N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Algèbre

Chapitre 10

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

ALGÈBRE

Chapitre 10

Algèbre homologique

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1980

ISBN-10 3-540-34492-6 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-34492-6 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

Mode d'emploi de ce traité

NOUVELLE ÉDITION

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues.

3. Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres. Les Livres actuellement publiés, en totalité ou en partie, sont les suivants :

Théorie des Ensembles	désigné par E
Algèbre	— A
Topologie générale	— TG
Fonctions d'une variable réelle	— FVR
Espaces vectoriels topologiques	— EVT
Intégration	— INT
Algèbre commutative	— AC
Variétés différentielles et analytiques	— VAR
Groupes et algèbres de Lie	— LIE
Théories spectrales	— TS

Dans les *six premiers* Livres (pour l'ordre indiqué ci-dessus), chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans le chapitre en cours ou dans les chapitres *antérieurs dans l'ordre suivant* : E ; A, chapitres I à III ; TG, chapitres I à III ; A, chapitres IV et suivants ; TG, chapitres IV et suivants ; FVR ; EVT ; INT. A partir du septième Livre, le lecteur trouvera éventuellement, au début de chaque Livre ou chapitre, l'indication précise des autres Livres ou chapitres utilisés (les six premiers Livres étant toujours supposés connus).

4. Cependant, quelques passages font exception aux règles précédentes. Ils sont placés entre deux astérisques : * ... $_{*}$. Dans certains cas, il s'agit seulement de faciliter la compréhension du texte par des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs. Parfois aussi, on utilise, non seulement les résultats supposés connus dans tout le chapitre en cours, mais des résultats démontrés ailleurs dans le traité. Ces passages seront employés librement dans les parties qui supposent connus les chapitres où ces passages sont insérés et les chapitres auxquels ces passages font appel. Le lecteur pourra, nous l'espérons, vérifier l'absence de tout cercle vicieux.

5. A certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des *fascicules de résultats*. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats du Livre, mais aucune démonstration.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre ; c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, on convient parfois d'introduire certaines notations ou certaines abréviations qui ne sont valables qu'à l'intérieur d'un seul chapitre ou d'un seul paragraphe (par exemple, dans un chapitre où tous les anneaux considérés sont commutatifs, on peut convenir que le mot « anneau » signifie toujours « anneau commutatif »). De telles conventions sont explicitement mentionnées à la tête du chapitre ou du paragraphe dans lequel elles s'appliquent.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »).

8. Les exercices sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte ; les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.*

10. On a cherché à utiliser, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage ou de notation*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage.

11. Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; celles-ci sont groupées dans des *Notes historiques*. La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée ; elle ne vise nullement à être complète.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile en général d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Dans la nouvelle édition, les renvois à des théorèmes, axiomes, définitions, remarques, etc. sont donnés en principe en indiquant successivement le Livre (par l'abréviation qui lui correspond dans la liste donnée au n° 3), le chapitre et la page où ils se trouvent. A l'intérieur d'un même Livre la mention de ce Livre est supprimée ; par exemple, dans le Livre d'Algèbre,

E, III, p. 32, cor. 3

renvoie au corollaire 3 se trouvant au Livre de Théorie des Ensembles, chapitre III, page 32 de ce chapitre ;

II, p. 24, prop. 17

renvoie à la proposition 17 du Livre d'Algèbre, chapitre II, page 24 de ce chapitre.

Les fascicules de résultats sont désignés par la lettre R ; par exemple : EVT, R signifie « fascicule de résultats du Livre sur les Espaces vectoriels topologiques ».

Comme certains Livres doivent seulement être publiés plus tard dans la nouvelle édition, les renvois à ces Livres se font en indiquant successivement le Livre, le chapitre, le paragraphe et le numéro où se trouve le résultat en question ; par exemple :

AC, III, § 4, n° 5, cor. de la prop. 6.

Algèbre homologique

§ 1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans ce paragraphe, la lettre A *désigne un anneau. Sauf mention expresse du contraire, tous les modules considérés sont des modules à gauche, tous les idéaux considérés sont des idéaux à gauche.*

Les définitions et les résultats s'appliquent aux modules à droite, en les considérant comme modules à gauche sur l'anneau opposé.

Si M *est un* A*-module et si* $a \in \mathrm{A}$, *on note* a_{M} *l'homothétie* $x \mapsto ax$ *de* M. *On a donc* $1_{\mathrm{M}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}}$ (*application identique de* M) ; *lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on écrit parfois simplement* 1 *au lieu de* 1_{M}.

Enfin, on note 0 *un* A*-module réduit à son élément neutre, choisi une fois pour toutes* (*cf.* II, p. 8).

1. Diagrammes commutatifs

Soient par exemple B, C, D, E, F cinq ensembles, et soient f une application de E dans F, g une application de B dans C, h une application de D dans E, u une application de B dans D et v une application de C dans E. Pour résumer une situation de ce genre, on fait souvent usage de diagrammes ; par exemple, on résumera la situation précédente par le diagramme suivant (E, II, p. 14) :

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{C} \arrow[d, "v"] & \\ \mathrm{D} \arrow[r, "h"'] & \mathrm{E} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{F}\,. \end{tikzcd}$$

Dans un tel diagramme, le groupe de signes $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F}$ schématise le fait que f est une application de E dans F. Lorsqu'il ne peut y avoir d'ambiguïté sur f, on supprime la lettre f, et on écrit simplement $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Lorsque B, C, D, E, F sont des groupes (resp. des A-modules) et f, g, h, u, v des homomorphismes de groupes (resp. A-modules), on dit pour abréger que le diagramme (1) est un *diagramme de groupes* (resp. de A-*modules*).

En principe, un diagramme n'est pas un objet mathématique, mais seulement une *figure*, destinée à faciliter la lecture d'un raisonnement. En pratique, on se sert souvent des diagrammes comme de *symboles abréviateurs*, qui évitent de nommer tous les ensembles et toutes les applications que l'on veut considérer ; on dit ainsi « considérons le diagramme (1) » au lieu de dire : « soient B, C, D, E, F cinq ensembles... et v une application de C dans E » ; voir par exemple l'énoncé de la prop. 1 du n° 2.

Considérons par exemple le diagramme suivant :

(2)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\ B' \arrow[r, "f'"'] & C' \arrow[r, "g'"'] & D' \arrow[r, "h'"'] & E' . \end{tikzcd}$$

A tout chemin composé d'un certain nombre de segments du diagramme parcouru dans le sens indiqué par les flèches, on fait correspondre une application de l'ensemble représenté par l'origine du premier segment dans l'ensemble représenté par l'extrémité du dernier segment, savoir la composée des applications représentées par les divers segments parcourus. Pour tout sommet du diagramme, par exemple C, on convient qu'il y a un chemin réduit à C et on lui fait correspondre l'application identique 1_C.

