de base de la Mathématique, et on s'efforcera d'en éclaircir la nature, surtout après l'avènement de la Théorie des ensembles.

LA FORMALISATION DE LA LOGIQUE

L'impression générale qui semble résulter des textes (fort lacunaires) que nous possédons sur la pensée philosophique grecque du Ve siècle, est qu'elle est dominée par un effort de plus en plus conscient pour étendre à tout le champ de la pensée humaine les procédés d'articulation du discours mis en œuvre avec tant de succès par la rhétorique et la mathématique contemporaines — en d'autres termes, pour créer la Logique au sens le plus général de ce mot. Le ton des écrits philosophiques subit à cette époque un brusque changement : alors qu'au VIIe ou au VIe siècle les philosophes affirment ou vaticinent (ou tout au plus ébauchent de vagues raisonnements, fondés sur de tout aussi vagues analogies), à partir de Parménide et surtout de Zénon, ils argumentent, et cherchent à dégager des principes généraux qui puissent servir de base à leur dialectique : c'est chez Parménide qu'on trouve la première affirmation du principe du tiers exclu, et les démonstrations « par l'absurde » de Zénon d'Elée sont restées célèbres. Mais Zénon écrit au milieu du Ve siècle ; et, quelles que soient les incertitudes de notre documentation*, il est très vraisemblable qu'à cette époque, les mathématiciens, dans leur propre sphère, se servaient couramment de ces principes.

Comme nous l'avons dit plus haut, il ne nous appartient pas de retracer les innombrables difficultés qui surgissent à chaque pas dans la gestation de cette Logique, et les polémiques qui en résultent, des

* Le plus bel exemple classique de raisonnement par l'absurde en mathématiques est la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, à laquelle Aristote fait plusieurs fois allusion ; mais les érudits modernes ne sont pas parvenus à dater cette découverte avec quelque précision, certains la plaçant au début et d'autres tout à la fin du Ve siècle (voir p. 185 et les références citées à ce propos).

Eléates à Platon et Aristote, en passant par les Sophistes ; relevons seulement ici le rôle que joue dans cette évolution la culture assidue de l'art oratoire et l'analyse du langage qui en est un corollaire, développements que l'on s'accorde à attribuer principalement aux Sophistes du v^e^ siècle. D'autre part, si l'influence des mathématiques n'est pas toujours reconnue explicitement, elle n'en est pas moins manifeste, en particulier dans les écrits de Platon et d'Aristote. On a pu dire que Platon était presque obsédé par les mathématiques ; sans être lui-même un inventeur dans ce domaine, il s'est, à partir d'une certaine époque de sa vie, mis au courant des découvertes des mathématiciens contemporains (dont beaucoup étaient ses amis ou ses élèves), et n'a plus cessé de s'y intéresser de la manière la plus directe, allant jusqu'à suggérer de nouvelles directions de recherche ; aussi est-ce constamment que, sous sa plume, les mathématiques viennent servir d'illustration ou de modèle (et même parfois alimenter, comme chez les Pythagoriciens, son penchant vers le mysticisme). Quant à son élève Aristote, il n'a pu manquer de recevoir le minimum de formation mathématique qui était exigé des élèves de l'Académie, et on a fait un volume des passages de son œuvre qui se rapportent aux mathématiques ou y font allusion [*153* d]; mais il ne semble jamais avoir fait grand effort pour garder le contact avec le mouvement mathématique de son époque, et il ne cite dans ce domaine que des résultats qui avaient été vulgarisés depuis longtemps. Ce décalage ne fera d'ailleurs que s'accentuer chez la plupart des philosophes postérieurs, dont beaucoup, faute de préparation technique, s'imagineront en toute bonne foi parler des mathématiques en connaissance de cause, alors qu'ils ne feront que se référer à un stade depuis longtemps dépassé dans l'évolution de celles-ci.

L'aboutissement de cette période, en ce qui concerne la Logique, est l'œuvre monumentale d'Aristote [*6*], dont le grand mérite est d'avoir réussi à systématiser et codifier pour la première fois des procédés de raisonnement restés vagues ou informulés chez ses prédécesseurs *. Il nous faut surtout retenir ici, pour notre objet, la thèse

* Malgré la simplicité et l' « évidence » que paraissent présenter pour nous les règles logiques formulées par Aristote, il n'est que de les replacer dans leur cadre historique pour apprécier les difficultés qui s'opposaient à une conception précise de ces règles, et l'effort qu'a dû déployer Aristote pour y parvenir : Platon, dans ses dialogues, où il s'adresse à un public cultivé, laisse encore ses personnages s'embrouiller sur des questions aussi élémentaires que les rapports entre la négation de $A \subset B$ et la relation $A \cap B = \varnothing$ (en langage moderne), quitte à faire apparaître par la suite la réponse correcte [*264*].

générale de cette œuvre, savoir qu'il est possible de réduire tout raisonnement correct à l'application systématique d'un petit nombre de règles immuables, indépendantes de la nature particulière des objets dont il est question (indépendance clairement mise en évidence par la notation des concepts ou des propositions à l'aide de lettres — vraisemblablement empruntée par Aristote aux mathématiciens). Mais Aristote concentre à peu près exclusivement son attention sur un type particulier de relations et d'enchaînements logiques, constituant ce qu'il appelle le « syllogisme » : il s'agit essentiellement de relations que nous traduirions à l'heure actuelle sous la forme $A \subset B$ ou $A \cap B \neq \emptyset$ en langage de théorie des ensembles *, et de la manière d'enchaîner ces relations ou leurs négations, au moyen du schéma

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Aristote était encore trop averti des mathématiques de son époque pour ne pas s'être aperçu que les schémas de ce genre n'étaient pas suffisants pour rendre compte de toutes les opérations logiques des mathématiciens, ni à plus forte raison des autres applications de la Logique ([*6*], An. Pr., I, 35; [*153* d], p. 25-26)**. Du moins l'étude approfondie des diverses formes de « syllogisme » à laquelle il se livre (et qui est presque entièrement consacrée à l'élucidation des perpétuelles difficultés que soulève l'ambiguité ou l'obscurité des termes sur lesquels porte le raisonnement) lui donne-t-elle entre autres l'occasion de formuler des règles pour prendre la négation d'une proposition ([*6*], An. Pr., I, 46). C'est aussi à Aristote que revient le

* Les énoncés correspondants d'Aristote sont « Tout A est B » et « Quelque A est B » ; dans ces notations A (le « sujet ») et B (le « prédicat ») remplacent des concepts, et dire que « Tout A est un B » signifie que l'on peut attribuer le concept B à tout être auquel on peut attribuer le concept A (A est le concept « homme » et B le concept « mortel » dans l'exemple classique). L'interprétation que nous en donnons consiste à considérer les ensembles d'êtres auxquels s'appliquent respectivement les concepts A et B ; c'est le point de vue dit « de l'extension », déjà connu d'Aristote. Mais ce dernier considère surtout la relation « Tout A est B » d'un autre point de vue, dit « de la compréhension », où B est envisagé comme un des concepts qui constituent en quelque sorte le concept plus complexe A, ou, comme dit Aristote, lui « appartiennent ». Au premier abord, les deux points de vue paraissent aussi naturels l'un que l'autre, mais le point de vue « de la compréhension » a été une source constante de difficultés dans le développement de la Logique (il paraît plus éloigné de l'intuition que le premier, et entraîne assez facilement à des erreurs, notamment dans les schémas où interviennent des négations; cf. [*69* a], p. 21-32).

** Pour une discussion critique du syllogisme et de ses insuffisances, voir par exemple ([*69* a], p. 432-441) ou ([*164*], p. 44-50).

mérite d'avoir distingué avec une grande netteté le rôle des propositions « universelles » de celui des propositions « particulières », première ébauche des quantificateurs *. Mais on sait trop comment l'influence de ses écrits (souvent interprétés de façon étroite et inintelligente), qui reste encore très sensible jusque bien avant dans le XIXe siècle, devait encourager les philosophes dans leur négligence de l'étude des mathématiques, et bloquer les progrès de la Logique formelle **.

