Richard Courant

Herbert Robbins

Was ist Mathematik?

Fünfte Auflage

Springer

Was ist Mathematik?

Richard Courant · Herbert Robbins

Was ist Mathematik?

Fünfte, unveränderte Auflage
Mit 287 Abbildungen

Springer

Richard Courant (1888–1972)
New York University
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York, USA

Herbert Robbins (1915–2001)
Rutgers University
Department of Mathematics
Piscataway, USA

Die Fotovorlage für die Abbildung von Richard Courant auf der Einbandvorderseite wurde dem Band C. Reid: „Courant", Springer-Verlag, 1996, entnommen.

Die Fotovorlage für die Abbildung von Herbert Robbins auf der Einbandvorderseite wurde dem Band Donald. J. Albers, G.L. Alexanderson (Eds.): „Mathematical People, Profiles and Interviews" mit freundlicher Genehmigung des Birkhäuser Verlags Basel entnommen.

Das englische Original dieses Buches erschien seit dem Jahre 1941 unter dem Titel

WHAT IS MATHEMATICS?

im Verlage der Oxford University Press, New York, in neun Auflagen. Die vorliegende autorisierte Übersetzung stammt von Dr. Iris Runge und wurde von Dr. Arnold Kirsch und Brigitte Rellich bearbeitet.

ISBN 978-3-642-13700-6 e-ISBN 978-3-642-13701-3
DOI 10.1007/978-3-642-13701-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (1991): 00-01, 00A05

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Dem Andenken an

Franz Rellich

gewidmet

Vorwort zur vierten Ausgabe

Richard Courant hatte immer etwas Skrupel wegen des Buchtitels „Was ist Mathematik?“, fand er ihn doch „ein klein wenig unehrlich“. Diese Bedenken wurden, wenn nicht behoben, so doch gemildert durch einen Ratschlag, den ihm Thomas Mann gab, und von dem Courant oft und mit sichtlichem Vergnügen erzählte*). Bei einer Abendgesellschaft in Princeton, Courants ältester Sohn Ernst hatte gerade den Doktortitel erworben und Thomas Mann den Grad eines Ehrendoktors erhalten, kam Courant neben dem Dichter zu sitzen. Er ließ sich die Gelegenheit nicht entgehen, den berühmten Autor zu fragen, ob er sein Buch „Was ist Mathematik?“ oder doch lieber „Mathematische Untersuchungen grundlegender elementarer Probleme für das allgemeine Publikum“ nennen sollte. Mann entgegnete, zwar könne er Courant nicht raten, aber er wolle ihm von seiner eigenen Erfahrung berichten. Vor einiger Zeit nämlich habe seine *Lotte in Weimar* in einer englischen Übersetzung bei einem amerikanischen Verlag erscheinen sollen. Da sei sein Verleger, Mr. Knopf, zu ihm gekommen und habe gesagt: „Herr Mann, wir sollten uns noch einmal über den Titel Ihres Buches unterhalten. Meine Frau, die in solchen Dingen ein ausgezeichnetes Gespür hat, meint, wir sollten das Buch *The Beloved Returns* nennen.“ Als der Autor ein gewisses Unbehagen über diesen Vorschlag äußerte und meinte, schließlich tauge *Lotte in Weimar* ebensogut als deutscher wie als englischer Titel, habe Knopf gesagt: „Herr Mann, Sie haben ja durchaus recht, aber bitte bedenken Sie: Wenn wir Ihr Buch unter dem Titel *Lotte in Weimar* herausbringen, werden wir vielleicht 10000 Exemplare absetzen; nennen wir es aber *The Beloved Returns*, so verkaufen wir 100000 Stück.“ „Darauf“, so Mann, „habe ich mich entschieden, für *The Beloved Returns*“. Courant wählte den Titel „What is Mathematics?“

Was also ist Mathematik? Courant und Robbins geben eine Antwort, der wohl die meisten Mathematiker zustimmen können, nämlich, daß man nicht über Mathematik philosophieren, sondern sich mit ihr beschäftigen soll. Freilich, so Euklid, gibt es keinen bequemen Königsweg in die Mathematik, und daher kommt es schon darauf an, welchen Führern man folgen will, wenn die Reise in die Mathematik Erkenntnis und Vergnügen bringen soll. Es ist wohltuend, daß die beiden Autoren die Mathematik nicht als Sammlung unzusammenhängender Probleme, als Rätselecke der Naturwissenschaften darstellen, sondern dem Leser einen Einblick in das innere Gefüge der Mathematik und ihre historische Entwicklung gewähren. Zugleich zeigen sie ihm, worin die Stärke der Mathematik besteht, nämlich in der engen Verbindung von Problemanalyse, Intuition und abstrakt-integrativem Denken. Die Bedeutung des letzteren, von Mathematikern als Axiomatik bezeichnet, kann man gar nicht hoch genug veranschlagen für die Erfolge der Mathematik. Andererseits läuft die axiomatische Methode leicht ins Leere, wenn sie nicht mit der Anschauung, der Intuition und

*) Vgl. Constance Reid, *Courant*, übersetzt von Jeanette Zehnder-Reitinger, Springer-Verlag 1979, Seite 272.

der Einsicht in den organischen inneren Zusammenhang der verschiedenen mathematischen Gebiete gepaart ist. In bester Absicht wird zuweilen die axiomatische Methode überbetont oder gar als allein selig machender Weg gepriesen, wo es doch auch angebracht wäre, die Phantasie des Lesers zu stärken und seine schöpferische Kraft anzuregen. So schrieb schon Lagrange 1788 in seiner *Analytischen Mathematik*: „Man findet in diesem Werk keine Figur. Die hier angewandten Methoden erfordern weder Konstruktionen noch geometrische oder mechanische Schlüsse. Algebraische Operationen allein genügen, die auf einem regulären und einförmigen Wege ausgeführt werden.“ Ganz ähnlich äußerte sich Dieudonné, einer der Väter von Bourbaki, im Vorwort seiner *Grundlagen der modernen Analysis* (1960): Axiomatische Methoden seien strikt zu befolgen ohne jedweden Appell an die „geometrische Intuition“, zumindest in den formalen Beweisen, und diese Notwendigkeit habe er dadurch betont, daß absichtlich kein einziges Diagramm in seinem Buch zu finden wäre.

Freilich hat auch die Mathematik ihre Moden, und inzwischen ist der puristische Standpunkt wieder einmal der Einsicht gewichen, daß man das eine tun kann, ohne das andere zu lassen. Die Anziehungskraft von Arnolds *Mathematischen Methoden der klassischen Mechanik* besteht unter anderem darin, daß viele hilfreiche Figuren die Anschauungskraft des Lesers stützen und ihm das Verständnis der abstrakten Begriffsbildungen erleichtern.

Zum Glück sind auch Courant und Robbins keine Dogmatiker, sondern zeigen uns die Vielfalt mathematischen Denkens, also die geballte Kraft der axiomatischen Methode und die belebende, anregende Wirkung einer glücklich gewählten Figur, die das Denken beflügelt und den Beweisgang in die richtige Bahn lenkt. Außer der *Anschaulichen Geometrie* von Hilbert und Cohn-Vossen kenne ich kein für einen breiten Leserkreis geschriebenes Buch über Mathematik, das dem Geist, dem Charakter und der Schönheit dieser Wissenschaft so gerecht wird wie das vorliegende. Obwohl seit seinem Erscheinen ein halbes Jahrhundert vergangen ist, scheint es mir so frisch, lebendig und aktuell zu sein wie am ersten Tag, was unter anderem auch im Verzicht auf billige Moden und Effekthascherei begründet sein mag; die schöne schlichte Sprache tut ein übriges.