Dans (2), il y a par exemple trois chemins partant de B et aboutissant à D' ; les applications correspondantes sont $d \circ g \circ f$, $g' \circ c \circ f$ et $g' \circ f' \circ b$. On dit qu'un diagramme est *commutatif* si, pour tout couple de chemins du diagramme ayant même origine et même extrémité, les deux applications correspondantes sont égales ; en particulier si un chemin a son extrémité confondue avec son origine, l'application correspondante doit être l'identité.

Pour que le diagramme (2) soit commutatif, il faut et il suffit que l'on ait les relations :

(3) $$f' \circ b = c \circ f, \qquad g' \circ c = d \circ g, \qquad h' \circ d = e \circ h ;$$

autrement dit, il faut et il suffit que les trois diagrammes carrés extraits de (2) soient commutatifs. En effet, les relations (3) entraînent $d \circ g \circ f = g' \circ c \circ f$ puisque $d \circ g = g' \circ c$ et $g' \circ c \circ f = g' \circ f' \circ b$ puisque $c \circ f = f' \circ b$; donc les trois chemins partant de B et aboutissant à D' donnent la même application. On vérifie de même que les quatre chemins partant de B et aboutissant à E' (resp. les trois chemins partant de C et aboutissant à E') donnent la même application. Les relations (3) signifient que les deux chemins partant de B (resp. C, D) et aboutissant à C' (resp. D', E') donnent la même application. Tous les autres couples de sommets de (2) ne peuvent être joints que par un chemin au plus, et le diagramme (2) est donc bien commutatif.

Par la suite, nous laisserons au lecteur le soin de formuler et de vérifier des résultats analogues pour d'autres types de diagrammes.

2. Le diagramme du serpent

PROPOSITION 1. — *Considérons un diagramme commutatif de* A-*modules*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "h"'] \\ M' \arrow[r, "u'"'] & N' \arrow[r, "v'"'] & P' . \end{tikzcd} \tag{4}$$

On suppose que les deux lignes de (4) *sont exactes. Alors* :

(i) *Si h est injectif, on a*

$$\operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u') = \operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u) . \tag{5}$$

(ii) *Si f est surjectif, on a*

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v) . \tag{6}$$

Prouvons (i). Il est clair que l'on a

$$\operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u) \subset \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u') .$$

Inversement, soit $y' \in \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u')$. Il existe $y \in \mathrm{N}$ tel que $y' = g(y)$. Comme $v' \circ u' = 0$, on a $0 = v'(y') = v'(g(y)) = h(v(y))$, d'où $v(y) = 0$ puisque h est injectif. Comme (u, v) est une suite exacte, il existe $x \in \mathrm{M}$ tel que $y = u(x)$, d'où $y' = g(u(x))$.

Prouvons (ii). Comme $v \circ u = 0$ et $v' \circ u' = 0$, il est clair que

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v) .$$

Inversement, soit $y \in \operatorname{Ker}(v' \circ g)$. Alors $g(y) \in \operatorname{Ker}(v')$, et il existe $x' \in \mathrm{M}'$ tel que $u'(x') = g(y)$ puisque la suite (u', v') est exacte. Comme f est surjectif, il existe $x \in \mathrm{M}$ tel que $f(x) = x'$, d'où $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$; on en conclut que $y - u(x) \in \operatorname{Ker}(g)$, ce qui termine la démonstration.

Lemme 1. — *Considérons un diagramme commutatif de* A-*modules*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "g"'] \\ M' \arrow[r, "u'"'] & N' . \end{tikzcd} \tag{7}$$

Alors il existe un homomorphisme et un seul $u_1 : \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(g)$, *et un homomorphisme et un seul* $u_2 : \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(g)$, *tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \operatorname{Ker}(g) \arrow[d, "j"'] \\ M \arrow[r, "u"'] & N \end{tikzcd} \tag{8}$$

et

$$(9)\qquad \begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{u'} & N' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Coker}\,(f) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}\,(g) \end{array}$$

soient commutatifs, i et j désignant les injections canoniques, p et q les surjections canoniques.

En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$, on a $f(x)=0$ et $g(u(x))=u'(f(x))=0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(g)$, et l'existence et l'unicité de u_1 sont alors immédiates. De même, on a

$$u'(f(\mathrm{M})) = g(u(\mathrm{M})) \subset g(\mathrm{N}),$$

donc u' donne par passage aux quotients un homomorphisme

$$u_2 : \mathrm{Coker}\,(f) \to \mathrm{Coker}\,(g),$$

qui est le seul homomorphisme pour lequel (9) soit commutatif.

Partons maintenant d'un diagramme *commutatif* (4) de A-modules ; il lui correspond en vertu du lemme 1 un diagramme commutatif

$$(10)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}\,(f) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}\,(g) & \xrightarrow{v_1} & \mathrm{Ker}\,(h) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle k}\downarrow \\ \mathrm{M} & \xrightarrow{u} & \mathrm{N} & \xrightarrow{v} & \mathrm{P} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ \mathrm{M}' & \xrightarrow[u']{} & \mathrm{N}' & \xrightarrow[v']{} & \mathrm{P}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\ \mathrm{Coker}\,(f) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}\,(g) & \xrightarrow[v_2]{} & \mathrm{Coker}\,(h) \end{array}$$

où i, j, k sont les injections canoniques, p, q, r les surjections canoniques, u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) les homomorphismes déduits de u, u' (resp. v, v') par le lemme 1.

PROPOSITION 2. — *Supposons que dans le diagramme commutatif* (4), *les suites* (u, v) *et* (u', v') *soient exactes. Alors :*

(i) *On a* $v_1 \circ u_1 = 0$; *si u' est injectif, la suite* (u_1, v_1) *est exacte.*

(ii) *On a* $v_2 \circ u_2 = 0$; *si v est surjectif, la suite* (u_2, v_2) *est exacte.*

(iii) *Supposons u' injectif et v surjectif. Il existe alors un homomorphisme et un seul* $d : \mathrm{Ker}\,(h) \to \mathrm{Coker}\,(f)$ *ayant la propriété suivante : si* $z \in \mathrm{Ker}\,(h)$, $y \in \mathrm{N}$ et $x' \in \mathrm{M}'$ *vérifient les relations $v(y) = k(z)$ et $u'(x') = g(y)$, on a $d(z) = p(x')$. De plus la suite*

$$(*)\qquad \mathrm{Ker}\,(f) \xrightarrow{u_1} \mathrm{Ker}\,(g) \xrightarrow{v_1} \mathrm{Ker}\,(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}\,(f) \xrightarrow{u_2} \mathrm{Coker}\,(g) \xrightarrow{v_2} \mathrm{Coker}\,(h)$$

est exacte.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Ker}\,(h) \arrow[d, "k"'] \arrow[ddddll, dashed, rounded corners] \\
\mathrm{M} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "h"'] \\
\mathrm{M}' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N}' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P}' \arrow[d, "r"'] \\
\mathrm{Coker}\,(f) \arrow[r, "u_2"'] & \mathrm{Coker}\,(g) \arrow[r, "v_2"'] & \mathrm{Coker}\,(h)
\end{tikzcd}$$

Prouvons (i). Comme u_1 et v_1 ont mêmes graphes que les restrictions de u et v à $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(g)$ respectivement, on a $v_1 \circ u_1 = 0$. On a

$$\mathrm{Ker}\,(v_1) = \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Im}\,(j) \cap \mathrm{Im}\,(u)\,.$$

Mais d'après la prop. 1 (i), on a $\mathrm{Ker}\,(v_1) = \mathrm{Im}\,(j \circ u_1) = \mathrm{Im}\,(u_1)$ si u' est injectif.