Toutefois cette dernière continue à progresser dans l'Antiquité, au sein des écoles mégarique et stoïcienne, rivales des Péripatéticiens. Nos renseignements sur ces doctrines sont malheureusement tous de seconde main, souvent transmis par des adversaires ou de médiocres commentateurs. Le progrès essentiel accompli par ces logiciens consiste, semble-t-il, en la fondation d'un « calcul propositionnel » au sens où on l'entend aujourd'hui : au lieu de se borner, comme Aristote, aux propositions de la forme particulière $A \subset B$, ils énoncent des règles concernant des propositions entièrement *indéterminées*. En outre, ils avaient analysé les rapports logiques entre ces règles de façon si approfondie qu'ils savaient les déduire toutes de cinq d'entre elles, posées comme « indémontrables », par des procédés très semblables aux méthodes modernes [*23*]. Malheureusement leur influence fut assez éphémère, et leurs résultats devaient sombrer dans l'oubli jusqu'au jour où ils furent redécouverts par les logiciens du XIXe siècle. Le maître incontesté, en Logique, reste Aristote jusqu'au XVIIe siècle ; on sait en particulier que les philosophes scolastiques sont entièrement sous son influence, et si leur contribution à la logique formelle est loin d'être négligeable [*25*], elle ne comporte aucun progrès de premier plan par rapport à l'acquit des philosophes de l'Antiquité.

Il convient d'ailleurs de noter ici qu'il ne semble pas que les travaux d'Aristote ou de ses successeurs aient eu un retentissement notable sur les mathématiques. Les mathématiciens grecs poursuivent leurs recherches dans la voie ouverte par les Pythagoriciens et leurs successeurs du IVe siècle (Théodore, Théétète, Eudoxe) sans se soucier apparemment de logique formelle dans la présentation de leurs résul-

* L'absence de véritables quantificateurs (au sens moderne) jusqu'à la fin du XIXe siècle, a été une des causes de la stagnation de la Logique formelle.
** On cite le cas d'un universitaire éminent qui, dans une conférence récente faite à Princeton en présence de Gödel, aurait dit que rien de nouveau ne s'était fait en Logique depuis Aristote !

tats : constatation qui ne doit guère étonner quand on compare la souplesse et la précision acquises, dès cette époque, par le raisonnement mathématique, à l'état fort rudimentaire de la logique aristotélicienne. Et lorsque la logique va dépasser ce stade, ce sont encore les nouvelles acquisitions des mathématiques qui la guideront dans son évolution.

Avec le développement de l'algèbre, on ne pouvait en effet manquer d'être frappé par l'analogie entre les règles de la Logique formelle et les règles de l'algèbre, les unes comme les autres ayant le caractère commun de s'appliquer à des objets (propositions ou nombres) non précisés. Et lorsqu'au XVII^e siècle la notation algébrique a pris sa forme définitive entre les mains de Viète et de Descartes, on voit presque aussitôt apparaître divers essais d'une écriture symbolique destinée à représenter les opérations logiques ; mais, avant Leibniz, ces tentatives, comme par exemple celle d'Hérigone (1644) pour noter les démonstrations de la Géométrie élémentaire, ou celle de Pell (1659) pour noter celles de l'Arithmétique, restent très superficielles et ne conduisent à aucun progrès dans l'analyse du raisonnement mathématique.

Avec Leibniz, on est en présence d'un philosophe qui est aussi un mathématicien de premier plan, et qui va savoir tirer de son expérience mathématique le germe des idées qui feront sortir la logique formelle de l'impasse scolastique *. Esprit universel s'il en fut jamais, source inépuisable d'idées originales et fécondes, Leibniz devait s'intéresser d'autant plus à la Logique qu'elle s'inserait au cœur même de ses grands projets de formalisation du langage et de la pensée, auxquels il ne cessa de travailler toute sa vie. Rompu dès son enfance à la logique scolastique, il avait été séduit par l'idée (remon-

* Bien que Descartes et (à un moindre degré) Pascal aient consacré une partie de leur œuvre philosophique aux fondements des mathématiques, leur contribution aux progrès de la Logique formelle est négligeable. Sans doute faut-il en voir la raison dans la tendance fondamentale de leur pensée, l'effort d'émancipation de la tutelle scolastique, qui les portait à rejeter tout ce qui pouvait s'y rattacher, et en premier lieu la Logique formelle. De fait, dans ses *Réflexions sur l'esprit géométrique*, Pascal, comme il le reconnaît lui-même, se borne essentiellement à couler en formules bien frappées les principes connus des démonstrations euclidiennes (par exemple, le fameux précepte : « *Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis* » ([*244*], t. IX, p. 280) était essentiellement connu d'Aristote ([*6*], Top., VI, 4; [*153* d], p. 87)). Quant à Descartes, les règles de raisonnement qu'il pose sont avant tout des préceptes psychologiques (assez vagues) et non des critères logiques; comme le lui reproche Leibniz ([*69* a], p. 94 et 202-203), elles n'ont par suite qu'une portée subjective.

tant à Raymond Lulle) d'une méthode qui résoudrait tous les concepts humains en concepts primitifs, constituant un « Alphabet des pensées humaines », et les recombinerait de façon quasi mécanique pour obtenir toutes les propositions vraies ([*198* b], t. VII, p. 185; cf. [*69* a], chap. II). Très jeune aussi, il avait conçu une autre idée beaucoup plus originale, celle de l'utilité des notations symboliques comme « fil d'Ariane » de la pensée * : « *La veritable methode* », dit-il, « *nous doit fournir un* filum Ariadnes, *c'est-à-dire un certain moyen sensible et grossier, qui conduise l'esprit, comme sont les lignes tracées en geometrie et les formes des operations qu'on prescrit aux apprentifs en Arithmétique. Sans cela nostre esprit ne sçauroit faire un long chemin sans s'egarer.* » ([*198* b], t. VII, p. 22; cf. [*69* a], p. 90). Peu au courant des mathématiques de son époque jusque vers sa 25ᵉ année, c'est d'abord sous forme de « langue universelle » qu'il présente ses projets ([*69* a], chap. III) ; mais dès qu'il entre en contact avec l'Algèbre, il l'adopte pour modèle de sa « Caractéristique universelle ». Il entend par là une sorte de langage symbolique, capable d'exprimer sans ambiguïté toutes les pensées humaines, de renforcer notre pouvoir de déduction, d'éviter les erreurs par un effort d'attention tout mécanique, enfin construit de telle sorte que « *les chimeres, que celuy même qui les avance n'entend pas, ne pourront pas estre écrites en ces caracteres* » ([*198* a], t. I, p. 187). Dans les innombrables passages de ses écrits où Leibniz fait allusion à ce projet grandiose et aux progrès qu'entraînerait sa réalisation (cf. [*69* a], chap. IV et VI), on voit avec quelle clarté il concevait la notion de langage formalisé, pure combinaison de signes dont seul importe l'enchaînement **, de sorte qu'une machine serait capable de fournir tous les théorèmes ***, et que toutes les controverses se résoudraient par un simple calcul ([*198* b], t. VII, p. 198-203). Si ces espoirs peuvent paraître démesurés, il n'en est pas moins vrai que c'est à cette tendance constante de la pensée de Leibniz qu'il faut rattacher une bonne part de son œuvre mathéma-

* Bien entendu, l'intérêt d'un tel symbolisme n'avait pas échappé aux prédécesseurs de Leibniz en ce qui concerne les mathématiques, et Descartes, par exemple, recommande de remplacer des figures entières « *par des signes très courts* » (XVIᵉ Règle pour la direction de l'esprit; [*85* a], t. X, p. 454). Mais personne avant Leibniz n'avait insisté avec autant de vigueur sur la portée universelle de ce principe.