Was ist Mathematik? ist für Leser jeden Alters und jeder Vorbildung gedacht, sofern sie nur Ausdauer und etwas intellektuelle Fähigkeiten mitbringen. Den Schüler wird die Fülle und Vielgestalt der beschriebenen mathematischen Probleme reizen und anspornen, seine geistigen Kräfte zu erproben. Studenten werden vielleicht zu diesem Buch greifen, wenn sie die Orientierung zu verlieren meinen und sich den Ausgangspunkt der modernen Mathematik vor Augen führen wollen. Hier ist die Einheit mathematischen Denkens in der Vielgestalt seiner Ideen, Methoden und Resultate meisterhaft dargestellt. Gymnasiallehrer finden eine reiche Auswahl an Beispielen aller Schwierigkeitsstufen aus den verschiedensten Gebieten – Zahlentheorie, geometrische Konstruktionen, nichteuklidische und projektive Geometrie, Kegelschnitte, Topologie, Extremalaufgaben, Infinitesimalrechnung –, mit denen sich der Unterricht beleben läßt, und für Arbeitsgemeinschaften und Leistungskurse gibt es vielfältige interessante Anregungen. Auch Universitätsdozenten werden mit Gewinn zu diesem Buch greifen, zeigen ihnen doch zwei Meister ihres Faches, wie sich mathematischer Stoff fesselnd und verständlich darstellen läßt ohne billige Kompromisse hinsichtlich Strenge der Beweisführung. Freilich scheuen sich die Autoren nicht, auch Pseudobeweise vorzuführen, wenn diese einen wirklichen Erkenntniswert haben und ein technisch perfekter Beweis nur dem geschulten Mathematiker zuzumuten wäre. Beispiele solcherart Beweise sind Johann Bernoullis Lösung des Brachystochronenproblems und die faszinierende Herleitung des Primzahlsatzes aus statistischen Annahmen.

Der Abschnitt über Minimalflächen, Seifenhautexperimente, Steinerproblem und isoperimetrische Aufgaben wird jedermann fesseln, den Kenner ebensogut wie den Anfänger. Ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis genügt, den Leser in erwartungsvolle Spannung zu versetzen. Ich freue mich, daß der Springer-Verlag *Was ist Mathematik?* wieder aufgelegt hat. Dieses klassische Werk sollte in der Bibliothek jedes Gebildeten stehen, gleich neben *Lotte in Weimar*.

Bonn, den 11. Mai 1992 S. Hildebrandt

Vorwort zur ersten deutschen Ausgabe

In der Zeit seit dem Erscheinen der ersten Auflage von "What is Mathematics"? im Jahre 1941 ist das allgemeine Interesse an der Mathematik überall erheblich gestiegen. Es wird durch den Unterricht in Schulen und Hochschulen meistens nicht recht befriedigt, trotz mancher Bestrebungen zur Unterrichtsreform. Und doch besteht bei vielen Menschen, ungeachtet der Stufe ihrer Ausbildung, der Wunsch nach einem Verständnis dessen, was die Mathematik als das Produkt einer Jahrtausende alten Tradition und als ein integrierender Bestandteil unserer Kultur bedeutet.

Ausgezeichnete populäre Bücher haben dieses Interesse stimuliert. Aber ein wirkliches Verständnis kann nicht von außen durch mühelose Lektüre gewonnen werden, sondern nur durch ernsten Kontakt mit dem Inhalt der lebendigen Mathematik.

Das vorliegende Werk versucht, den Leser von einem durchaus elementaren Niveau ohne Umwege zu Aussichtspunkten zu führen, von denen man einen Einblick in die Substanz der neueren Mathematik gewinnt. Es ist insofern elementar, als es keine Vorkenntnisse über die geläufige Schulmathematik hinaus erfordert. Es vermeidet unnötige Komplikationen und die leider so oft geübte dogmatische Darstellungsform, welche Wurzeln, Motive und Ziele der Mathematik verschleiert. Aber trotz allen Bemühens, so direkt wie möglich den Kern mathematischer Entwicklungen verständlich zu machen, kann dem Leser nicht jede Anstrengung erspart bleiben: ein gewisser Grad von intellektueller Reife und Bereitschaft zum eigenen Nachdenken ist erforderlich.

Das Buch wendet sich an einen weiten Kreis: an Schüler und Lehrer, an Anfänger und Gelehrte, an Philosophen und Ingenieure. Es mag vielleicht als Ergänzung zu FELIX KLEINS klassischem Werke „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" betrachtet werden, indem es „höhere Mathematik" von einem elementaren Standpunkte behandelt.

Das Buch ist in mehr als 10 Jahren intensiver Vorbereitung entstanden. Den zahlreichen Freunden und Helfern, welche in jenen Jahren mitgearbeitet haben, kann ich hier nicht im einzelnen danken. Während der letzten zwei Jahre vor dem Erscheinen des englischen Originals hat Dr. HERBERT ROBBINS, damals Instructor an der New York University, jetzt Professor der mathematischen Statistik an der Columbia University, als Assistent bei der Fertigstellung des Manuskriptes und bei der Drucklegung sehr wesentliche Hilfe geleistet. Wenn auch die Verantwortung für den Plan und den Inhalt des Buches bei dem unterzeichnenden Autor liegt, so soll doch der Name von HERBERT ROBBINS auf dem Titelblatt zum Ausdruck bringen, daß seine Mitarbeit in den letzten Stadien der Vorbereitung für die endgültige Form des Originals wesentlich war. Für die Übersetzung ins Deutsche und für die Bearbeitung des Manuskriptes sowie für das Korrekturlesen danke ich Frau Dr. IRIS RUNGE, Herrn Dr. ARNOLD KIRSCH, Frau BRIGITTE RELLICH, Frau LISELOTTE JANKE und Herrn DIETER SCHMITT; dieser hat überdies das Sachverzeichnis angefertigt.

Die vorliegende deutsche Ausgabe ist dem Andenken meines unersetzlichen Freundes FRANZ RELLICH gewidmet.

Arosa, Februar 1962 RICHARD COURANT

Vorwort zur zweiten deutschen Ausgabe

Die vorliegende Ausgabe unterscheidet sich von der ersten durch einige Korrekturen und Ergänzungen, die ich hauptsächlich meinen Freunden OTTO NEUGEBAUER in Providence und CARL LUDWIG SIEGEL in Göttingen verdanke.

New Rochelle, N. Y. Oktober 1966 RICHARD COURANT

Ratschläge für die Leser

Es ist keineswegs nötig, daß dieses Buch Seite für Seite, Kapitel für Kapitel durchstudiert wird. Trotz der systematischen Anordnung sind die einzelnen Abschnitte weitgehend unabhängig voneinander. Oft sind die ersten Teile der Kapitel leichter zu verstehen als die darauffolgenden Entwicklungen. Der Leser, der vor allem einen allgemeinen Überblick gewinnen will, mag sich mit einer Auswahl des Stoffes begnügen und viele ins Einzelne gehende Diskussionen auslassen. Ebenso sollte ein ungeübter Leser mit nur geringen Vorkenntnissen sich zunächst auf solche Teile der Darstellung beschränken, die ihm ohne große Schwierigkeiten zugänglich sind und sein Interesse erregen.

Ausführungen, welche solche Leser überschlagen mögen, sind durch Kleindruck oder durch Sternchen (*) bezeichnet. Viele der Aufgaben haben keinen Routinecharakter; manche sind schwierig. Wer die Lösung nicht leicht findet, braucht sich nicht zu beunruhigen.

Lehrer, die das Buch zur Ergänzung des Unterrichts an höheren Schulen benutzen wollen, seien auf die Abschnitte über geometrische Konstruktionen und über Maxima und Minima hingewiesen.

Die Kapitel VI und VIII bilden eine zusammenhängende Einführung in die Differential- und Integralrechnung vom Standpunkt des anschaulichen Verständnisses; in den Händen eines Lehrers, der ergänzendes Material an Aufgaben und Beispielen heranziehen will, mögen diese Kapitel eine brauchbare Grundlage für systematischen Klassenunterricht geben. — Vielfache Erfahrungen mit dem Original haben gezeigt, daß auch im Hochschulunterricht das Buch nützlich sein kann, wenn es sich um unkonventionelle Übersichtskurse oder Kurse für die Lehrerbildung handelt.