Prouvons (ii). Comme u_2 et v_2 proviennent de u et v par passage aux quotients, il est clair que $v_2 \circ u_2 = 0$. Supposons v surjectif ; comme q et p sont surjectifs, on a, en vertu des hypothèses et de la prop. 1 (ii)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,(v_2) &= q(\mathrm{Ker}\,(v_2 \circ q)) = q(\mathrm{Ker}\,(v') + \mathrm{Im}\,(g)) = q(\mathrm{Ker}\,(v')) \\ &= q(\mathrm{Im}\,(u')) = \mathrm{Im}\,(q \circ u') = \mathrm{Im}\,(u_2 \circ p) = \mathrm{Im}\,(u_2)\,.\end{aligned}$$

Prouvons enfin (iii). Pour $z \in \mathrm{Ker}\,(h)$, il existe $y \in \mathrm{N}$ tel que $v(y) = k(z)$ puisque v est surjectif ; en outre, on a $v'(g(y)) = h(k(z)) = 0$, et par suite il existe un *unique* $x' \in \mathrm{M}'$ tel que $u'(x') = g(y)$ puisque u' est injectif. Montrons que l'élément $p(x') \in \mathrm{Coker}\,(f)$ est *indépendant* de l'élément $y \in \mathrm{N}$ tel que $v(y) = k(z)$. En effet, si $y_1 \in \mathrm{N}$ est un second élément tel que $v(y_1) = k(z)$, on a $y_1 = y + u(x)$ où $x \in \mathrm{M}$; montrons que si $x'_1 \in \mathrm{M}'$ est tel que $u'(x'_1) = g(y_1)$, on a $x'_1 = x' + f(x)$; en effet, on a $u'(x' + f(x)) = u'(x') + u'(f(x)) = g(y) + g(u(x)) = g(y + u(x)) = g(y_1)$. Enfin, on en conclut que $p(x'_1) = p(x') + p(f(x)) = p(x')$. On peut donc poser $d(z) = p(x')$ et on a ainsi défini une application $d : \mathrm{Ker}\,(h) \to \mathrm{Coker}\,(f)$.

Si maintenant z_1, z_2 sont des éléments de $\mathrm{Ker}\,(h)$, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{A}$ et $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, on prendra des éléments y_1 et y_2 de N tels que $v(y_1) = k(z_1)$ et $v(y_2) = k(z_2)$ et on choisira pour $y \in \mathrm{N}$ l'élément $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; il est alors immédiat que

$$d(z) = \lambda_1\, d(z_1) + \lambda_2\, d(z_2)\,,$$

donc d est un *homomorphisme*.

Supposons que $z = v_1(t)$ pour un $t \in \mathrm{Ker}\,(g)$; on prendra alors pour $y \in \mathrm{N}$ l'élément $j(t)$. Comme $g(j(t)) = 0$, on en conclut $d(z) = 0$, donc $d \circ v_1 = 0$. Inversement, supposons que $d(z) = 0$. Avec les notations précédentes, on a donc $x' = f(x)$, où

$x \in \mathrm{M}$. Dans ce cas, on a $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$, ou encore $g(y - u(x)) = 0$. L'élément $y - u(x)$ est donc de la forme $j(n)$ pour $n \in \mathrm{Ker}\,(g)$, et on a

$$k(z) = v(y) = v(u(x) + j(n)) = v(j(n)) = k(v_1(n));$$

comme k est injectif, $z = v_1(n)$, ce qui prouve que la suite $(*)$ est exacte en $\mathrm{Ker}\,(h)$.

Enfin, on a (toujours avec les mêmes notations)

$$u_2(d(z)) = u_2(p(x')) = q(u'(x')) = q(g(y)) = 0 \quad \text{donc} \quad u_2 \circ d = 0\,.$$

Inversement, supposons qu'un élément $w = p(x')$ de $\mathrm{Coker}\,(f)$ soit tel que

$$u_2(w) = u_2(p(x')) = 0 \quad (\text{avec } x' \in \mathrm{M}')\,.$$

On a donc $q(u'(x')) = 0$, et par suite $u'(x') = g(y)$ pour un $y \in \mathrm{N}$; comme $v'(u'(x')) = 0$, on a $v'(g(y)) = 0$, donc $h(v(y)) = 0$, autrement dit $v(y) = k(z)$ pour un $z \in \mathrm{Ker}\,(h)$, et par définition $w = d(z)$, ce qui montre que la suite $(*)$ est exacte en $\mathrm{Coker}\,(f)$. On a vu dans (i) qu'elle est exacte en $\mathrm{Ker}\,(g)$ et dans (ii) qu'elle est exacte en $\mathrm{Coker}\,(g)$, ce qui achève de prouver (iii).

Corollaire 1. — *Supposons que le diagramme* (4) *soit commutatif et ait ses lignes exactes. Alors :*

(i) *Si u', f et h sont injectifs, g est injectif.*

(ii) *Si v, f et h sont surjectifs, g est surjectif.*

L'assertion (i) est conséquence de l'assertion (i) de la prop. 2 : en effet on a $\mathrm{Ker}\,(f) = 0$ et $\mathrm{Ker}\,(h) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\,(g) = 0$.

L'assertion (ii) est conséquence de l'assertion (ii) de la prop. 2 : en effet, on a $\mathrm{Coker}\,(f) = 0$ et $\mathrm{Coker}\,(h) = 0$, donc $\mathrm{Coker}\,(g) = 0$.

Corollaire 2. — *Supposons que le diagramme* (4) *soit commutatif et ait ses lignes exactes. Dans ces conditions :*

(i) *Si g est injectif et si f et v sont surjectifs, alors h est injectif.*

(ii) *Si g est surjectif et si h et u' sont injectifs, alors f est surjectif.*

Pour prouver (i), considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} u(\mathrm{M}) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{P} \arrow[d, "h"] \\ u'(\mathrm{M}') \arrow[r, "w'"'] & \mathrm{N}' \arrow[r, "v'"'] & \mathrm{P}' \end{tikzcd}$$

où f' est l'application ayant même graphe que la restriction de g à $u(\mathrm{M})$, w et w' les injections canoniques ; il est clair que ce diagramme est commutatif et a ses lignes exactes. En outre w' est injectif, et par hypothèse v est surjectif ; on a donc par la prop. 2 (iii), une suite exacte

$$\mathrm{Ker}\,(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}\,(f')\,;$$

puisque g est injectif et que f' est surjectif, on a donc $\mathrm{Ker}\,(h) = 0$.