** Il est frappant de le voir citer comme exemples de raisonnement « en forme », « *un compte de receveur* » ou même un texte judiciaire ([*198* b], t. IV, p. 295).

*** On sait que cette conception d'une « machine logique » est utilisée de nos jours en métamathématique, où elle rend de grands services ([*181*], chap. XIII).

tique, à commencer par ses travaux sur le symbolisme du Calcul infinitésimal (voir p. 238-241) ; il en était lui-même parfaitement conscient, et reliait explicitement aussi à sa « Caractéristique » ses idées sur la notation indicielle et les déterminants ([*198* a], t. II, p. 204; cf. [*69* a], p. 481-487) et son ébauche de « Calcul géométrique » (voir p. 71 et 84-86; cf. [*69* a], chap. IX). Mais dans son esprit, la pièce essentielle devait en être la Logique symbolique, ou, comme il dit, un « Calculus ratiocinator », et s'il ne parvint pas à créer ce calcul, du moins le voyons-nous s'y essayer à trois reprises au moins. Dans une première tentative, il a l'idée d'associer à chaque terme « primitif » un nombre premier, tout terme composé de plusieurs termes primitifs étant représenté par le produit des nombres premiers correspondants * ; il cherche à traduire dans ce système les règles usuelles du syllogisme, mais se heurte à des complications considérables causées par la négation (qu'il essaie, assez naturellement, de représenter par le changement de signe) et abandonne rapidement cette voie ([*198* c], p. 42-96; cf. [*69* a], p. 326-344). Dans des essais ultérieurs, il cherche à donner à la logique aristotélicienne une forme plus algébrique ; tantôt il conserve la notation AB pour la conjonction de deux concepts ; tantôt il utilise la notation A + B ** ; il observe (en notation multiplicative) la loi d'idempotence AA = A, remarque qu'on peut remplacer la proposition « tout A est B » par l'égalité A = AB et qu'on peut retrouver à partir de là la plupart des règles d'Aristote par un pur calcul algébrique ([*198* c], p. 229-237 et 356-399; cf. [*69* a], p. 345-364) ; il a aussi l'idée du concept vide (« non Ens »), et reconnaît par exemple l'équivalence des propositions « tout A est B » et « A.(non B) n'est pas » (*loc.cit.*). En outre, il remarque que son calcul logique s'applique non seulement à la logique des concepts, mais aussi à celle des propositions ([*198* c], p. 377). Il paraît donc très proche du « calcul booléien ». Malheureusement, il semble qu'il n'ait pas réussi à se dégager complètement de l'influence scolastique ; non seulement il se propose à peu près uniquement pour but de son calcul la transcription, dans ses notations, des règles du syllogisme ***,

* L'idée a été reprise avec succès par Gödel dans ses travaux de métamathématique, sous une forme légèrement différente (cf. [*130* a] et [*181*], p. 254).
** Leibniz ne cherche à introduire dans son calcul la disjonction que dans quelques fragments (où il la note A + B) et ne semble pas avoir réussi à manier simultanément cette opération et la conjonction de façon satisfaisante ([*69* a], p. 363).
*** Leibniz savait fort bien que la logique aristotélicienne était insuffisante pour traduire formellement les textes mathématiques, mais, malgré quelques tentatives, il ne parvint jamais à l'améliorer à cet égard ([*69* a], p. 435 et 560).

mais il va jusqu'à sacrifier ses idées les plus heureuses au désir de retrouver intégralement les règles d'Aristote, même celles qui étaient incompatibles avec la notion d'ensemble vide *.

Les travaux de Leibniz restèrent en grande partie inédits jusqu'au début du XX^e^ siècle, et n'eurent que peu d'influence directe. Pendant tout le XVIII^e^ et le début du XIX^e^ siècle, divers auteurs (de Segner, J. Lambert, Ploucquet, Holland, De Castillon, Gergonne) ébauchent des tentatives semblables à celles de Leibniz, sans jamais dépasser sensiblement le point où s'était arrêté celui-ci ; leurs travaux n'eurent qu'un très faible retentissement, ce qui fait que la plupart d'entre eux ignorent tout des résultats de leurs prédécesseurs **. C'est d'ailleurs dans les mêmes conditions qu'écrit G. Boole, qui doit être considéré comme le véritable créateur de la logique symbolique moderne [*29*]. Son idée maîtresse consiste à se placer systématiquement au point de vue de l' « extension », donc à calculer directement sur les ensembles, en notant xy l'intersection de deux ensembles, et $x + y$ leur réunion lorsque x et y n'ont pas d'élément commun. Il introduit en outre un « univers » noté 1 (ensemble de tous les objets) et l'ensemble vide noté 0, et il écrit $1 - x$ le complémentaire de x. Comme l'avait fait Leibniz, il interprète la relation d'inclusion par la relation $xy = x$ (d'où il tire sans peine la justification des règles du syllogisme classique) et ses notations pour la réunion et le complémentaire donnent à son système une souplesse qui avait manqué à ses devanciers ***. En outre, en associant à toute proposition l'ensemble des « cas » où elle est vérifiée, il interprète la relation d'implication comme une inclusion, et son calcul des ensembles lui donne de cette façon les règles du « calcul propositionnel ».

Dans la seconde moitié du XIX^e^ siècle, le système de Boole sert de base aux travaux d'une active école de logiciens, qui l'améliorent et

* Il s'agit des règles dites « de conversion » basées sur le postulat que « Tout A est un B » entraîne « Quelque A est un B », ce qui suppose naturellement que A n'est pas vide.

** L'influence de Kant, à partir du milieu du XVIII^e^ siècle, entre sans doute pour une part dans le peu d'intérêt suscité par la logique formelle à cette époque; il estime que « *nous n'avons besoin d'aucune invention nouvelle en logique* », la forme donnée à celle-ci par Aristote étant suffisante pour toutes les applications qu'on en peut faire ([*178*], t. VIII, p. 340). Sur les conceptions dogmatiques de Kant à propos des mathématiques et de la logique, on pourra consulter [*69* b].

*** Notons en particulier que Boole utilise la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, qui paraît avoir été remarquée pour la première fois par J. Lambert.

le complètent sur divers points. C'est ainsi que Jevons (1864) élargit le sens de l'opération de réunion $x + y$ en l'étendant au cas où x et y sont quelconques ; A. de Morgan en 1858 et C. S. Peirce en 1867 démontrent les relations de dualité

$$(\complement A) \cap (\complement B) = \complement (A \cup B), \qquad (\complement A) \cup (\complement B) = \complement (A \cap B)^{*};$$

De Morgan aborde aussi, en 1860, l'étude des relations, définissant l'inversion et la composition des relations binaires (c'est-à-dire les opérations qui correspondent aux opérations $\overset{-1}{G}$ et $G_1 \circ G_2$ sur les graphes)**. Tous ces travaux se trouvent systématiquement exposés et développés dans le massif et prolixe ouvrage de Schröder [*277*]. Mais il est assez curieux de noter que les logiciens dont nous venons de parler ne paraissent guère s'intéresser à l'application de leurs résultats aux mathématiques, et que, tout au contraire, Boole et Schröder notamment semblent avoir pour but principal de développer l'algèbre « booléienne » en calquant ses méthodes et ses problèmes sur l'algèbre classique (souvent de façon assez artificielle). Il faut sans doute voir les raisons de cette attitude dans le fait que le calcul booléien manquait encore de commodité pour transcrire la plupart des raisonnements mathématiques ***, et ne fournissait ainsi qu'une réponse très partielle au grand rêve de Leibniz. La construction de formalismes mieux adaptés aux mathématiques — dont l'introduction des variables et des quantificateurs, due indépendamment à Frege [*117* a, b, c] et C. S. Peirce [*248* b], constitue l'étape capitale — fut l'œuvre de logiciens et de mathématiciens qui, à la différence des précédents, avaient avant tout en vue les applications aux fondements des mathématiques.