Alles in allem ist zu hoffen, daß auch die vorliegende deutsche Ausgabe eine vielfache Anwendungsmöglichkeit bietet.

Inhaltsverzeichnis

Drittes Kapitel

Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper

Viertes Kapitel

Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuklidische Geometrien

Fünftes Kapitel

Topologie

Sechstes Kapitel

Funktionen und Grenzwerte

Siebentes Kapitel

Maxima und Minima

Achtes Kapitel

Die Infinitesimalrechnung

Anhang

Was ist Mathematik?

Die Mathematik ist tief im menschlichen Denken verankert. Betrachtender Verstand, unternehmender Wille, ästhetisches Gefühl finden in ihr den reinsten Ausdruck. Sie vereint Logik und Anschauung, Analyse und Konstruktion, Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen. Wenn auch Mode oder Tradition den einen oder anderen Gesichtspunkt betonen mögen, so beruht doch auf dem Zusammenspiel dieser Antithesen und dem Streben nach Synthese die Vitalität und der letzte Wert der mathematischen Wissenschaft.

Zweifellos ist die Entwicklung der Mathematik in allen ihren Zweigen ursprünglich von praktischen Bedürfnissen und von Beobachtungen realer Dinge angeregt worden, selbst wenn dieser Zusammenhang im Unterricht und in der spezialisierten Forschung vergessen wird. Aber einmal begonnen unter dem Druck notwendiger Anwendungen, gewinnt eine mathematische Entwicklung ihren eigenen Schwung, der meistens weit über die Grenzen unmittelbarer Nützlichkeit hinausführt. Dieser Übergang von der angewandten zur theoretischen Wissenschaft zeigt sich in der antiken Entwicklung ebenso wie in vielen Beiträgen von Ingenieuren und Physikern zur modernen Mathematik.

Die Geschichte der Mathematik beginnt im Orient, wo um 2000 v. Chr. die Babylonier ein reiches Material sammelten, das wir heute in die elementare Algebra einordnen würden. Jedoch als Wissenschaft im modernen Sinne tritt die Mathematik erst später auf griechischem Boden im 5. und 4. Jahrhundert v. Chr. hervor. Kontakte zwischen dem Orient und Griechenland, die zur Zeit des persischen Reiches begannen und in der Zeit nach ALEXANDER einen Höhepunkt erreichten, machten die Griechen mehr und mehr mit den Leistungen der babylonischen Mathematik und Astronomie vertraut. Bald wurde die Mathematik Gegenstand der philosophischen Diskussionen in den intellektuellen Kreisen der griechischen Stadtstaaten. Griechische Denker erkannten die großen Schwierigkeiten in den Begriffen der Stetigkeit, der Bewegung, des Unendlichen und in dem Problem der Messung beliebiger Größen mittels gegebener Einheiten. Diese Schwierigkeiten wurden in bewundernswerter Weise gelöst. Das Ergebnis war EUDOXUS' Theorie des geometrischen Kontinuums, eine Leistung, die erst mehr als 2000 Jahre später in der modernen Theorie der Irrationalzahlen ihresgleichen fand. Die deduktiv-axiomatische Richtung in der Mathematik entstand zur Zeit des EUDOXUS und kristallisierte sich später in EUKLIDs „Elementen".

Wenn auch die theoretische und axiomatische Einstellung der griechischen Mathematik eines ihrer wichtigen Kennzeichen bleibt und bis heute einen ungeheuren Einfluß ausgeübt hat, so kann doch nicht stark genug betont werden, daß die Anwendungen und der Kontakt mit der physikalischen Wirklichkeit in der antiken Mathematik durchaus eine ebenso wichtige Rolle spielten und daß auch in der Antike häufig eine weniger strenge Darstellung als die euklidische vorgezogen wurde.

Die frühe Einsicht in die Schwierigkeiten, die mit „inkommensurablen" Größen zusammenhängen, mag die Griechen davon abgeschreckt haben, die Kunst des Zahlenrechnens weiterzuführen, obwohl sie im Orient schon weit entwickelt war. Statt dessen bahnten sich die Griechen den Weg durch das Gestrüpp der reinen axiomatischen Geometrie. So begann einer der merkwürdigen Umwege der Wissenschaftsgeschichte, und vielleicht wurde eine große Gelegenheit verpaßt. Das hohe Ansehen der geometrischen Tradition der Griechen verzögerte fast 2000 Jahre lang die unvermeidliche Weiterentwicklung des Zahlbegriffs und der algebraischen Methoden, welche heute die Grundlage der Wissenschaft bilden.

Nach einer langen Periode der Stagnation und langsamen Vorbereitung begann im 17. Jahrhundert eine Revolution in den mathematischen Wissenschaften mit der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung. In einer wahren Orgie der Produktivität eroberten die Pioniere der neuen Mathematik eine faszinierende Welt mathematischer Reichtümer. Die griechische Geometrie spielte weiter eine wichtige Rolle; aber das griechische Ideal der axiomatischen Kristallisation und strengen systematischen Deduktion verblaßte im 17. und 18. Jahrhundert. Logisch zwingende Beweise, scharfe Definitionen, klare Axiome erschienen den Pionieren der neuen Mathematik unwesentlich. Intuitives Gefühl für Zusammenhänge und eine fast blinde Überzeugung von der übermenschlichen Kraft der neu erfundenen formalen Methoden, mit einer Beimischung von beinahe mystischem Vertrauen in das logisch nicht faßbare „unendlich Kleine" gaben den Anstoß zu neuen Eroberungen. Jedoch allmählich wurde die Ekstase des Fortschritts durch einen neu erwachenden Sinn der Selbstkritik abgelöst. Im 19. Jahrhundert wurde das lange verdrängte Bedürfnis nach Sicherung der Ergebnisse und nach Klarheit unabweisbar, als sich nach der französischen Revolution die Basis des wissenschaftlichen Lebens ungeheuer verbreiterte und die Beherrschung der neuen Methoden nicht einer kleinen Elite von Gelehrten mit sicherem mathematischen Instinkt vorbehalten bleiben konnte. Man wurde also gezwungen, die Grundlagen der neuen Mathematik zu revidieren und zu klären; insbesondere war es nötig, die Differential- und Integralrechnung und ihren Grenzbegriff einem viel größeren Kreise von Lernenden zugänglich zu machen. So wurde das 19. Jahrhundert nicht nur eine Periode neuer Fortschritte, sondern es war zugleich gekennzeichnet durch die erfolgreiche Besinnung auf das klassische Ideal der Präzision und der strengen Beweise. In dieser Hinsicht übertraf es sogar das Vorbild der griechischen Wissenschaft.

Mit der Zeit schlug das Pendel nach der Seite der reinen Logik und Abstraktion aus, und zwar so weit, daß eine gefährliche Trennung der „reinen" Mathematik von lebenswichtigen Anwendungsgebieten entstand. Vielleicht war eine solche Entfremdung zwischen den Mathematikern und anderen Wissenschaftlern in den Zeiten kritischer Revision unvermeidlich. Aber es scheint, und es ist jedenfalls zu hoffen, daß diese Periode der Isolation beendet ist. Die wiedergewonnene innere Stärke und die ungeheure Vereinfachung, die durch das tiefere Verständnis erreicht wurden, machen es heute möglich, die mathematische Theorie zu beherrschen, ohne die Anwendungen zu vernachlässigen. Eine neue organische Einheit von reiner und angewandter Wissenschaft und einen Ausgleich zwischen abstrakter Allgemeinheit und den farbigen, konkreten Erscheinungen zu schaffen, ist vielleicht die wichtigste Aufgabe für die nächste Zukunft.