Pour prouver (ii), considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{u} & N & \xrightarrow{w} & v(N) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h'}\downarrow \\ M' & \xrightarrow[u']{} & N' & \xrightarrow[w']{} & v'(N') \end{array}$$

où cette fois h' est l'application ayant même graphe que la restriction de h à $v(N)$, et w et w' ont respectivement mêmes graphes que v et v' ; ce diagramme est commutatif et ses lignes sont exactes. En outre w est surjectif et par hypothèse u' est injectif ; on a donc, par la prop. 2 (iii), une suite exacte

$$\mathrm{Ker}\,(h') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}\,(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(g) ;$$

puisque g est surjectif et que h' est injectif, on a donc $\mathrm{Coker}\,(f) = 0$.

Corollaire 3 (Lemme des cinq). — *Considérons un diagramme commutatif de* A-*modules*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{u_1} & M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 & \xrightarrow{u_4} & M_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\ M'_1 & \xrightarrow{u'_1} & M'_2 & \xrightarrow{u'_2} & M'_3 & \xrightarrow{u'_3} & M'_4 & \xrightarrow{u'_4} & M'_5 \end{array}$$

où les lignes sont exactes.

(i) *Si f_2 et f_4 sont injectifs et f_1 surjectif, f_3 est injectif.*

(ii) *Si f_2 et f_4 sont surjectifs et f_5 injectif, f_3 est surjectif.*

En particulier, si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, il en est de même de f_3.

Pour prouver (i), posons $\tilde{M}_2 = \mathrm{Coker}\,(u_1)$, $\tilde{M}'_2 = \mathrm{Coker}\,(u'_1)$ et notons $\tilde{f}_2 : \tilde{M}_2 \to \tilde{M}'_2$ l'application déduite de f_2. Il résulte du cor. 2 (i) que $\tilde{f}_2$ est injectif. En appliquant le cor. 1 (i) au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M}_2 & \xrightarrow{\tilde{u}_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 \\ {\scriptstyle \tilde{f}_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow \\ \tilde{M}'_2 & \xrightarrow{\tilde{u}'_2} & M'_3 & \xrightarrow{u'_3} & M'_4 \end{array}$$

où $\tilde{u}_2$ et $\tilde{u}'_2$ sont déduits de u_2 et u'_2, on voit que f_3 est injectif.

Pour prouver (ii), posons $\tilde{M}_4 = \mathrm{Ker}\,(u_4)$, $\tilde{M}'_4 = \mathrm{Ker}\,(u'_4)$ et notons $\tilde{f}_4 : \tilde{M}_4 \to \tilde{M}'_4$ l'application induite par f_4. Il résulte du cor. 2 (ii) que $\tilde{f}_4$ est surjectif. En appliquant le cor. 1 (ii) au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{\tilde{u}_3} & \tilde{M}_4 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{f}_4}\downarrow \\ M'_2 & \xrightarrow{u'_2} & M'_3 & \xrightarrow{\tilde{u}'_3} & \tilde{M}'_4 \end{array}$$

où $\tilde{u}_3$ et $\tilde{u}'_3$ ont même graphe que u_3 et u'_3, on voit que f_3 est surjectif.

3. Modules plats

DÉFINITION 1. — *On dit que le* A-*module* E *est* plat, *si pour toute suite exacte de* A-*modules à droite et d'homomorphismes*

$$\text{(11)} \qquad M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' ,$$

la suite d'applications **Z**-*linéaires*

$$\text{(12)} \qquad M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{v \otimes 1} M'' \otimes_A E$$

est exacte.

PROPOSITION 3. — *Pour que le* A-*module* E *soit plat, il faut et il suffit que, pour tout* A-*homomorphisme injectif* $u : M' \to M$ *de* A-*modules à droite, l'application* $u \otimes 1 : M' \otimes_A E \to M \otimes_A E$ *soit injective.*

Si E est plat et $u : M' \to M$ injectif, la suite $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$ est exacte, donc aussi la suite $0 \longrightarrow M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E$, et $u \otimes 1$ est injectif. Inversement, considérons la suite exacte (11) ; posons $M''_1 = v(M)$, et soit $i : M''_1 \to M''$ l'injection canonique et $p : M \to M''_1$ l'application $m \mapsto v(m)$. La suite $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M''_1 \longrightarrow 0$ est exacte ; d'après II, p. 58, prop. 5, la suite $M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{p \otimes 1} M''_1 \otimes_A E$ est donc exacte. Par ailleurs, on a $v = i \circ p$, donc $(v \otimes 1) = (i \otimes 1) \circ (p \otimes 1)$; si E satisfait à la condition de l'énoncé, alors $i \otimes 1$ est injectif, donc

$$\operatorname{Ker}(v \otimes 1) = \operatorname{Ker}(p \otimes 1) = \operatorname{Im}(u \otimes 1)$$

et la suite (12) est exacte.

PROPOSITION 4. — (i) *Soient* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille de* A-*modules,* $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ *leur somme directe. Pour que le* A-*module* E *soit plat, il faut et il suffit que chacun des* E_i *le soit.*

(ii) *Soient* I *un ensemble préordonné filtrant à droite,* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *un système inductif de* A-*modules relatif à* I, $E = \varinjlim E_\alpha$ *sa limite inductive. Si chacun des* A-*modules* E_α *est plat, alors* E *est plat.*

Soit $M' \to M \to M''$ une suite exacte de A-modules à droite.

(i) Pour que la suite $\bigoplus_{i \in I} (M' \otimes_A E_i) \to \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A E_i) \to \bigoplus_{i \in I} (M'' \otimes_A E_i)$ soit exacte, il faut et il suffit que chacune des suites $M' \otimes_A E_i \to M \otimes_A E_i \to M'' \otimes_A E_i$ le soit (II, p. 13, prop. 7) ce qui démontre (i) puisque $\bigoplus (M \otimes_A E_i)$ s'identifie canoniquement à $M \otimes_A E$ (II, p. 61, prop. 7).

(ii) Par hypothèse, chacune des suites $M' \otimes_A E_i \to M \otimes_A E_i \to M'' \otimes_A E_i$ est exacte, donc aussi la suite $M' \otimes_A E \to M \otimes_A E \to M'' \otimes_A E$, puisque le passage à la limite inductive commute avec le produit tensoriel (II, p. 93, prop. 7) et conserve l'exactitude (II, p. 91, prop. 3).

Exemples. — 1) Il est clair que A_s est un A-module plat ; il résulte alors de la prop. 4 (i) que tout A-module libre, et plus généralement tout A-module projectif, est plat (voir aussi II, p. 63, cor. 6).

* Inversement, tout A-module plat de *présentation finie* est projectif (n° 5). *

2) D'après la prop. 4 (ii), tout A-module qui est limite inductive d'un système inductif filtrant de A-modules libres est plat. Nous démontrerons une réciproque au n° 6.

3) Si A est semi-simple, tout A-module est projectif (VIII, § 5, n° 1, prop. 1) donc plat.

4) * Si A est un anneau local artinien (non nécessairement commutatif), un A-module est plat si et seulement s'il est libre (AC II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5). *

5) Si A est intègre, le corps des fractions K de A est un A-module plat (II, p. 118, prop. 27).