* Il faut noter que des énoncés équivalents à ces règles se trouvent déjà chez certains philosophes scolastiques ([*25*], p. 67 sqq.).

** Toutefois, la notion de produit « cartésien » de deux ensembles quelconques ne paraît explicitement introduite que par G. Cantor ([*47*], p. 286); c'est aussi Cantor qui définit le premier l'exponentiation A^B (*loc. cit.*, p. 287); la notion générale de produit infini est due à A. N. Whitehead ([*333*], p. 369). L'utilisation des graphes de relations est assez récente ; si l'on excepte bien entendu le cas classique des fonctions numériques de variables réelles, elle semble apparaître pour la première fois chez les géomètres italiens, notamment C. Segre, dans leur étude des correspondances algébriques.

*** Pour *chaque* relation obtenue à partir d'une ou de plusieurs relations données par application de nos quantificateurs, il faudrait, dans ce calcul, introduire une notation *ad hoc*, du type des notations $\overset{-1}{G}$ et $G_1 \circ G_2$ (cf. par exemple [*248* b]).

Le projet de Frege [*117* b et c] était de fonder l'arithmétique sur une logique formalisée en une « écriture des concepts » (Begriffschrift) et nous reviendrons plus loin (p. 45) sur la façon dont il définit les entiers naturels. Ses ouvrages se caractérisent par une précision et une minutie extrêmes dans l'analyse des concepts ; c'est en raison de cette tendance qu'il introduit mainte distinction qui s'est révélée d'une grande importance en logique moderne : par exemple, c'est lui qui le premier distingue entre l'énoncé d'une proposition et l'assertion que cette proposition est vraie, entre la relation d'appartenance et celle d'inclusion, entre un objet x et l'ensemble $\{x\}$ réduit à ce seul objet, etc. Sa logique formalisée, qui comporte non seulement des « variables » au sens utilisé en mathématiques, mais aussi des « variables propositionnelles » représentant des relations indéterminées, et susceptibles de quantification, devait plus tard (à travers l'œuvre de Russell et Whitehead) fournir l'outil fondamental de la métamathématique. Malheureusement, les symboles qu'il adopte sont peu suggestifs, d'une effroyable complexité typographique et fort éloignés de la pratique des mathématiciens ; ce qui eut pour effet d'en détourner ces derniers et de réduire considérablement l'influence de Frege sur ses contemporains.

Le but de Peano était à la fois plus vaste et plus terre à terre ; il s'agissait de publier un « Formulaire de mathématiques », écrit entièrement en langage formalisé et contenant, non seulement la logique mathématique, mais tous les résultats des branches des mathématiques les plus importantes. La rapidité avec laquelle il parvint à réaliser cet ambitieux projet, aidé d'une pléiade de collaborateurs enthousiastes (Vailati, Pieri, Padoa, Vacca, Vivanti, Fano, Burali-Forti) témoigne de l'excellence du symbolisme qu'il avait adopté : suivant de près la pratique courante des mathématiciens, et introduisant de nombreux symboles abréviateurs bien choisis, son langage reste en outre assez aisément lisible, grâce notamment à un ingénieux système de remplacement des parenthèses par des points de séparation [*246* f]. Bien des notations dues à Peano sont aujourd'hui adoptées par la plupart des mathématiciens : citons $\in$, $\supset$ (mais, contrairement à l'usage actuel, au sens de « est contenu » ou « implique » *), $\cup$, $\cap$, $A - B$ (ensemble des différences $a-b$, où $a \in A$ et $b \in B$). D'autre part, c'est dans le « Formulaire » qu'on trouve pour

* Cela indique bien à quel point était enracinée, même chez lui, la vieille habitude de penser « en compréhension » plutôt qu'« en extension ».

la première fois une analyse poussée de la notion générale de fonction, de celles d'image directe * et d'image réciproque, et la remarque qu'une suite n'est qu'une fonction définie dans $\mathbf{N}$. Mais la quantification, chez Peano, est soumise à des restrictions gênantes (on ne peut en principe quantifier, dans son système, que des relations de la forme $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ ou $A = B$). En outre, le zèle presque fanatique de certains de ses disciples prêtait aisément le flanc au ridicule ; la critique, souvent injuste, de H. Poincaré en particulier, porta un coup sensible à l'école de Peano et fit obstacle à la diffusion de ses doctrines dans le monde mathématique.

Avec Frege et Peano sont acquis les éléments essentiels des langages formalisés utilisés aujourd'hui. Le plus répandu est sans doute celui forgé par Russell et Whitehead dans leur grand ouvrage « *Principia Mathematica* », qui associe heureusement la précision de Frege et la commodité de Peano [*266*]. La plupart des langages formalisés actuels ne s'en distinguent que par des modifications d'importance secondaire, visant à en simplifier l'emploi. Parmi les plus ingénieuses, citons l'écriture « fonctionnelle » des relations (par exemple $\in xy$ au lieu de $x \in y$), imaginée par Lukasiewicz, grâce à laquelle on peut supprimer totalement les parenthèses ; mais la plus intéressante est sans doute l'introduction par Hilbert du symbole τ, qui permet de considérer comme des signes abréviateurs les quantificateurs $\exists$ et $\forall$, d'éviter l'introduction du symbole fonctionnel « universel » ι de Peano et Russell (qui ne s'applique qu'à des relations fonctionnelles), et enfin dispense de formuler l'axiome de choix dans la théorie des ensembles ([*163* a], t. III, p. 183.)

LA NOTION DE VÉRITÉ EN MATHÉMATIQUE

Les mathématiciens ont toujours été persuadés qu'ils démontrent des « vérités » ou des « propositions vraies » ; une telle conviction ne peut évidemment être que d'ordre sentimental ou métaphysique, et ce n'est pas en se plaçant sur le terrain de la mathématique qu'on peut la justifier, ni même lui donner un sens qui n'en fasse pas une tautologie. L'histoire du concept de vérité en mathématique relève donc de l'histoire de la philosophie et non de celle des mathématiques ;

* L'introduction de celle-ci semble due à Dedekind, dans son ouvrage « Was sind und was sollen die Zahlen », dont nous parlerons plus loin ([*79*], t. III, p. 348).

mais l'évolution de ce concept a eu une influence indéniable sur celle des mathématiques, et à ce titre nous ne pouvons la passer sous silence.

Observons d'abord qu'il est aussi rare de voir un mathématicien en possession d'une forte culture philosophique que de voir un philosophe qui ait des connaissances étendues en mathématique ; les vues des mathématiciens sur les questions d'ordre philosophique, même quand ces questions ont trait à leur science, sont le plus souvent des opinions reçues de seconde ou de troisième main, provenant de sources de valeur douteuse. Mais, justement de ce fait, ce sont ces opinions moyennes qui intéressent l'historien des mathématiques, au moins autant que les vues originales de penseurs tels que Descartes ou Leibniz (pour en citer deux qui ont été aussi des mathématiciens de premier ordre), Platon (qui s'est du moins tenu au courant des mathématiques de son époque), Aristote ou Kant (dont on ne pourrait en dire autant).