Eine philosophische Definition der Mathematik ist hier nicht angebracht. Nur auf einige Punkte soll hingewiesen werden. Die Betonung des deduktiv-axiomatischen Charakters der Mathematik birgt eine große Gefahr. Allerdings entzieht sich das Element der konstruktiven Erfindung, der schöpferischen Intuition einer einfachen philosophischen Formulierung; dennoch bleibt es der Kern jeder mathematischen Leistung, selbst auf den abstraktesten Gebieten. Wenn die kristallisierte, deduktive Form das letzte Ziel ist, so sind Intuition und Konstruktion die treibenden Kräfte. Der Lebensnerv der mathematischen Wissenschaft ist bedroht durch die Behauptung, Mathematik sei nichts anderes als ein System von Schlüssen aus Definitionen und Annahmen, die zwar in sich widerspruchsfrei sein müssen, sonst aber von der Willkür des Mathematikers geschaffen werden. Wäre das wahr, dann würde die Mathematik keinen intelligenten Menschen anziehen. Sie wäre eine Spielerei mit Definitionen, Regeln und Syllogismen ohne Ziel und Sinn. Die Vorstellung, daß der Verstand sinnvolle Systeme von Postulaten frei erschaffen könnte, ist eine trügerische Halbwahrheit. Nur aus der Verantwortung gegen das organische Ganze, nur aus innerer Notwendigkeit heraus kann der freie Geist Ergebnisse von wissenschaftlichem Wert hervorbringen.

Trotz der Gefahr der einseitigen Übertreibung hat die Axiomatik zu einem tieferen Verständnis der mathematischen Tatsachen und ihrer Zusammenhänge und zu einer klareren Einsicht in das Wesen mathematischer Begriffe geführt. Hieraus hat sich eine Auffassung entwickelt, welche über die Mathematik hinaus für moderne Wissenschaft typisch ist.

Welchen philosophischen Standpunkt wir auch immer einnehmen mögen, für die wissenschaftliche Beobachtung erschöpft sich ein Gegenstand in der Gesamtheit seiner möglichen Beziehungen zum beobachtenden Subjekt oder Instrument. Freilich, bloße Beobachtung stellt noch keine Erkenntnis oder Einsicht dar; sie muß eingeordnet und gedeutet werden durch Beziehung auf ein zugrundeliegendes Etwas, ein „Ding an sich", das selbst nicht Gegenstand direkter Beobachtung sein kann, sondern zur Metaphysik gehört. Aber für die wissenschaftliche Methode ist es wichtig, alle metaphysischen Elemente auszuschalten und die beobachtbaren Tatsachen als die einzige Quelle aller Vorstellungen und Konstruktionen zu betrachten. Dieser Verzicht auf das Ziel, das „Ding an sich" zu verstehen, die „letzte Wahrheit" zu erkennen, das innerste Wesen der Welt zu entschleiern, mag für naive Enthusiasten bitter sein; aber gerade er hat sich als eine der fruchtbarsten Wendungen im modernen Denken erwiesen.

Entscheidende Erfolge in der Physik verdanken wir dem Festhalten an dem Prinzip der Ausschaltung des Metaphysischen. EINSTEIN reduzierte die Idee der Gleichzeitigkeit an verschiedenen Orten auf beobachtbare Erscheinungen; so wurde der naive Glaube an einen absoluten Sinn dieser Vorstellung als metaphysisches Vorurteil erkannt und der Schlüssel zur Relativitätstheorie gefunden. NIELS BOHR und seine Schüler gingen der Tatsache auf den Grund, daß jede physikalische Beobachtung von einer Einwirkung des beobachtenden Instruments auf das beobachtete Objekt begleitet sein muß; so wurde z. B. klar, daß die gleichzeitige scharfe Bestimmung von Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens physikalisch unmöglich ist. Die weitreichenden Konsequenzen dieser Entdeckung sind heute jedem Wissenschaftler geläufig. Im 19. Jahrhundert herrschte die Auffassung, daß mechanische Kräfte und Bewegungen der Teilchen im Raum etwas „Wirkliches“ wären. Das Phänomen der Wärme wurde befriedigend auf dieser Basis verstanden, und man setzte sich das Ziel, auch Elektrizität, Licht und Magnetismus auf mechanische Erscheinungen zurückzuführen und so zu „erklären“. Zu diesem Zweck wurde der „Äther“ als ein hypothetisches Medium erfunden, welcher zu noch nicht ganz erklärbaren, mechanischen Bewegungen fähig sein sollte. Langsam erkannte man, daß der Äther unbeobachtbar ist und zur Metaphysik gehört, nicht aber zur Physik. Mit Erleichterung und zugleich Enttäuschung wurde schließlich die mechanische Erklärung des Lichtes und der Elektrizität und mit ihnen der Äther aufgegeben.

Eine ähnliche Lage, vielleicht noch stärker ausgeprägt, bestand in der Mathematik. Durch die Jahrhunderte hatten die Mathematiker ihre Objekte, z. B. Zahlen, Punkte usw., als „Dinge an sich“ betrachtet. Da diese Objekte aber den Versuchen, sie angemessen zu definieren, von jeher getrotzt haben, dämmerte es den Mathematikern des 19. Jahrhunderts allmählich, daß die Frage nach der Bedeutung dieser Objekte als „wirkliche Dinge“ für die Mathematik keinen Sinn hat — wenn sie überhaupt einen hat. Die einzigen sinnvollen Aussagen über sie beziehen sich nicht auf die dingliche Realität; sie betreffen nur die gegenseitigen Beziehungen zwischen undefinierten Objekten und die Regeln, die die Operationen mit ihnen beherrschen. Was Punkte, Linien, Zahlen „wirklich“ sind, kann und braucht in der mathematischen Wissenschaft nicht erörtert zu werden. Worauf es ankommt und was „nachprüfbaren“ Tatsachen entspricht, ist Struktur und Beziehung, etwa, daß zwei Punkte eine Gerade bestimmen, daß aus Zahlen nach gewissen Regeln andere Zahlen gebildet werden, usw. Eine klare Einsicht in die Notwendigkeit, die elementaren mathematischen Begriffe ihrer Dinglichkeit zu entkleiden, ist eines der fruchtbarsten Ergebnisse der modernen Entwicklung der Axiomatik.

Glücklicherweise vergessen schöpferische Menschen ihre dogmatischen Vorurteile, sobald diese die konstruktive Leistung behindern. In jedem Fall, für Gelehrte und Laien gleichermaßen, kann nicht Philosophie, sondern nur das Studium der mathematischen Substanz die Antwort auf die Frage geben: Was ist Mathematik?

Erstes Kapitel

Die natürlichen Zahlen

Einleitung

Die Zahlen sind die Grundlage der modernen Mathematik. Aber was sind Zahlen? Was bedeutet etwa die Aussage $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ oder $(-1)(-1) = 1$? Wir lernen in der Schule die mechanischen Rechenregeln für Brüche und negative Zahlen, aber um das Zahlensystem wirklich zu verstehen, müssen wir auf einfachere Elemente zurückgreifen. Während die Griechen die geometrischen Begriffe Punkt und Gerade zur Grundlage ihrer Mathematik wählten, ist es heute zum Leitprinzip geworden, daß alle mathematischen Aussagen letzten Endes auf Aussagen über die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ... zurückführbar sein müssen. „Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles übrige ist Menschenwerk." Mit diesen Worten bezeichnete LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) den sicheren Grund, auf dem der Bau der Mathematik errichtet werden kann.

Vom menschlichen Geist zum Zählen geschaffen, haben die Zahlen keinerlei Beziehung zu der individuellen Natur der gezählten Dinge. Die Zahl Sechs ist eine Abstraktion von allen wirklichen Gesamtheiten, die sechs Dinge enthalten; sie hängt nicht von den speziellen Eigenschaften dieser Dinge oder von den benutzten Symbolen ab. Erst auf einer etwas höheren Stufe der geistigen Entwicklung wird die abstrakte Natur der Idee der Zahl deutlich. Für Kinder bleiben die Zahlen immer mit greifbaren Dingen wie Fingern oder Perlen verknüpft, und primitive Sprachen zeigen einen konkreten Zahlensinn, indem sie für verschiedene Arten von Dingen verschiedene Zahlworte verwenden.