6) * En AC II et III, nous étudierons deux exemples importants de A-modules plats lorsque A est commutatif : les anneaux de fractions $S^{-1}A$, et lorsque A est nœthérien, les séparés complétés de A pour les topologies J-adiques. *

7) Soit $a \in A$ tel que l'application $a_A : x \mapsto ax$ de A dans A soit injective (« a n'est pas diviseur à gauche de 0 »). Si E est un A-module plat, alors l'homothétie a_E est injective, puisque s'identifiant à $a_A \otimes 1 : A_d \otimes_A E \to A_d \otimes_A E$. En particulier, *si* A *est intègre, tout* A*-module plat est sans torsion.* Inversement, *si* A *est principal, tout* A*-module sans torsion est plat* : en effet, si le A-module E est sans torsion, tout sous-module de type fini de E est libre (VII, § 4, n° 4, cor. 2 au th. 4), et E est réunion filtrante croissante de sous-modules plats, donc est plat (prop. 4 (ii)).

8) Soient B un anneau et $\rho : A \to B$ un homomorphisme. Si E est un A-module plat, le B-module $E_{(B)} = B \otimes_A E$ est plat. Soit en effet $u : N' \to N$ un homomorphisme injectif de B-modules à droite ; alors $u \otimes_B 1_{E_{(B)}}$ s'identifie canoniquement à l'homomorphisme $u \otimes_A 1_E : N' \otimes_A E \to N \otimes_A E$, qui est injectif si E est plat.

9) Supposons que $A = K[X, Y]$, où K est un corps. Alors l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ engendré par X et Y est un A-module sans torsion, mais non plat. Considérons en effet l'anneau $B = A/(Y)$, qui est isomorphe à $K[X]$, donc intègre. Le B-module $\mathfrak{m}_{(B)}$ est isomorphe à $\mathfrak{m}/Y\mathfrak{m} = (X, Y)/(XY, Y^2)$ dans lequel la classe de Y est de torsion. Par suite, $\mathfrak{m}_{(B)}$ n'est pas un B-module plat, donc $\mathfrak{m}$ n'est pas plat.

10) Supposons A commutatif. Soit B l'algèbre $A[X_1, ..., X_n]/(P)$, où P est un polynôme non nul. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, notons $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$, $E(\mathfrak{p})$ l'algèbre $\kappa(\mathfrak{p})[X_1, ..., X_n]$ et $P(\mathfrak{p})$ l'image de P dans $E(\mathfrak{p})$ par l'application canonique.

On peut montrer que, pour que B soit un A-module plat, il suffit que $P(\mathfrak{p}) \neq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Si A est intègre, cette condition est nécessaire.

* En langage géométrique, considérons la projection $\pi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, la fibre $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ s'identifie à la sous-variété $V_\mathfrak{p}$ de l'espace affine $\mathbf{A}^n_{\kappa(\mathfrak{p})} = \mathrm{Spec}(E(\mathfrak{p}))$ définie par $P(\mathfrak{p})$, et l'ensemble F des $\mathfrak{p}$ pour lesquels cette sous-variété est l'espace tout entier (*i.e.* pour lesquels $P(\mathfrak{p}) = 0$) est un fermé de

Spec (A). La condition précédente signifie que ce fermé est vide, autrement dit que pour tout $\mathfrak{p}$ la sous-variété $V_\mathfrak{p}$ est une hypersurface dans $\mathbf{A}^n_{\kappa(\mathfrak{p})}$. $_*$

11) * Soient S et X deux espaces analytiques complexes et $f : X \to S$ un morphisme. On dit que f est *plat* en un point x de X si $\mathcal{O}_{X,x}$, considéré comme $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-module au moyen de l'homomorphisme $f^* : \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, est plat. L'ensemble des points de X où f est plat est un ouvert de X, et la restriction de f à cet ouvert est une application ouverte. Si X et S sont des *variétés* analytiques connexes de dimension finie, f est plat (en tout point de X) si et seulement si $f(X)$ est ouvert dans S et les fibres $f^{-1}(s)$, pour $s \in f(X)$, ont toutes la même dimension. $_*$

4. Modules de présentation finie

On appelle *présentation* (ou *présentation de longueur* 1) d'un A-module E une suite exacte

$$L_1 \to L_0 \to E \to 0 \tag{13}$$

de A-modules où L_0 et L_1 sont *libres*.

Tout A-module E admet une présentation. On sait en effet (II, p. 27, prop. 20) qu'il existe un homomorphisme surjectif $u : L_0 \to E$, où L_0 est libre ; si R est le noyau de u, il existe de même un homomorphisme surjectif $v : L_1 \to R$ où L_1 est libre. Si l'on considère v comme un homomorphisme de L_1 dans L_0, la suite $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0$ est exacte par définition, d'où notre assertion.

Si $\rho : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, toute présentation (13) de E fournit une présentation de $E_{(B)} = B \otimes_A E$:

$$B \otimes_A L_1 \to B \otimes_A L_0 \to B \otimes_A E \to 0 \tag{14}$$

en vertu de II, p. 58, prop. 5 et du fait que $B \otimes_A L$ est un B-module libre lorsque L est libre.

On dit qu'une présentation (13) d'un module E est *finie* si les modules libres L_0 et L_1 ont des bases finies. Il est clair que si la présentation (13) est finie, il en est de même de la présentation (14). On dit que E est un A-*module de présentation finie* s'il admet une *présentation finie*.

PROPOSITION 5. — (i) *Tout module admettant une présentation finie est de type fini.*

(ii) *Si* A *est un anneau nœthérien à gauche, tout* A-*module de type fini admet une présentation finie.*

(iii) *Tout module projectif de type fini admet une présentation finie.*

L'assertion (i) résulte trivialement des définitions. Supposons A nœthérien à gauche et E de type fini. Il existe alors un homomorphisme surjectif $u : L_0 \to E$, où L_0 est un A-module libre ayant une base finie ; le noyau R de u est de type fini, donc il y a un homomorphisme surjectif $v : L_1 \to R$ où L_1 est libre de base finie, et la suite exacte $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \longrightarrow 0$ est une présentation finie de E ; d'où (ii).

Enfin, supposons que E soit un module projectif de type fini ; il est alors facteur direct d'un module libre de type fini L_0 (II, p. 40, cor. 1) ; le noyau R de l'homomorphisme surjectif $L_0 \to E$ est alors isomorphe à un quotient de L_0, donc est de type fini, et on termine comme ci-dessus.