La notion traditionnelle de vérité mathématique est celle qui remonte à la Renaissance. Dans cette conception, il n'y a pas grande différence entre les objets dont traitent les mathématiciens et ceux dont traitent les sciences de la nature ; les uns et les autres sont connaissables, et l'homme a prise sur eux à la fois par l'intuition et le raisonnement ; il n'y a lieu de mettre en doute ni l'intuition ni le raisonnement, qui ne sont faillibles que si on ne les emploie pas comme il faut. « *Il faudrait* », dit Pascal, « *avoir tout à fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échappent* » ([*244*], t. XII, p. 9). Descartes, dans son poêle, se convainc qu' « *il n'y a eu que les seuls Mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes* » ([*85* a], t. VI, p. 19), et cela (si l'on s'en tient à son récit) bien avant d'avoir bâti une métaphysique dans laquelle « *cela même* », dit-il, « *que j'ai tantôt pris pour règle, à savoir que les choses que nous concevons très clairement et très distinctement sont toutes vraies, n'est assuré qu'à cause que Dieu est ou existe et qu'il est un être parfait* » ([*85* a], t. VI, p. 38). Si Leibniz objecte à Descartes qu'on ne voit pas à quoi on reconnaît qu'une idée est « claire et distincte » *, il considère, lui aussi, les axiomes comme des conséquences

* « *Ceux qui nous ont donné des méthodes* » dit-il à ce propos « *donnent sans doute de beaux préceptes, mais non pas le moyen de les observer* » ([*198* b], t. VII, p. 21). Et ailleurs, raillant les règles cartésiennes, il les compare aux recettes des alchimistes : « *Prends ce qu'il faut, opère comme tu le dois, et tu obtiendras ce que tu souhaites!* » ([*198* b], t. IV, p. 329).

évidentes et inéluctables des définitions, dès que l'on en comprend les termes *. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que, dans le langage de cette époque, les mathématiques comprennent bien des sciences que nous ne reconnaissons plus comme telles, et parfois jusqu'à l'art de l'ingénieur ; et dans la confiance qu'elles inspirent, le surprenant succès de leurs applications à la « philosophie naturelle », aux « arts mécaniques », à la navigation, entre pour une grande part.

Dans cette manière de voir, les axiomes ne sont pas plus susceptibles d'être discutés ou mis en doute que les règles du raisonnement ; tout au plus peut-on laisser à chacun le choix, suivant ses préférences, de raisonner « à la manière des anciens » ou de laisser libre cours à son intuition. Le choix du point de départ est aussi question de préférence individuelle, et on voit apparaître de nombreuses « éditions » d'Euclide où la solide charpente logique des *Eléments* est étrangement travestie ; on donne du calcul infinitésimal, de la mécanique rationnelle, des exposés prétendument déductifs dont les bases sont singulièrement mal assises ; et Spinoza était peut-être de bonne foi en donnant son *Ethique* pour démontrée à la manière des géomètres « more geometrico demonstrata ». Si l'on a peine à trouver, au XVII^e siècle, deux mathématiciens d'accord sur quelque question que ce soit, si les polémiques sont quotidiennes, interminables et acrimonieuses, la notion de vérité n'en reste pas moins hors de cause. « *N'y ayant qu'une vérité de chaque chose* », dit Descartes, « *quiconque la trouve en sait autant qu'on peut en savoir* » ([*85* a], t. VI, p. 21).

Bien qu'aucun texte mathématique grec de haute époque ne se soit conservé sur ces questions, il est probable que le point de vue des mathématiciens grecs sur ce sujet a été beaucoup plus nuancé. C'est à l'expérience seulement que les règles de raisonnement ont pu s'élaborer au point d'inspirer une complète confiance ; avant qu'elles pussent être considérées comme au-dessus de toute discussion, il a

* Sur ce point, Leibniz est encore sous l'influence scolastique ; il pense toujours aux propositions comme établissant un rapport de « sujet » à « prédicat » entre concepts. Dès que l'on a résolu les concepts en concepts « primitifs » (ce qui, nous l'avons vu, est une de ses idées fondamentales), tout se ramène, pour Leibniz, à vérifier des relations d' « inclusion » au moyen de ce qu'il appelle les « axiomes identiques » (essentiellement les propositions $A = A$ et $A \subset A$) et du principe de « substitution des équivalents » (si $A = B$, on peut partout remplacer A par B ([*69* a], p. 184-206)). Il est intéressant à ce propos de remarquer que, conformément à son désir de tout ramener à la Logique et de « démontrer tout ce qui est démontrable », Leibniz démontre la symétrie et la transitivité de la relation d'égalité, à partir de l'axiome $A = A$ et du principe de substitution des équivalents ([*198* a], t. VII, p. 77-78).

fallu nécessairement passer par bien des tâtonnements et des paralogismes. Ce serait méconnaître aussi l'esprit critique des Grecs, leur goût pour la discussion et pour la sophistique, que d'imaginer que les « axiomes » mêmes que Pascal jugeait les plus évidents (et que, suivant une légende répandue par sa sœur, il aurait, avec un instinct infaillible, découverts de lui-même dans son enfance) n'ont pas fait l'objet de longues discussions. Dans un domaine qui n'est pas celui de la géométrie proprement dite, les paradoxes des Eléates nous ont conservé quelque trace de telles polémiques ; et Archimède, lorsqu'il fait observer ([*5* b], t. II, p. 265) que ses prédécesseurs se sont servi en plusieurs circonstances de l'axiome auquel nous avons l'habitude de donner son nom, ajoute que ce qui est démontré au moyen de cet axiome « *a été admis non moins que ce qui est démontré sans lui* », et qu'il lui suffit que ses propres résultats soient admis au même titre. Platon, conformément à ses vues métaphysiques, présente la mathématique comme un moyen d'accès à une « vérité en soi », et les objets dont elle traite comme ayant une existence propre dans le monde des idées ; il n'en caractérise pas moins avec précision la méthode mathématique dans un passage célèbre de la *République* : « *Ceux qui s'occupent de géométrie et d'arithmétique... supposent le pair et l'impair, trois espèces d'angles ; ils les traitent comme choses connues : une fois cela supposé, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre compte ni à eux-mêmes ni aux autres,* [le regardant] *comme clair à chacun ; et, partant de là, ils procèdent par ordre, pour en arriver d'un commun accord au but que leur recherche s'était proposé* » ([*250*], Livre VI, 510 *c-e*). Ce qui constitue la démonstration, c'est donc d'abord un point de départ présentant quelque arbitraire (bien que « clair à chacun »), et au-delà duquel, dit-il un peu plus loin, on ne cherche pas à remonter ; ensuite, une démarche qui parcourt par ordre une suite d'étapes intermédiaires ; enfin, à chaque pas, le consentement de l'interlocuteur garantissant la correction du raisonnement. Il faut ajouter qu'une fois les axiomes posés, aucun nouvel appel à l'intuition n'est en principe admis : Proclus, citant Géminus, rappelle que « *nous avons appris des pionniers mêmes de cette science, à ne tenir aucun compte de conclusions simplement plausibles lorsqu'il s'agit des raisonnements qui doivent faire partie de notre doctrine géométrique* » ([*153* e], t. I, p. 203).

C'est donc à l'expérience et au feu de la critique qu'ont dû s'élaborer les règles du raisonnement mathématique; et, s'il est vrai, comme on l'a soutenu d'une manière plausible [*317* d], que le Livre VIII d'Euclide nous a conservé une partie de l'arithmétique d'Archytas, il n'est pas surprenant d'y voir la raideur de raisonnement quelque peu pédantesque qui ne manque pas d'apparaître dans toute école mathématique où l'on découvre ou croit découvrir la « rigueur ». Mais, une fois entrées dans la pratique des mathématiciens, il ne semble pas que ces règles de raisonnement aient jamais été mises en doute jusqu'à une époque toute récente ; si, chez Aristote et les Stoïciens, certaines de ces règles sont déduites d'autres par des schémas de raisonnement, les règles primitives sont toujours admises comme évidentes. De même, après être remontés jusqu'aux « hypothèses », « axiomes », « postulats » qui leur parurent fournir un fondement solide à la science de leur époque (tels par exemple qu'ils ont dû se présenter dans les premiers « Éléments », que la tradition attribue à Hippocrate de Chio, vers 450 av. J.-C.), les mathématiciens grecs de la période classique semblent avoir consacré leurs efforts à la découverte de nouveaux résultats plutôt qu'à une critique de ces fondements qui, à cette époque, n'aurait pu manquer d'être stérile ; et, toute préoccupation métaphysique mise à part, c'est de cet accord général entre mathématiciens sur les bases de leur science que témoigne le texte de Platon cité ci-dessus.