Glücklicherweise braucht sich der Mathematiker nicht um die philosophische Natur des Übergangs von Gesamtheiten konkreter Gegenstände zum abstrakten Zahlbegriff zu kümmern. Wir wollen daher die natürlichen Zahlen als gegeben ansehen, zusammen mit den beiden Grundoperationen, Addition und Multiplikation, durch die sie verknüpft werden können.

§ 1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen

1. Gesetze der Arithmetik

Die mathematische Theorie der natürlichen Zahlen oder *positiven ganzen Zahlen* heißt *Arithmetik*. Sie beruht auf der Tatsache, daß die Addition und Multiplikation der ganzen Zahlen gewissen Gesetzen unterworfen sind. Um diese Gesetze in voller Allgemeinheit auszusprechen, können wir nicht Symbole wie 1, 2, 3 benutzen, da sich diese auf bestimmte Zahlen beziehen. Die Behauptung

$$1 + 2 = 2 + 1$$

ist nur ein spezielles Beispiel des allgemeinen Gesetzes, daß die Summe von zwei Zahlen dieselbe ist, gleichgültig, in welcher Reihenfolge sie betrachtet werden. Wenn wir daher die Tatsache aussprechen wollen, daß eine gewisse Beziehung zwischen Zahlen unabhängig von den speziellen Werten der beteiligten Zahlen gültig ist, so werden wir die Zahlen symbolisch durch Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnen. Mit dieser Verabredung können wir nun fünf arithmetische Grundgesetze aussprechen, die dem Leser vertraut sind:

$$1)\ a+b=b+a, \qquad 2)\ ab=ba,$$
$$3)\ a+(b+c)=(a+b)+c, \qquad 4)\ a(bc)=(ab)c,$$
$$5)\ a(b+c)=ab+ac.$$

Die ersten beiden von diesen, die *kommutativen* Gesetze der Addition und Multiplikation, sagen aus, daß man bei Addition und Multiplikation die Reihenfolge der beteiligten Elemente vertauschen darf. Das dritte, das *assoziative* Gesetz der Addition, sagt aus, daß die Addition dreier Zahlen dasselbe ergibt, einerlei, ob wir die erste zu der Summe der zweiten und dritten oder die dritte zu der Summe der ersten und zweiten addieren. Das vierte ist das assoziative Gesetz der Multiplikation. Das letzte, das *distributive* Gesetz, drückt die Tatsache aus, daß eine Summe sich mit irgendeiner Zahl multiplizieren läßt, indem man jedes Glied der Summe mit der Zahl multipliziert und dann die Produkte addiert.

Diese Gesetze der Arithmetik sind sehr einfach und könnten als selbstverständlich erscheinen. Es wäre aber möglich, daß sie auf andere Gegenstände als positive Zahlen nicht anwendbar wären. Wenn a und b Symbole nicht für Zahlen, sondern für chemische Substanzen sind und wenn Addition im Sinne von „Hinzufügen" gebraucht wird, so ist klar, daß das kommutative Gesetz nicht immer gilt. Denn wenn z. B. Schwefelsäure zu Wasser hinzugefügt wird, so erhält man eine verdünnte Lösung, während die Hinzufügung von Wasser zu konzentrierter Schwefelsäure für den Experimentator eine Katastrophe bedeuten kann. Ähnliche Beispiele zeigen, daß bei solcher „Arithmetik" auch das assoziative und distributive Gesetz der Addition versagen können. Man kann sich demnach Typen einer Arithmetik vorstellen, bei denen eins oder mehrere der Gesetze 1) bis 5) nicht gelten. Solche Systeme sind tatsächlich in der modernen Mathematik untersucht worden.

Ein konkretes Modell für den abstrakten Begriff der natürlichen Zahl wird die anschauliche Grundlage andeuten, auf der die Gesetze 1) bis 5) beruhen. Statt die gewöhnlichen Zahlzeichen 1, 2, 3 usw. zu benutzen, wollen wir diejenige positive ganze Zahl, die die Anzahl der Dinge in einer gegebenen Gesamtheit (z. B. die Gesamtheit der Äpfel auf einem bestimmten Baum) angibt, durch eine

Fig. 1. Addition

Anzahl Punkte in einem rechteckigen Kästchen bezeichnen, je einen Punkt für jedes Ding. Indem wir mit solchen Kästchen operieren, können wir die Gesetze der Arithmetik der positiven Zahlen untersuchen. Um zwei Zahlen a und b zu addieren, setzen wir die beiden Kästchen aneinander und entfernen die Trennwand.

Um a und b zu multiplizieren, bilden wir einen neuen Kasten mit a Zeilen und b Spalten von Punkten. Man sieht, daß die Regeln 1) bis 5) unmittelbar anschaulichen Eigenschaften dieser Operationen mit den Kästen entsprechen.

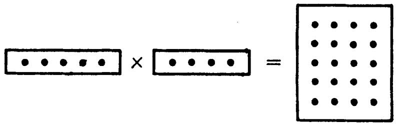

Fig. 2. Multiplikation

Auf Grund der Definition der Addition zweier positiver ganzer Zahlen können wir nun die *Kleiner-* bzw. *Größerbeziehung* definieren. Jede der beiden gleichwertigen Aussagen $a < b$ (lies: a kleiner als b) und $b > a$ (lies: b größer als a) bedeutet,

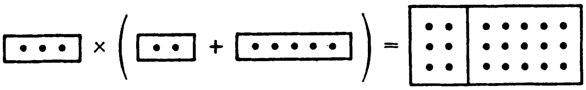

Fig. 3. Das distributive Gesetz

daß der Kasten b aus dem Kasten a erhalten werden kann, indem man einen geeignet gewählten Kasten c hinzufügt, so daß $b = a + c$. Wenn das zutrifft, schreiben wir

$$c = b - a\,,$$

womit die Operation der *Subtraktion* definiert ist.

Fig. 4. Subtraktion

Addition und Subtraktion heißen *inverse Operationen*; denn wenn auf die Addition der Zahl d zu der Zahl a die Subtraktion der Zahl d folgt, so ist das Ergebnis wieder die ursprüngliche Zahl a:

$$(a + d) - d = a\,.$$

Man beachte, daß die ganze Zahl $b - a$ bisher nur definiert ist, wenn $b > a$. Die Deutung von $b - a$ als *negative ganze Zahl*, falls $b < a$, wird später erörtert werden (S. 44).

Es ist häufig bequem, die Schreibweise $b \geqq a$ (lies: b größer oder gleich a) oder $a \leqq b$ (lies: a kleiner oder gleich b) zu benutzen, um die Verneinung der Aussage $a > b$ auszudrücken. So ist z. B. $2 \geqq 2$ und $3 \geqq 2$.

Wir können den Bereich der positiven ganzen Zahlen, dargestellt durch Kästen mit Punkten, noch ein wenig erweitern, indem wir die ganze Zahl *Null* einführen, dargestellt durch einen leeren Kasten. Wenn wir den leeren Kasten durch das gewohnte Symbol 0 bezeichnen, so gilt nach unserer Definition der Addition und Multiplikation

$$a + 0 = a\,,$$
$$a \cdot 0 = 0\,,$$

für jede Zahl a. Denn $a + 0$ bezeichnet die Addition eines leeren Kastens zu dem

Kasten a, während $a \cdot 0$ einen Kasten ohne Spalten, also einen leeren Kasten bedeutet. Es ist dann sinnvoll, die Definition der Subtraktion dahin zu erweitern, daß

$$a - a = 0$$

für jede ganze Zahl a. Dies sind die charakteristischen arithmetischen Eigenschaften der Zahl Null.

Geometrische Modelle wie diese Kästen mit Punkten, z. B. der antike Abacus, sind bis in das späte Mittelalter vielfach zur Ausführung numerischer Rechnungen benutzt worden; später wurden sie allmählich ersetzt durch weit überlegene symbolische Methoden, die auf dem Dezimalsystem beruhen.