PROPOSITION 6. — *Soient* A *un anneau,* E *un* A-*module de présentation finie. Pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E \longrightarrow 0$$

où G *est de type fini, le module* F *est de type fini.*

Soit $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \longrightarrow 0$ une présentation finie ; si (e_i) est une base de L_0, il existe pour chaque i un élément $g_i \in G$ tel que $p(g_i) = s(e_i)$; l'homomorphisme $u : L_0 \to G$ tel que $u(e_i) = g_i$ pour tout i est donc tel que $s = p \circ u$. Comme $s \circ r = 0$, on a $u(r(L_1)) \subset \operatorname{Ker} p$, et comme $\operatorname{Ker} p$ est isomorphe à F, on voit qu'il y a un homomorphisme $v : L_1 \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{r} & L_0 & \xrightarrow{s} & E & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle 1_E}\downarrow & & \\ F & \xrightarrow[j]{} & G & \xrightarrow[p]{} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

soit commutatif. Comme j est injectif et s surjectif, on peut appliquer la proposition 2 de X, p. 4, autrement dit il y a une suite exacte

$$\operatorname{Ker} 1_E \xrightarrow{d} \operatorname{Coker} v \longrightarrow \operatorname{Coker} u \longrightarrow \operatorname{Coker} 1_E .$$

Ceci montre que $\operatorname{Coker} v$ est isomorphe à $G/u(L_0)$, qui est de type fini par hypothèse. On a en outre la suite exacte

$$0 \to v(L_1) \to F \to \operatorname{Coker} v \to 0$$

et comme $v(L_1)$ et $\operatorname{Coker} v$ sont de type fini, il en est de même de F (II, p. 17, cor. 5).

PROPOSITION 7. — *Soit* M *un* A-*module. Il existe un ensemble ordonné* I *filtrant à droite et un système inductif de* A-*modules de présentation finie* $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *relatif à* I *tel que* M *soit isomorphe à* $\varinjlim M_\alpha$. *Si* M *possède un système générateur de n éléments, on peut supposer qu'il en est de même des* M_α.

Considérons une présentation

$$A_s^{(K)} \xrightarrow{u} A_s^{(L)} \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0 ;$$

soit I l'ensemble des couples $\alpha = (K', L')$, où K' (resp. L') est une partie finie de K (resp. L), tels que u induise une application u_α du sous-module $A_s^{K'}$ de $A_s^{(K)}$ dans le sous-module $A_s^{L'}$ de $A_s^{(L)}$; pour $\alpha \in I$, soit M_α le conoyau de u_α et $v_\alpha : A_s^{L'} \to M_\alpha$ l'application canonique, de sorte que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} A_s^{(K)} & \xrightarrow{u} & A_s^{(L)} & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle i_\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle j_\alpha}\uparrow & & {\scriptstyle f_\alpha}\uparrow & & \\ A_s^{K'} & \xrightarrow{u_\alpha} & A_s^{L'} & \xrightarrow{v_\alpha} & M_\alpha & \longrightarrow & 0 , \end{array}$$

où i_α et j_α sont les injections canoniques, et où f_α est déduit de j_α par passage aux quotients. Ordonnons l'ensemble I par la relation

$$\alpha = (\mathrm{K}', \mathrm{L}') \leqslant \beta = (\mathrm{K}'', \mathrm{L}'') \quad \text{si} \quad \mathrm{K}' \subset \mathrm{K}'', \quad \mathrm{L}' \subset \mathrm{L}'' ;$$

pour $\alpha \leqslant \beta$, soit $\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}_\beta$ l'homomorphisme déduit par passage aux quotients de l'inclusion de $\mathrm{A}_s^{\mathrm{L}'}$ dans $\mathrm{A}_s^{\mathrm{L}''}$. On vérifie alors aussitôt que l'ensemble ordonné I est filtrant, que $(\mathrm{M}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ est un système inductif de A-modules et que (φ_α) est un système inductif de A-homomorphismes. Par passage à la limite inductive, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}_s^{(\mathrm{K})} \arrow[r, "u"] & \mathrm{A}_s^{(\mathrm{L})} \arrow[r, "v"] & \mathrm{M} \arrow[r] & 0 \\ \varinjlim \mathrm{A}_s^{\mathrm{K}'} \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{A}_s^{\mathrm{L}'} \arrow[u, "j"] \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{M}_\alpha \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & 0 ; \end{tikzcd} \tag{15}$$

les lignes de ce diagramme sont exactes (II, p. 91, prop. 3) ; puisque i et j sont bijectifs, φ l'est aussi (X, p. 7, cor. 3), d'où la proposition.

5. Homomorphismes d'un module de présentation finie

Soit E un A-module. Si I est un ensemble préordonné filtrant et (G_i, u_{ji}) un système inductif de A-modules relatif à I, les applications canoniques $\mathrm{G}_i \to \varinjlim \mathrm{G}_i$ induisent des homomorphismes $\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G}_i) \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \varinjlim \mathrm{G}_i)$, d'où un homomorphisme dit *canonique*

$$\varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G}_i) \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \varinjlim_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_i) . \tag{16}$$

Soient B un autre anneau, F un B-module, G un (A, B)-bimodule ; on a défini en II, p. 75 un homomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G}) \otimes_\mathrm{B} \mathrm{F} \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G} \otimes_\mathrm{B} \mathrm{F}) . \tag{17}$$

PROPOSITION 8. — *a) Si le* A-*module* E *est de type fini* (resp. *de présentation finie*), *l'homomorphisme canonique* (16) *est injectif* (resp. *bijectif*).

b) Supposons que le B-*module* F *soit plat ; si le* A-*module* E *est de type fini* (resp. *de présentation finie*), *l'homomorphisme canonique* (17) *est injectif* (resp. *bijectif*).

Démontrons par exemple *b*), la démonstration de *a*) étant analogue. Considérons A, B, F, G comme fixés, et, pour tout A-module à droite E, posons

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G}) \otimes_\mathrm{B} \mathrm{F} , \qquad \mathrm{T}'(\mathrm{E}) = \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{E}, \mathrm{G} \otimes_\mathrm{B} \mathrm{F})$$

et notons ν_E l'homomorphisme (17) ; pour tout homomorphisme $v : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ de A-modules à droite, posons $\mathrm{T}(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_\mathrm{G}) \otimes 1_\mathrm{F}$ et $\mathrm{T}'(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_\mathrm{G} \otimes 1_\mathrm{F})$.

Soit $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} E \to 0$ une présentation de E ; nous supposons le module libre L_0 (resp. les modules libres L_0 et L_1) *de type fini.* Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & T(E) & \xrightarrow{T(w)} & T(L_0) & \xrightarrow{T(v)} & T(L_1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nu_E} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_1}} \\ 0 & \to & T'(E) & \xrightarrow[T'(w)]{} & T'(L_0) & \xrightarrow[T'(v)]{} & T'(L_1) \end{array} \tag{18}$$

est commutatif, et sa seconde ligne est exacte (II, p. 36, th. 1) ; en outre, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_0, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_1, G)$$

est exacte (*loc. cit.*), et comme F est *plat*, la première ligne de (18) est aussi une suite exacte (X, p. 8, déf. 1). Cela étant, on sait que ν_{L_0} est bijectif (resp. que ν_{L_0} et ν_{L_1} sont bijectifs) (II, p. 75, prop. 2). Si on suppose seulement ν_{L_0} bijectif, il résulte de (18) que $\nu_{L_0} \circ T(w) = T'(w) \circ \nu_E$ est injectif, donc ν_E l'est aussi. Si on suppose que ν_{L_0} et ν_{L_1} sont tous deux bijectifs, on déduit du cor. 2 (ii) de X, p. 6 que ν_E est surjectif, et comme on vient de voir que ν_E est injectif, il est bijectif.