D'autre part, les mathématiciens grecs ne semblent pas avoir cru pouvoir élucider les « notions premières » qui leur servent de point de départ, ligne droite, surface, rapport des grandeurs ; s'ils en donnent des « définitions », c'est visiblement par acquit de conscience et sans se faire d'illusions sur la portée de celles-ci. Il va sans dire qu'en revanche, sur les définitions autres que celles des « notions premières » (définitions souvent dites « nominales »), les mathématiciens et philosophes grecs ont eu des idées parfaitement claires. C'est à ce propos qu'intervient explicitement, pour la première fois sans doute, la question d' « existence » en mathématique. Aristote ne manque pas d'observer qu'une définition n'entraîne pas l'existence de la chose définie, et qu'il faut là-dessus, soit un postulat, soit une démonstration. Sans doute son observation était-elle dérivée de la pratique des mathématiciens ; en tout cas Euclide prend soin de postuler l'existence du cercle, et de démontrer celle du triangle équilatéral, des parallèles, du carré, etc. à mesure qu'il les introduit dans ses raisonnements ([*153* e], Livre I); ces démonstrations sont des « constructions » : autrement dit, il exhibe, en s'appuyant sur les axiomes, des objets mathématiques dont il démontre qu'ils satisfont aux définitions qu'il s'agit de justifier.

Nous voyons ainsi la mathématique grecque, à l'époque classique, aboutir à une sorte de certitude empirique (quelles qu'en puissent être les bases métaphysiques chez tel ou tel philosophe); si on ne conçoit pas qu'on puisse mettre en question les règles du raisonnement, le succès de la science grecque, et le sentiment que l'on a de l'inopportunité d'une révision critique, sont pour beaucoup dans la confiance qu'inspirent les axiomes proprement dits, confiance qui est plutôt de l'ordre de celle (presque illimitée, elle aussi) qu'on attachait au siècle dernier aux principes de la physique théorique. C'est d'ailleurs ce que suggère l'adage de l'école « *nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu* », contre lequel justement s'élève Descartes, comme ne donnant pas de base assez ferme à ce que Descartes entendait tirer de l'usage de la raison.

Il faut descendre jusqu'au début du XIX^e^ siècle pour voir les mathématiciens revenir de l'arrogance d'un Descartes (sans parler de celle d'un Kant, ou de celle d'un Hegel, ce dernier quelque peu en retard, comme il convient, sur la science de son époque *), à une position aussi nuancée que celle des Grecs. Le premier coup porté aux conceptions classiques est l'édification de la géométrie non-euclidienne hyperbolique par Gauss, Lobatschevsky et Bolyai au début du siècle. Nous n'entreprendrons pas de retracer ici en détail la genèse de cette découverte, aboutissement de nombreuses tentatives infructueuses pour démontrer le postulat des parallèles (voir [*105* a et b]). Sur le moment, son effet sur les principes des mathématiques n'est peut-être pas aussi profond qu'on le dit parfois. Elle oblige simplement à abandonner les prétentions du siècle précédent à la « vérité absolue » de la géométrie euclidienne, et à plus forte raison, le point de vue leibnizien des définitions impliquant les axiomes ; ces derniers n'apparaissent plus du tout comme « évidents », mais bien comme des hypothèses dont il s'agit de voir si elles sont adaptées à la représentation mathématique du monde sensible. Gauss et Lobatschevsky croient que le débat entre les divers géométries possibles peut être tranché par l'expérience ([*206*], p. 76). C'est aussi le point de vue de Riemann, dont la célèbre Leçon inaugurale « *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* » a pour but de fournir un cadre mathématique général aux divers phénomènes naturels : « *Reste à résoudre* », dit-il, « *la question de savoir en quelle*

* Dans sa dissertation inaugurale, il « démontre » qu'il ne peut exister que sept planètes, l'année même où on en découvrait une huitième.

mesure et jusqu'à quel point ces hypothèses se trouvent confirmées par l'expérience » ([*259* a], p. 284). Mais c'est là un problème qui visiblement n'a plus rien à faire avec la Mathématique ; et aucun des auteurs précédents ne semble mettre en doute que, même si une « géométrie » ne correspond pas à la réalité expérimentale, ses théorèmes n'en continuent pas moins à être des « vérités mathématiques » *.

Toutefois, s'il en est ainsi, ce n'est certes plus à une confiance illimitée en l' « intuition géométrique » classique qu'il faut attribuer une telle conviction ; la description que Riemann cherche à donner des « multiplicités *n* fois étendues », objet de son travail, ne s'appuie sur des considérations « intuitives » ** que pour arriver à justifier l'introduction des « coordonnées locales » ; à partir de ce moment, il se sent apparemment en terrain solide, savoir celui de l'Analyse. Mais cette dernière est fondée en définitive sur le concept de nombre réel, resté jusque-là de nature très intuitive ; et les progrès de la théorie des fonctions conduisaient à cet égard à des résultats bien troublants : avec les recherches de Riemann lui-même sur l'intégration, et plus encore avec les exemples de courbes sans tangente, construits par Bolzano et Weierstrass, c'est toute la pathologie des mathématiques qui commençait. Depuis un siècle, nous avons vu tant de monstres de cette espèce que nous sommes un peu blasés, et qu'il faut accumuler les caractères tératologiques les plus biscornus pour arriver encore à nous étonner. Mais l'effet produit sur la plupart des mathématiciens du XIX^e siècle allait du dégoût à la consternation : « *Comment* », se demande H. Poincaré, « *l'intuition peut-elle nous tromper à ce point?* » ([*251* d], p. 19); et Hermite (non sans une pointe d'humour dont les commentateurs de cette phrase célèbre ne semblent pas tous s'être aperçus) déclare qu'il se « *détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivée* » ([*160*], t. II, p. 318). Le plus grave était qu'on ne pouvait plus mettre ces phénomènes, si contraires au sens commun, sur le compte de notions mal élucidées, comme au temps des « indivisibles » (voir p. 215), puisqu'ils survenaient après la réforme de Bolzano, Abel et Cauchy, qui avait permis de fonder la notion de limite de façon

* Cf. les arguments de Poincaré en faveur de la « simplicité » et de la « commodité » de la géométrie euclidienne ([*251* c], p. 67), ainsi que l'analyse par laquelle, un peu plus loin, il arrive à la conclusion que l'expérience ne fournit pas de critère absolu pour le choix d'une géométrie plutôt qu'une autre comme cadre des phénomènes naturels.

** Encore ce mot n'est-il justifié que pour $n \leqslant 3$; pour de plus grandes valeurs de *n*, il s'agit en réalité d'un raisonnement par analogie.

aussi rigoureuse que la théorie des proportions (voir p. 193). C'est donc bien au caractère grossier et incomplet de notre intuition géométrique qu'il fallait s'en prendre, et on comprend que depuis lors elle soit restée discréditée à juste titre en tant que moyen de preuve.