2. Die Darstellung der positiven ganzen Zahlen

Wir müssen sorgfältig unterscheiden zwischen einer Zahl und dem Symbol 5, V, ... usw., das zu ihrer Darstellung benutzt wird. Im Dezimalsystem werden die 10 Ziffersymbole 0, 1, 2, 3, ..., 9 für Null und die ersten 9 positiven ganzen Zahlen benutzt. Eine größere Zahl, z. B. „dreihundertzweiundsiebzig", kann in der Form

$$300 + 70 + 2 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$$

ausgedrückt werden und wird im Dezimalsystem durch das Symbol 372 bezeichnet. Der wichtige Punkt hierbei ist, daß die Bedeutung der Ziffern 3, 7, 2 von ihrer *Stellung* auf dem Einer-, Zehner- oder Hunderterplatz abhängt. Mit dieser „Stellenschreibweise" können wir jede ganze Zahl durch ausschließliche Benutzung der 10 Ziffersymbole in verschiedener Zusammensetzung darstellen. Nach der allgemeinen Regel wird eine ganze Zahl in folgender Form dargestellt

$$z = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d\,,$$

wobei die Ziffern a, b, c, d ganze Zahlen von Null bis neun sind. Die Zahl z wird dann durch das abgekürzte Symbol

$$abcd$$

ausgedrückt. Nebenbei bemerken wir, daß die Koeffizienten d, c, b, a die Reste sind, die bei aufeinanderfolgenden Divisionen von z durch 10 bleiben. Also

$$\begin{aligned} 372 : 10 &= 37 \quad \text{Rest } 2 \\ 37 : 10 &= 3 \quad \text{Rest } 7 \\ 3 : 10 &= 0 \quad \text{Rest } 3\,. \end{aligned}$$

Der oben angegebene spezielle Ausdruck für z kann nur ganze Zahlen unter zehntausend darstellen, da größere Zahlen fünf oder mehr Ziffern verlangen. Wenn z eine ganze Zahl zwischen zehntausend und hunderttausend ist, so können wir sie in der Form

$$z = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

ausdrücken und durch das Symbol $abcde$ darstellen. Eine ähnliche Aussage gilt für ganze Zahlen zwischen hunderttausend und einer Million usw. Es ist nützlich, sämtliche Zahlen durch eine einheitliche Bezeichnungsweise zu erfassen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir die verschiedenen Koeffizienten e, d, c, ... durch den Buchstaben a mit verschiedenen „Indexwerten": a_0, a_1, a_2, a_3, ... und deuten die

Tatsache, daß die Potenzen von 10 so groß wie nötig genommen werden können, dadurch an, daß wir die höchste Potenz nicht durch 10^3 oder 10^4, wie in den obigen Beispielen, sondern durch 10^n bezeichnen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl bedeuten soll. Die allgemeine Darstellung einer Zahl z im Dezimalsystem ist dann

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \tag{1}$$

oder symbolisch

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 .$$

Ebenso wie in dem oben betrachteten Spezialfall sehen wir, daß die Ziffern $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ einfach die aufeinanderfolgenden Reste sind, die bei wiederholter Division von z durch 10 auftreten.

Im Dezimalsystem ist die Zahl Zehn als Basis gewählt. Der Laie macht sich vielleicht nicht klar, daß die Wahl der Zehn nicht wesentlich ist, sondern daß jede ganze Zahl größer als Eins demselben Zweck dienen könnte. Man könnte z. B. ein *Septimalsystem* (Basis 7) benutzen. In einem solchen System würde eine ganze Zahl als

$$b_n \cdot 7^n + b_{n-1} \cdot 7^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot 7 + b_0 \tag{2}$$

ausgedrückt werden, worin die b Ziffern von Null bis sechs sind, und die Zahl durch das Symbol

$$b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$$

dargestellt wird. So würde hundertneun im Septimalsystem durch das Symbol 214 bezeichnet werden, was

$$2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 4$$

bedeutet. Zur Übung möge der Leser beweisen, daß die allgemeine Regel für den Übergang von der Basis zehn zu einer beliebigen anderen Basis B darin besteht, aufeinanderfolgende Divisionen der Zahl z durch B durchzuführen; die Reste werden die Ziffern der Zahl in dem System mit der Basis B sein. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 109 : 7 &= 15, \quad \text{Rest } 4 \\ 15 : 7 &= 2, \quad \text{Rest } 1 \\ 2 : 7 &= 0, \quad \text{Rest } 2 \end{aligned}$$

109 (Dezimalsystem) = 214 (Septimalsystem).

Es liegt nahe, zu fragen, ob irgendeine spezielle Wahl der Basis besondere Vorzüge hat. Wir werden sehen, daß eine zu kleine Basis Nachteile hat, während eine große Basis das Lernen vieler Ziffersymbole und ein erweitertes Einmaleins erfordert. Die Wahl der Zwölf als Basis ist empfohlen worden, da zwölf durch zwei, drei, vier und sechs teilbar ist und daher Aufgaben, in denen Divisionen und Brüche vorkommen, vielfach vereinfacht werden würden. Um eine beliebige ganze Zahl auf Grund der Basis zwölf (Duodezimalsystem) auszudrücken, brauchen wir zwei neue Ziffersymbole für zehn und elf. Schreiben wir etwa α für zehn und β für elf. Dann würde im Duodezimalsystem zwölf als 10 geschrieben werden, „zweiundzwanzig" würde als 1α, „dreiundzwanzig" würde 1β und „einhunderteinunddreißig" würde $\alpha\beta$ heißen.

Die Erfindung der Stellenschreibweise, die den Sumerern oder Babyloniern zugeschrieben wird und von den Hindus weiterentwickelt wurde, war von außerordentlicher Bedeutung für die Kultur. Die frühesten Zahlsysteme waren auf dem rein additiven Prinzip aufgebaut. In der römischen Darstellungsweise schrieb man z. B.

$$\text{CXVIII} = \text{hundert} + \text{zehn} + \text{fünf} + \text{eins} + \text{eins} + \text{eins}.$$

Die ägyptischen, hebräischen und griechischen Zahlsysteme standen auf dem gleichen Niveau. Einer der Nachteile einer rein additiven Bezeichnungsweise ist, daß man mehr und mehr Symbole braucht, je größer die Zahlen werden. (Selbstverständlich waren die damaligen Wissenschaftler noch nicht mit unseren modernen astronomischen und atomaren Größenordnungen geplagt.) Aber der Hauptnachteil der antiken Systeme, z. B. des römischen, lag darin, daß das Zahlenrechnen äußerst schwierig war; nur Spezialisten konnten sich über die allereinfachsten Aufgaben hinauswagen. Das Stellensystem der Hindus, das wir jetzt benutzen, hat demgegenüber enorme Vorteile. (Es wurde in das mittelalterliche Europa durch italienische Kaufleute eingeführt, die es von den Moslems gelernt hatten.) Im Stellensystem können alle Zahlen, groß oder klein, mit Hilfe einer relativ geringen Anzahl von Ziffersymbolen dargestellt werden (im Dezimalsystem sind dies die „arabischen Ziffern" 0, 1, 2, ..., 9). Dazu kommt der noch wichtigere Vorteil der bequemen Rechenmethoden. Die Regeln für das Rechnen mit Zahlen im Stellensystem können in der Form von Additions- und Multiplikationstabellen für die Zifferngrößen dargestellt werden, die man ein für allemal auswendig lernen kann. Die uralte Kunst des Rechnens, die einst nur auf wenige Eingeweihte beschränkt war, wird jetzt in der Grundschule gelehrt. Es gibt nicht viele Beispiele dafür, daß der wissenschaftliche Fortschritt das Alltagsleben so stark beeinflußt und erleichtert hat.