COROLLAIRE. — *Tout module plat et de présentation finie est projectif.*

Soit en effet E un A-module plat et de présentation finie. Appliquant (*b*) au cas $B = A$, $G = {}_sA_d$, $F = E$, on voit que l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(E, A) \otimes_A E \to \mathrm{Hom}_A(E, E)$$

est surjectif. Cela implique que E est projectif (II, p. 77, remarque 1).

D'après le corollaire précédent et la prop. 5 de X, p. 10, il y a identité entre modules plats de présentation finie et modules projectifs de type fini. En revanche, il existe des modules plats de type fini qui ne sont pas de présentation finie, donc qui ne sont pas projectifs (*cf.* X, p. 170, exercice 17, voir toutefois X, p. 169, exercices 13 et 14).

6. Structure des modules plats

Lemme 2. — *Soient* I *un ensemble ordonné filtrant à droite,* $(E_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *un système inductif d'ensembles relatif à* I, E *sa limite inductive et* $\varphi_\alpha : E_\alpha \to E$, $\alpha \in I$, *les applications canoniques. Soit* $f : I \to I$ *une application telle que* $f(\alpha) > \alpha$ *pour* $\alpha \in I$, *et supposons donnés, pour chaque* $\alpha \in I$, *un ensemble* L_α *et des applications* $u_\alpha : E_\alpha \to L_\alpha$ *et* $v_\alpha : L_\alpha \to E_{f(\alpha)}$ *telles que* $v_\alpha \circ u_\alpha' = \varphi_{f(\alpha),\alpha}$. *Soit* J *l'ensemble ordonné obtenu en munissant* I *de la relation* « $\alpha \leqslant \beta$ *si* $\alpha = \beta$ *ou* $f(\alpha) \leqslant \beta$ ». *Si* $\alpha, \beta \in J$ *avec* $\alpha \leqslant \beta$, *soit* $\psi_{\beta\alpha} : L_\alpha \to L_\beta$ *l'application telle que* $\psi_{\beta\alpha} = \mathrm{Id}$ *si* $\alpha = \beta$, $\psi_{\beta\alpha} = u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha$ *si* $f(\alpha) \leqslant \beta$. *Si* $\alpha \in J$, *soit* $\psi_\alpha : L_\alpha \to E$ *l'application* $\varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha$. *Alors l'ensemble ordonné* J *est filtrant,* $(L_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ *est un système inductif relatif à* J, (ψ_α) *est un système inductif d'applications et l'application* $\psi : \varinjlim_{\alpha \in J} L_\alpha \to E$ *déduite des* ψ_α *est bijective.*

Il est clair que J est filtrant. Si α, $\beta \in$ J avec $\alpha < \beta$, on a

$$\begin{aligned}\psi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha} &= \varphi_{f(\beta)} \circ v_\beta \circ u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha \\ &= \varphi_{f(\beta)} \circ \varphi_{f(\beta),\beta} \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha = \psi_\alpha \,;\end{aligned}$$

de même, si α, β, $\gamma \in$ J avec $\alpha < \beta < \gamma$, on a

$$\begin{aligned}\psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} &= u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\beta)} \circ v_\beta \circ u_\beta \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha \\ &= u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\beta)} \circ \varphi_{f(\beta),\beta} \circ \varphi_{\beta, f(\alpha)} \circ v_\alpha = u_\gamma \circ \varphi_{\gamma, f(\alpha)} \circ v_\alpha = \psi_{\gamma\alpha} \,.\end{aligned}$$

Démontrons la dernière assertion : pour chaque $\alpha \in$ J, on a

$$\psi_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ v_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha)} \circ \varphi_{f(\alpha),\alpha} = \varphi_\alpha \,,$$

donc $\varphi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha) = \psi_\alpha(u_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)) \subset \psi_\alpha(\mathrm{L}_\alpha)$, et ψ est *surjective*. Soit $\alpha \in$ J et soient $x, y \in \mathrm{L}_\alpha$ avec $\psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(y)$, *i.e.* $\varphi_{f(\alpha)}(v_\alpha(x)) = \varphi_{f(\alpha)}(v_\alpha(y))$; il existe $\beta \in$ I, $\beta \geqslant f(\alpha)$ tel que

$$\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(x)) = \varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(y)) \,,$$

donc

$$\psi_{\beta,\alpha}(x) = u_\beta(\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(x))) = u_\beta(\varphi_{\beta, f(\alpha)}(v_\alpha(y))) = \psi_{\beta,\alpha}(y) \,.$$

et ψ est *injective.*

THÉORÈME 1 (D. Lazard). — *Pour tout* A*-module* E, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) E *est plat.*

(ii) *Pour tout* A*-module* P *de présentation finie, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{E})$$

est surjectif.

(iii) *Pour tout* A*-module* P *de présentation finie et tout homomorphisme* $u : \mathrm{P} \to \mathrm{E}$, *il existe un* A*-module* L *libre de type fini et des homomorphismes* $v : \mathrm{P} \to \mathrm{L}$ *et* $w : \mathrm{L} \to \mathrm{E}$ *tels que* $u = w \circ v$.

(iv) *Il existe un ensemble ordonné filtrant* J, *un système inductif de modules libres de type fini* $(\mathrm{L}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ *et un isomorphisme de* E *sur* $\varinjlim \mathrm{L}_j$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : cela résulte de la prop. 4 (ii) de X, p. 8.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : cela résulte de la prop. 8*b*) de X, p. 12.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : soient P un A-module de présentation finie et $u : \mathrm{P} \to \mathrm{E}$ un homomorphisme ; d'après (ii), il existe $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{A})$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{E}$ tels que $u(x) = \sum v_i(x)\, w_i$ pour tout $x \in \mathrm{P}$; si $v : \mathrm{P} \to \mathrm{A}^n$ est l'homomorphisme de composantes (v_i) et $w : \mathrm{A}^n \to \mathrm{E}$ l'homomorphisme $(a_i) \mapsto \sum a_i w_i$, on a bien $u = w \circ v$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : supposons (iii) vérifiée, et soit $(\mathrm{E}_\alpha, \varphi_{\beta,\alpha})$ un système inductif, relatif à un ensemble filtrant I, de A-modules de présentation finie, de limite inductive E

(X, p. 11, prop. 7). Quitte à remplacer I par le produit lexicographique $I \times \mathbf{N}$, avec $E_{(\alpha,n)} = E_\alpha$ pour tout n, on peut supposer que I n'a pas de plus grand élément. Pour chaque $\alpha \in I$, soient L_α un A-module libre de type fini et $u_\alpha : E_\alpha \to L_\alpha$, $v'_\alpha : L_\alpha \to E$ des homomorphismes tels que $v'_\alpha \circ u_\alpha$ soit l'application canonique φ_α de E_α dans E ; puisque L_α est libre de type fini et I sans plus grand élément, il existe un indice $\beta > \alpha$ et un homomorphisme $v''_\alpha : L_\alpha \to E_\beta$ tels que $v'_\alpha = \varphi_\beta \circ v''_\alpha$; puisque $\varphi_\beta \circ v''_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_{\beta,\alpha}$ et que E_α est de présentation finie, il résulte de la prop. 8*a*) de X, p. 12, qu'il existe $\gamma \geqslant \beta$ tel que $\varphi_{\gamma\beta} \circ v''_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{\gamma\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$; posons $\gamma = f(\alpha)$ et soit v_α l'homomorphisme $\varphi_{\gamma\beta} \circ v''_\alpha$ de L_α dans $E_{f(\alpha)}$; on a $v_\alpha \circ u_\alpha = \varphi_{f(\alpha),\alpha}$. On peut alors appliquer le lemme 2, d'où (iv).