Cette constatation devait inéluctablement réagir sur les mathématiques classiques, à commencer par la géométrie. Quelque respect que l'on témoignât à la construction axiomatique d'Euclide, on n'avait pas été sans y relever plus d'une imperfection, et cela dès l'antiquité. C'est le postulat des parallèles qui avait été l'objet du plus grand nombre de critiques et de tentatives de démonstration ; mais les continuateurs et commentateurs d'Euclide avaient aussi cherché à démontrer d'autres postulats (notamment celui de l'égalité des angles droits) ou reconnu l'insuffisance de certaines définitions, comme celles de la droite ou du plan. Au XVI[e] siècle, Clavius, un éditeur des *Eléments*, note l'absence d'un postulat garantissant l'existence de la quatrième proportionnelle ; de son côté, Leibniz remarque qu'Euclide utilise l'intuition géométrique sans le mentionner explicitement, par exemple lorsqu'il admet (*Eléments*, Livre I, prop. 1) que deux cercles dont chacun passe par le centre de l'autre ont un point commun ([*198* b], t. VII, p. 166). Gauss (qui lui-même ne se privait pas de se servir de telles considérations topologiques) attire l'attention sur le rôle joué dans les constructions euclidiennes par la notion d'un point (ou d'une droite) situé « entre » deux autres, notion qui n'est cependant pas définie ([*124* a], t. VIII, p. 222). Enfin, l'usage des déplacements — notamment dans les « cas d'égalité des triangles » — longtemps admis comme allant de soi *, devait bientôt apparaître à la critique du XIX[e] siècle comme reposant aussi sur des axiomes non formulés. On aboutit ainsi, dans la période de 1860 à 1885, à diverses révisions partielles des débuts de la géométrie (Helmholtz, Méray, Houël) tendant à remédier à certaines de ces lacunes. Mais c'est seulement chez M. Pasch [*245*] que l'abandon de tout appel à l'intuition est un programme nettement formulé et suivi avec une parfaite rigueur. Le succès de son entreprise lui valut bientôt de nombreux émules qui, principalement entre 1890 et 1910, donnent des présentations assez variées des axiomes de la géométrie euclidienne. Les plus célèbres de ces ouvrages furent celui de Peano, écrit dans son langage symbolique [*246* d], et surtout les « *Grundlagen der Geo-*

* Il faut noter cependant que, dès le XVI[e] siècle, un commentateur d'Euclide, J. Peletier, proteste contre ce moyen de démonstration, en termes voisins de ceux des critiques modernes ([*153* e], t. I, p. 249).

metrie » de Hilbert [*163* c], parus en 1899, livre qui, par la lucidité et la profondeur de l'exposé, devait aussitôt devenir, à juste titre, la charte de l'axiomatique moderne, jusqu'à faire oublier ses devanciers. C'est qu'en effet, non content d'y donner un système complet d'axiomes pour la géométrie euclidienne, Hilbert classe ces axiomes en divers groupements de nature différente, et s'attache à déterminer la portée exacte de chacun de ces groupes d'axiomes, non seulement en développant les conséquences logiques de chacun d'eux isolément, mais encore en discutant les diverses « géométries » obtenues lorsqu'on supprime ou modifie certains de ces axiomes (géométries dont celles de Lobatschevsky et de Riemann n'apparaissent plus que comme des cas particuliers *) ; il met ainsi clairement en relief, dans un domaine considéré jusque-là comme un des plus proches de la réalité sensible, la liberté dont dispose le mathématicien dans le choix de ses postulats. Malgré le désarroi causé chez plus d'un philosophe par ces « métagéométries » aux propriétés étranges, la thèse des « *Grundlagen* » fut rapidement adoptée de façon à peu près unanime par les mathématiciens ; H. Poincaré, pourtant peu suspect de partialité en faveur du formalisme, reconnaît en 1902 que les axiomes de la géométrie sont des conventions, pour laquelle la notion de « vérité », telle qu'on l'entend d'habitude, n'a plus de sens ([*251* c], p. 66-67). La « vérité mathématique » réside ainsi uniquement dans la déduction logique à partir des prémisses posées arbitrairement par les axiomes. Comme on le verra plus loin (p. 52-56), la validité des règles de raisonnement suivant lesquelles s'opèrent ces déductions devait elle-même bientôt être remise en question, amenant ainsi une refonte complète des conceptions de base des mathématiques.

OBJETS, MODÈLES, STRUCTURES

A) *Objets et structures mathématiques.* — De l'Antiquité au XIX^e siècle, il y a un commun accord sur ce que sont les objets principaux du mathématicien ; ce sont ceux-là mêmes que mentionne Platon dans le passage cité plus haut (p. 24) ; les nombres, les grandeurs et les figures. Si, au début, il faut y joindre les objets et phénomènes dont s'occupent la Mécanique, l'Astronomie, l'Optique et

* Celle qui semble avoir le plus frappé les contemporains est la géométrie « non-archimédienne », c'est-à-dire la géométrie ayant pour corps de base un corps ordonné non archimédien (commutatif ou non), qui (dans le cas commutatif) avait été introduite quelques années auparavant par Veronese [*318*].

la Musique, ces disciplines « mathématiques » sont toujours nettement séparées, chez les Grecs, de l'Arithmétique et de la Géométrie, et à partir de la Renaissance elles accèdent assez vite au rang de sciences indépendantes.

Quelles que soient les nuances philosophiques dont se colore la conception des objets mathématiques chez tel ou tel mathématicien ou philosophe, il y a au moins un point sur lequel il y a unanimité : c'est que ces objets nous sont *donnés* et qu'il n'est pas en notre pouvoir de leur attribuer des propriétés arbitraires, de même qu'un physicien ne peut changer un phénomène naturel. A vrai dire, il entre sans doute pour une part dans ces vues des réactions d'ordre psychologique, qu'il ne nous appartient pas d'approfondir, mais que connaît bien tout mathématicien lorsqu'il s'épuise en vains efforts pour saisir une démonstration qui semble se dérober sans cesse. De là à assimiler cette résistance aux obstacles que nous oppose le monde sensible, il n'y a qu'un pas ; et même aujourd'hui, plus d'un, qui affiche un intransigeant formalisme, souscrirait volontiers, dans son for intérieur, à cet aveu d'Hermite : « *Je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous, avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et nous les rencontrons ou les découvrons, et les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes* » ([*160*], t. II, p. 398).

Il n'est pas question, dans la conception classique des mathématiques, de s'écarter de l'étude des nombres et des figures ; mais cette doctrine officielle, à laquelle tout mathématicien se croit tenu d'apporter son adhésion verbale, ne laisse pas de constituer peu à peu une gêne intolérable, à mesure que s'accumulent les idées nouvelles. L'embarras des algébristes devant les nombres négatifs ne cesse guère que lorsque la Géométrie analytique en donne une « interprétation » commode ; mais, en plein XVIII^e siècle encore, d'Alembert, discutant la question dans l'*Encyclopédie* ([*75* a], article NÉGATIF), perd courage tout à coup après une colonne d'explications assez confuses, et se contente de conclure que « *les règles des opérations algébriques sur les quantités négatives sont admises généralement par tout le monde et reçues généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités* ». Pour les nombres imaginaires, le scandale est bien plus grand encore ; car si ce sont des racines « impossibles » et si (jusque vers 1800) on ne voit aucun moyen de les « interpréter », comment peut-on sans contradiction parler de ces êtres indéfinissables, et surtout pourquoi les introduire ? D'Alembert ici garde un silence prudent et ne pose même pas ces questions, sans doute parce qu'il reconnaît qu'il ne pourrait y répondre autrement que ne le faisait naïvement A. Girard un siècle plus tôt ([*129*], f. 22) : « *On pourroit dire : à quoy sert ces solutions qui sont impossibles ? Je respond : pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, et qu'il n'y a point d'autre solutions, et pour son utilité.* »