3. Das Rechnen in nichtdezimalen Systemen

Die Benutzung der Zahl Zehn als Basis geht auf die Anfänge der Zivilisation zurück und beruht zweifellos auf der Tatsache, daß wir zehn Finger haben, mit denen wir zählen können. Aber die Zahlworte vieler Sprachen zeigen noch Spuren von der Verwendung anderer Basen, insbesondere zwölf und zwanzig. Im Englischen und Deutschen werden die Wörter für elf und zwölf nicht nach dem Dezimalprinzip der Verbindung der 10 mit den Ziffern, wie bei 13, 14 usw., gebildet, sondern sie sind sprachlich unabhängig von dem Wort für 10. Im Französischen deuten die Wörter „vingt" und „quatrevingt" für 20 und 80 an, daß für manche Zwecke ein System mit der Basis 20 gebraucht worden ist. Im Dänischen bedeutet das Wort für 70 „halvfjerds" halbwegs von dreimal zu viermal zwanzig. Die babylonischen Astronomen hatten ein Bezeichnungssystem, das teilweise sexagesimal (Basis 60) war, und man nimmt an, daß sich hieraus die herkömmliche Einteilung der Stunde und des Winkelgrads in 60 Minuten erklärt.

In einem Nichtdezimalsystem sind die Rechenregeln dieselben, aber die Tabellen für Addition und Multiplikation (Einmaleins) der Zifferngrößen sind andere. Da wir an das Dezimalsystem gewöhnt und auch durch die Zahlwörter unserer Sprache daran gebunden sind, werden wir dies wohl zuerst als etwas verwirrend empfinden. Versuchen wir einmal eine Multiplikation im Septimalsystem. Vorher empfiehlt es sich, die Tabellen, die wir zu benutzen haben, hinzuschreiben:

Addition

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

Multiplikation

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

Wir wollen nun 265 mit 24 multiplizieren, wobei diese beiden Zahlensymbole im Septimalsystem geschrieben sind. (Im Dezimalsystem würde dies der Multiplikation von 145 mit 18 entsprechen.) Die Regeln der Multiplikation sind dieselben wie im Dezimalsystem. Wir beginnen, indem wir 5 mit 4 multiplizieren, was nach der Multiplikationstabelle 26 ergibt.

$$\begin{array}{r} 265 \\ 24 \\ \hline 1456 \\ 563 \\ \hline 10416 \end{array}$$

Wir schreiben 6 an die Stelle der Einer und übertragen die 2 „im Kopf“ auf die nächste Stelle. Dann finden wir $4 \cdot 6 = 33$ und $33 + 2 = 35$. Wir schreiben die 5 hin und gehen auf dieselbe Art weiter, bis alles ausmultipliziert ist. Bei der Addition von 1456 und 563 erhalten wir $6 + 0 = 6$ auf der Einerstelle, $5 + 3 = 11$ in der Stelle der Siebener; wieder schreiben wir 1 hin und behalten 1 für die Neunundvierziger-Stelle, für die wir $1 + 6 + 4 = 14$ erhalten. Das Endergebnis ist $265 \cdot 24 = 10416$.

Als Probe für dieses Resultat können wir dieselben Zahlen im Dezimalsystem multiplizieren. 10416 (Septimalsystem) kann im Dezimalsystem geschrieben werden, wenn man die Potenzen von 7 bis zur vierten berechnet: $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$. Also haben wir $2401 + 4 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 6$, wobei hier Zahlen im Dezimalsystem gemeint sind. Addieren wir die Zahlen, so finden wir, daß 10416 im Septimalsystem gleich 2610 im Dezimalsystem ist. Multiplizieren wir schließlich 145 mit 18 im Dezimalsystem, so ergibt sich 2610, also stimmen die Rechnungen überein.

Übungen: 1. Man stelle die Additions- und Multiplikationstabellen im Duodezimalsystem auf und rechne einige Beispiele der gleichen Art.

2. Man drücke „dreißig“ und „hundertdreiunddreißig“ in den Systemen mit den Basen 5, 7, 11 und 12 aus.

3. Was bedeuten die Symbole 11111 und 21212 in diesen Systemen?

4. Man bilde die Additions- und Multiplikationstabellen für die Basen 5, 11, 13.

In theoretischer Hinsicht ist das Stellensystem mit der Basis 2 dadurch ausgezeichnet, daß es die kleinstmögliche Basis hat. Die einzigen Ziffern in diesem *dyadischen System* sind 0 und 1; jede andere Zahl z wird durch eine Reihe dieser beiden Symbole ausgedrückt. Die Additions- und Multiplikationstabellen bestehen einfach aus den Regeln $1 + 1 = 10$ und $1 \cdot 1 = 1$. Aber der Nachteil dieses Systems liegt auf der Hand: Man braucht lange Ausdrücke, um kleine Zahlen darzustellen. So z. B. wird neunundsiebzig, das man als $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$ ausdrücken kann, im dyadischen System 1001111 geschrieben.

Als Beispiel für die Einfachheit der Multiplikation im dyadischen System wollen wir sieben und fünf multiplizieren, die hier 111 bzw. 101 heißen. Behalten wir im Sinn, daß $1 + 1 = 10$ ist, so haben wir

$$\begin{array}{r} 111 \\ \underline{101} \\ 111 \\ \underline{111} \\ 100011 = 2^5 + 2 + 1\,, \end{array}$$

was tatsächlich fünfunddreißig ist.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), einer der bedeutendsten Köpfe seiner Zeit, schätzte das dyadische System sehr. LAPLACE sagt von ihm: „LEIBNIZ sah in seiner dyadischen Arithmetik das Bild der Schöpfung. Er stellte sich vor, die Einheit stelle Gott dar und die Null das Nichts; das höchste Wesen habe alle Dinge aus dem Nichts erschaffen, ebenso wie die Einheit und die Null alle Zahlen seines Zahlensystems ausdrücken".

Übung: Man diskutiere das Problem der Zahlenbenennung, wenn eine beliebige Basis a zugrundegelegt wird. Um die ganzen Zahlen in dem betr. System benennen zu können, brauchen wir Wörter für die Ziffern $0, 1, \ldots, a - 1$ und für die verschiedenen Potenzen von a: $a, a^2, a^3, \ldots$. Wieviel verschiedene Zahlwörter braucht man zur Benennung aller Zahlen von Null bis tausend, wenn $a = 2, 3, 4, 5, \ldots, 15$ ist; bei welcher Basis werden die wenigsten gebraucht? (Beispiele: Wenn $a = 10$, brauchen wir 10 Wörter für die Ziffern, dazu Wörter für 10, 100 und 1000, also im ganzen 13. Für $a = 20$ brauchen wir 20 Wörter für die Ziffern, dazu Wörter für 20 und 400, im ganzen also 22. Wenn $a = 100$, brauchen wir 100 plus 1.)

*§ 2. Die Unendlichkeit des Zahlensystems
Mathematische Induktion

1. Das Prinzip der mathematischen Induktion

Die Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ hat kein Ende; denn hinter jede Zahl n, die man erreicht, kann man noch die nächste Zahl $n + 1$ schreiben. Wir drücken diese Eigenschaft der Zahlenreihe aus, indem wir sagen, daß es *unendlich viele* natürliche Zahlen gibt. Die Gesamtheit der natürlichen Zahlen stellt das einfachste und nächstliegende Beispiel des mathematisch Unendlichen dar, das in der modernen Mathematik eine beherrschende Rolle spielt. Überall in diesem Buch werden wir es mit Gesamtheiten oder „Mengen" zu tun haben, die unendlich viele mathematische Objekte enthalten, wie z. B. die Menge aller Punkte einer Geraden oder die Menge aller Dreiecke in einer Ebene. Die unendliche Folge der natürlichen Zahlen ist das einfachste Beispiel einer unendlichen Menge.