COROLLAIRE. — *Supposons* A *commutatif. Pour tout* A-*module plat* E, *les* A-*modules* $\mathbf{T}(E)$, $\mathbf{S}(E)$, $\mathbf{\Lambda}(E)$, $\mathbf{T}^n(E)$, $\mathbf{S}^n(E)$, $\mathbf{\Lambda}^n(E)$ *sont plats.*

En effet, E est la limite inductive d'un système filtrant (L_j) de A-modules libres de type fini, donc $\mathbf{T}(E)$ (resp. $\mathbf{S}(E)$, etc.) est limite inductive du système filtrant des A-modules libres $\mathbf{T}(L_j)$ (resp. $\mathbf{S}(L_j)$, etc.), donc est plat (*cf.* III, p. 61, prop. 6, p. 62, th. 1, p. 73, prop. 8, p. 75, th. 1, p. 83, prop. 9, et p. 86, th. 1).

Remarque. — Considérant dans (ii) une présentation finie $A_s^J \xrightarrow{c} A_s^I \to P \to 0$, on obtient la condition (ii′) encore équivalente aux précédentes :

(ii′) *Pour toute matrice finie* $(c_{ij})_{i\in I, j\in J}$ *d'éléments de* A, *toute solution*

$$e = (e_i)_{i\in I} \in E^I$$

du système d'équations linéaires et homogènes

$$\sum_{i\in I} c_{ij}\, e_i = 0\,, \qquad j \in J\,,$$

peut s'écrire $b_1 z_1 + \cdots + b_n z_n$, *où* $b_1, \ldots, b_n \in E$ *et où, pour* $r = 1, \ldots, n$, $z_r = (z_{r,i})_{i\in I}$ *est une solution dans* A^I *du système d'équations*

$$\sum_{i\in I} z_{r,i}\, c_{ij} = 0, \qquad j \in J\,.$$

7. Modules injectifs

DÉFINITION 2. — *On dit que le* A-*module* E *est* injectif *si, pour toute suite exacte de* A-*modules et d'homomorphismes*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''\,, \tag{19}$$

la suite d'applications **Z**-*linéaires*

$$\operatorname{Hom}_A(M'', E) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(v,1)} \operatorname{Hom}_A(M, E) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(u,1)} \operatorname{Hom}_A(M', E) \tag{20}$$

est exacte.

Lemme 3. — *Pour que le* A-*module* E *soit injectif, il faut et il suffit que, pour toute application* A-*linéaire injective* $u : M' \to M$, *l'application*

$$\mathrm{Hom}_A(u, 1) : \mathrm{Hom}_A(M, E) \to \mathrm{Hom}_A(M', E)$$

soit surjective.

Si E est injectif et si $u : M' \to M$ est injectif, alors la suite $0 \to M' \xrightarrow{u} M$ est exacte, donc aussi la suite $\mathrm{Hom}(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,1)} \mathrm{Hom}(M', E) \to 0$, et $\mathrm{Hom}(u, 1)$ est surjectif. Inversement considérons la suite exacte (19) ; posons $M''_1 = v(M)$ et soient $i : M''_1 \to M''$ l'injection canonique et $p : M \to M''_1$ l'application $m \mapsto v(m)$. La suite $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$ est exacte ; d'après II, p. 36, th. 1, la suite

$$\mathrm{Hom}_A(M''_1, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(p,1)} \mathrm{Hom}_A(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(u,1)} \mathrm{Hom}_A(M', E)$$

est exacte. Par ailleurs, on a $\mathrm{Hom}(v, 1) = \mathrm{Hom}(p, 1) \circ \mathrm{Hom}(i, 1)$. Si E satisfait à la condition du lemme, $\mathrm{Hom}(i, 1)$ est surjectif, donc l'image de $\mathrm{Hom}(v, 1)$ est aussi celle de $\mathrm{Hom}(p, 1)$, et la suite (20) est exacte.

Remarque. — Soient E un A-module injectif, $u : M' \to M$ et $f : M' \to E$ des homomorphismes de A-modules. Si $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, f$, il existe un homomorphisme $g : M \to E$ tel que $g \circ u = f$. Cela résulte en effet de ce qui précède appliqué à l'homomorphisme injectif $M'/\mathrm{Ker}\, u \to M$ déduit de u.

PROPOSITION 9. — *Soient* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille de* A-*modules*, $E = \prod E_i$ *leur produit. Pour que le* A-*module* E *soit injectif, il faut et il suffit que chacun des* E_i *le soit.*

Soit $u : M' \to M$ un homomorphisme injectif de A-modules. Pour que l'homomorphisme produit $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M, E_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M', E_i)$ soit surjectif, il faut et il suffit que chacun des homomorphismes $\mathrm{Hom}_A(M, E_i) \to \mathrm{Hom}_A(M', E_i)$ le soit (II, p. 10, prop. 5) ; cela démontre la proposition puisque $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(M, E_i)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_A(M, E)$.

PROPOSITION 10. — *Soit* E *un* A-*module. Pour que* E *soit injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A *et tout* A-*homomorphisme* $f : \mathfrak{a} \to E$, *il existe* $e \in E$ *tel que* $f(a) = ae$ *pour tout* $a \in \mathfrak{a}$.

Supposons E injectif ; soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A, $f : \mathfrak{a} \to E$ un A-homomorphisme, et notons $i : \mathfrak{a} \to A$ l'injection canonique. Alors l'application

$$\mathrm{Hom}_A(i, 1) : \mathrm{Hom}_A(A, E) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$$

est surjective (déf. 2) ; si $g \in \mathrm{Hom}_A(A, E)$ est tel que $f = g \circ i$, on a

$$f(a) = g(a) = ag(1)$$

pour tout $a \in \mathfrak{a}$.

Inversement, supposons la condition de l'énoncé vérifiée, soient M un A-module, N un sous-module de M, $u : N \to E$ un A-homomorphisme, et prouvons qu'il existe un A-homomorphisme $\bar{u} : M \to E$ prolongeant u (*cf. lemme* 3). Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des couples (P, v) où P est un sous-module de M contenant N et v un homomorphisme de P dans E prolongeant u. L'ensemble $\mathscr{P}$ ordonné par la relation de prolongement