En Analyse, la sitation, au XVII^e siècle, n'est guère meilleure. C'est une heureuse circonstance que la Géométrie analytique soit apparue, comme à point nommé, pour donner une « représentation » sous forme de figure géométrique, de la grande création du XVII^e siècle, la notion de fonction, et aider ainsi puissamment (chez Fermat, Pascal ou Barrow) à la naissance du Calcul infinitésimal (cf. p. 242). Mais on sait par contre à quelles controverses philosophico-mathématiques devaient donner lieu les notions d'infiniment petit et d'indivisible. Et si d'Alembert est ici plus heureux, et reconnaît que dans la « métaphysique » du Calcul infinitésimal il n'y a rien d'autre que la notion de limite ([*75* a], articles DIFFÉRENTIEL et LIMITE, et [*75* b]), il ne peut, pas plus que ses contemporains, comprendre le sens véritable des développements en séries divergentes, et expliquer le paradoxe de résultats exacts obtenus au bout de calculs sur des expressions dépourvues de toute interprétation numérique. Enfin, même dans le domaine de la « certitude géométrique », le cadre euclidien éclate : lorsque Stirling, en 1717, n'hésite pas à dire qu'une certaine courbe a un « point double imaginaire à l'infini » ([*299*], p. 93 de la nouv. éd.), il serait certes bien en peine de rattacher un tel « objet » aux notions communément reçues ; et Poncelet, qui, au début du XIX^e siècle, donne un développement considérable à de telles idées en fondant la géométrie projective (voir p. 165), se contente encore d'invoquer comme justification un « principe de continuité » tout métaphysique.

On conçoit que, dans ces conditions (et au moment même où, paradoxalement, on proclame avec le plus de force la « vérité absolue » des mathématiques), la notion de démonstration semble s'estomper de plus en plus au cours du XVIII^e siècle, puisqu'on est hors d'état de fixer, à la manière des Grecs, les notions sur lesquelles on raisonne, et leurs propriétés fondamentales. Le retour vers la rigueur, qui se déclanche au début du XIX^e siècle, apporte quelque amélioration à cet état de choses, mais n'arrête pas pour autant le flot des notions nouvelles : on voit ainsi apparaître en Algèbre les imaginaires de

Galois ([*123*], p. 113-127), les nombres idéaux de Kummer [*188* b], que suivent vecteurs et quaternions, espaces n-dimensionnels, multivecteurs et tenseurs (voir p. 83-89), sans parler de l'algèbre booléienne. Sans doute un des grand progrès (qui permet justement le retour à la rigueur, sans rien perdre des conquêtes des âges précédents) est la possibilité de donner des « modèles » de ces nouvelles notions en termes plus classiques : les nombres idéaux ou les imaginaires de Galois s'interprètent par la théorie des congruences (voir p. 108-109), la géométrie n-dimensionnelle n'apparaît (si l'on veut) que comme un pur langage pour exprimer des résultats d'algèbre « à n variables » ; et pour les nombres imaginaires classiques — dont la représentation géométrique par les points d'un plan (voir p. 200-202) marque le début de cet épanouissement de l'Algèbre — on a bientôt le choix entre ce « modèle » géométrique et une interprétation en termes de congruences (cf. p. 108). Mais les mathématiciens commencent enfin à sentir nettement que c'est là lutter contre la pente naturelle où les entraînent leurs travaux, et qu'il doit être légitime, en mathématiques, de raisonner sur des objets qui n'ont aucune « interprétation » sensible : « *Il n'est pas de l'essence de la mathématique* », dit Boole en 1854, « *de s'occuper des idées de nombre et de quantité* » ([*29*], t. II, p. 13)*. La même préoccupation conduit Grassmann, dans son « *Ausdehnungslehre* » de 1844, à présenter son calcul sous une forme d'où les notions de nombre ou d'être géométrique sont tout d'abord ex-

* Leibniz, à cet égard, apparaît encore comme un précurseur : « *la Mathématique universelle* » dit-il, « *est, pour ainsi dire, la Logique de l'imagination* », et doit traiter « *de tout ce qui, dans le domaine de l'imagination, est susceptible de détermination exacte* » ([*198* c], p. 348; cf. [*69* a], p. 290-291); et pour lui, la pièce maîtresse de la Mathématique ainsi conçue est ce qu'il appelle la « Combinatoire » ou « Art des formules », par quoi il entend essentiellement la science des relations abstraites entre les objets mathématiques. Mais alors que jusque-là les relations considérées en mathématiques étaient presque exclusivement des relations de grandeur (égalité, inégalité, proportion), Leibniz conçoit bien d'autres types de relations qui, à son avis, auraient dû être étudiées systématiquement par les mathématiciens, comme la relation d'inclusion, ou ce qu'il appelle la relation de « détermination » univoque ou plurivoque (c'est-à-dire les notions d'application et de correspondance) ([*69* a], p. 307-310). Beaucoup d'autres idées modernes apparaissent sous sa plume à ce propos : il remarque que les diverses relations d'équivalence de la géométrie classique ont en commun les propriétés de symétrie et de transitivité; il conçoit aussi la notion de relation compatible avec une relation d'équivalence, et note expressément qu'une relation quelconque n'a pas nécessairement cette propriété ([*69* a], p. 313-315). Bien entendu, il préconise là comme partout l'usage d'un langage formalisé, et introduit même un signe destiné à noter une relation indéterminée ([*69* a], p. 301).

clues *. Et un peu plus tard, Riemann, dans sa Leçon inaugurale, prend soin au début de ne pas parler de « points », mais bien de « déterminations » (Bestimmungsweise), dans sa description des « multiplicités n fois étendues », et souligne que, dans une telle multiplicité, les « relations métriques » (Massverhältnisse) « *ne peuvent s'étudier que pour des grandeurs abstraites et se représenter que par des formules ; sous certaines conditions, on peut cependant les décomposer en relations dont chacune prise isolément est susceptible d'une représentation géométrique, et par là il est possible d'exprimer les résultats du calcul sous forme géométrique* » ([*259* a], p. 276).

A partir de ce moment, l'élargissement de la méthode axiomatique est un fait acquis. Si, pendant quelque temps encore, on croit utile de contrôler, quand il se peut, les résultats « abstraits » par l'intuition géométrique, du moins est-il admis que les objets « classiques » ne sont plus les seuls dont le mathématicien puisse légitimement faire l'étude. C'est que — justement à cause des multiples « interprétations » ou « modèles » possibles — on a reconnu que la « nature » des objets mathématiques est au fond secondaire, et qu'il importe assez peu, par exemple, que l'on présente un résultat comme théorème de géométrie « pure », ou comme un théorème d'algèbre par le truchement de la géométrie analytique. En d'autres termes, l'essence des mathématiques — cette notion fuyante qu'on n'avait pu jusqu'alors exprimer que sous des noms vagues tels que « *reigle generale* » ou « *métaphysique* » — apparaît comme l'étude des *relations* entre des objets qui ne sont plus (volontairement) connus et décrits que par *quelques-unes* de leurs propriétés, celles précisément que l'on met comme axiomes à la base de leur théorie. C'est ce qu'avait déjà clairement vu Boole en 1847, quand il écrivait que la mathématique traite « *des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées* » ([*29*], t. I, p. 3). Hankel, en 1867, inaugurant l'axiomatisation de l'algèbre,

* Il faut reconnaître que son langage, d'allure très philosophique, n'était guère fait pour séduire la plupart des mathématiciens, qui se sentent mal à l'aise devant une formule telle que la suivante : « *La mathématique pure est la science de l'être particulier en tant qu'il est né dans la pensée* » (Die Wissenschaft des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *gewordenen*). Mais le contexte fait voir que Grassmann entendait par là de façon assez nette la mathématique axiomatique au sens moderne (sauf qu'il suit assez curieusement Leibniz en considérant que les bases de cette « science formelle », comme il dit, sont les définitions et non les axiomes) ; en tout cas, il insiste, comme Boole, sur le fait que « *le nom de science des grandeurs ne convient pas à l'ensemble des mathématiques* » ([*134*], t. I_1, p. 22-23).