Der Vorgang, schrittweise von n zu $n + 1$ überzugehen, durch den die unendliche Folge der natürlichen Zahlen erzeugt wird, bildet zugleich die Grundlage für eine der wichtigsten mathematischen Schlußweisen, das Prinzip der mathematischen Induktion. Die „empirische Induktion" in den Naturwissenschaften geht von einer speziellen Beobachtungsreihe gewisser Erscheinungen zur Behauptung eines allgemeinen Gesetzes über, das alle vorkommenden Fälle dieser Erscheinung beherrscht. Der Grad der Sicherheit, mit dem dieses Gesetz verbürgt ist, hängt von der Anzahl der einzelnen Beobachtungen und deren Bestätigungen ab. Diese Art des induktiven Schließens ist häufig vollkommen überzeugend; die Voraussage, daß die

Sonne morgen im Osten aufgehen wird, ist so sicher, wie nur etwas sein kann; aber der Charakter dieser Aussage ist ein durchaus anderer als der eines durch streng logische oder mathematische Schlußfolgerung bewiesenen Gesetzes.

Auf völlig andere Weise wird die ***mathematische Induktion*** angewandt, um die Wahrheit eines mathematischen Satzes für eine unendliche Folge von Fällen, den ersten, zweiten, dritten usw., ohne Ausnahme zu erweisen. Es möge A eine Behauptung bedeuten, die eine willkürliche Zahl n enthält. Zum Beispiel sei A die Behauptung: „Die Summe der Winkel in einem konvexen Polygon von $n+2$ Seiten ist das n-fache von 180 Grad." Oder A' sei die Behauptung: „Durch n in einer Ebene gezogene Geraden kann man die Ebene nicht in mehr als 2^n Teile zerlegen." Um einen solchen Satz für *jede* natürliche Zahl n zu beweisen, genügt es nicht, ihn einzeln für die ersten 10 oder 100 oder sogar 1000 Werte von n zu beweisen. Das würde tatsächlich dem Gesichtspunkt der empirischen Induktion entsprechen. Statt dessen müssen wir eine streng mathematische, nicht-empirische Schlußweise benutzen, deren Charakter durch die folgenden Beweise der Beispiele A und A' hervortreten wird. Im Falle A wissen wir, daß für $n = 1$ das Polygon ein Dreieck ist, und aus der elementaren Geometrie ist bekannt, daß die Winkelsumme im Dreieck $1 \cdot 180°$ ist. Für ein Viereck, $n = 2$, ziehen wir eine Diagonale, die das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt. Dies zeigt sofort, daß die Winkelsumme im Viereck gleich der Summe aller Winkel in beiden Dreiecken ist, was $180° + 180° = 2 \cdot 180°$ ergibt. Wir gehen weiter zum Fünfeck, $n = 3$: dieses zerlegen wir in ein Dreieck und ein Viereck. Da dieses die Winkelsumme $2 \cdot 180°$ hat, wie eben bewiesen, und das Dreieck die Winkelsumme 180°, so erhalten wir $3 \cdot 180$ Grad für das Fünfeck. Nun ist es klar, daß wir in derselben Weise unbegrenzt weitergehen und den Satz für $n = 4$, dann für $n = 5$ usw. beweisen können. Jede Behauptung folgt in derselben Weise aus der vorhergehenden, so daß der allgemeine Satz A für alle n gültig sein muß.

In ähnlicher Weise können wir die Behauptung A' beweisen. Für $n = 1$ ist sie offenbar richtig, da eine einzelne Gerade die Ebene in zwei Teile teilt. Fügen wir nun eine zweite Gerade hinzu: Jeder der vorherigen Teile wird wieder in zwei Teile geteilt, wenn nicht die neue Gerade der ersten parallel ist. In beiden Fällen haben wir für $n = 2$ nicht mehr als $4 = 2^2$ Teile. Jetzt fügen wir eine dritte Gerade hinzu: jedes der vorherigen Gebiete wird entweder in zwei Teile zerschnitten oder unverändert gelassen. Also ist die Anzahl aller Teile nicht größer als $2^2 \cdot 2 = 2^3$. Nachdem wir dies wissen, können wir den nächsten Fall in derselben Art beweisen und so unbegrenzt fortfahren.

Der wesentliche Gedanke bei den vorstehenden Überlegungen ist, einen allgemeinen Satz A für alle Werte von n dadurch zu beweisen, daß man nacheinander eine Folge von Spezialfällen $A_1, A_2, \ldots$ beweist. Die Durchführbarkeit beruht auf zweierlei: a) Man kann mit einer allgemeinen Methode zeigen, daß, *wenn* eine Aussage A_r wahr ist, dann die nächste Aussage A_{r+1} *ebenfalls* wahr sein muß; b) Von der ersten Aussage A_1 *weiß* man, daß sie wahr ist. Daß diese beiden Bedingungen ausreichen, um die Gültigkeit *aller* Aussagen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sicherzustellen, ist ein logisches Prinzip, das für die Mathematik so grundlegend ist wie die klassischen Regeln der aristotelischen Logik. Wir formulieren es wie folgt:

Es sei die Aufgabe, eine unendliche Folge von mathematischen Sätzen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots,$$

die zusammen den allgemeinen Satz A darstellen, zu beweisen. *Wenn* a) ***durch eine mathematische Überlegung gezeigt werden kann, daß für beliebiges r aus der Gültigkeit der Aussage A_r die Gültigkeit von A_{r+1} folgt und*** b) ***die erste Aussage A_1 als wahr bekannt ist, dann müssen alle Aussagen der unendlichen Folge wahr sein, und A ist bewiesen.***

Wir werden dies ohne Bedenken anerkennen, ebenso wie wir die einfachen Regeln der gewöhnlichen Logik als grundlegendes Prinzip der mathematischen Schlüsse anerkennen. Denn wir können die Gültigkeit jeder einzelnen der Aussagen A_n nachweisen, indem wir von der gegebenen Voraussetzung b), daß A_1 gilt, ausgehen und durch wiederholte Anwendung der Voraussetzung a) schrittweise auf die Gültigkeit von A_2, A_3, A_4 usw. schließen, bis wir zu der Aussage A_n kommen. Das Prinzip der mathematischen Induktion beruht somit auf der Tatsache, daß es zu jeder natürlichen Zahl r eine nächste $r+1$ gibt, und daß jede gewünschte Zahl n durch eine endliche Anzahl solcher von der Zahl 1 ausgehenden Schritte erreicht werden kann.

Oft wird das Prinzip der mathematischen Induktion angewandt, ohne daß es ausdrücklich erwähnt wird, oder es wird nur durch ein beiläufiges „etc." oder „und so weiter" angedeutet. Dies geschieht besonders oft im Elementarunterricht. Aber bei genaueren Beweisen ist die ausdrückliche Durchführung des induktiven Schließens unerläßlich. Wir wollen einige einfache, aber doch nicht triviale Beispiele anführen.

2. Die arithmetische Reihe

Für jeden Wert von n ist die Summe $1+2+3+\cdots+n$ *der ersten n ganzen Zahlen gleich* $\frac{n(n+1)}{2}$. Um diesen Satz durch mathematische Induktion zu beweisen, müssen wir zeigen, daß für jedes n die Behauptung A_n

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

gültig ist. a) Wenn r eine natürliche Zahl ist und wenn wir wissen, daß A_r richtig ist, d. h. daß die Gleichung

$$1+2+3+\cdots+r=\frac{r(r+1)}{2}$$

gilt, dann erhalten wir durch Addition der Zahl $r+1$ auf beiden Seiten die neue Gleichung

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+r+(r+1)&=\frac{r(r+1)}{2}+r+1\\&=\frac{r(r+1)+2(r+1)}{2}=\frac{(r+1)(r+2)}{2},\end{aligned}$$

und das ist genau die Behauptung A_{r+1}. b) Die Behauptung A_1 ist offensichtlich richtig, da $1=\frac{1\cdot 2}{2}$. Folglich ist nach dem Prinzip der mathematischen Induktion die Behauptung A_n für jedes n gültig, was zu beweisen war.

Gewöhnlich wird dies dadurch gezeigt, daß man die Summe $1+2+3+\cdots+n$ auf zwei Arten schreibt:

$$S_n=1+\quad 2\quad+\cdots+(n-1)+n$$

und

$$S_n=n+(n-1)+\cdots+\quad 2\quad+1\,.$$